

**Tommaso Russo**  
**A.A 2003 - 2004**  
**Informatica IV**

**Programma svolto**

**Sintesi del programma**

Questa parte del corso intende dare una panoramica sulla possibilità di condurre un'indagine scientifica utilizzando strumenti che fino a qualche decennio fa non esistevano e fino a qualche anno fa erano appannaggio di pochi laboratori particolarmente attrezzati:

- ricerche testuali sulla letteratura scientifica
- programmi di simulazione
- rappresentazione grafica dei risultati sotto diverse prospettive
- confronto con dati reali desumibili da banche dati di misure già effettuate
- collaborazione in rete con gli strumenti del telelavoro

il test case prescelto è lo studio della genesi delle reti complesse secondo modelli che sono stati ideati negli ultimi 50 anni e sviscerati negli ultimi 6 anni:

- i grafi a connessione casuale di Erdos e Reny
- i reticoli regolari a riconnessione casuale a lunga distanza di Watts e Strogatz
- le reti ad accrescimento preferenziale, senza e con saturazione, di Barabasi

I parametri caratteristici delle reti generate:

- proprietà di connessione
- diametro
- grado medio e sua distribuzione
- coefficiente d' aggregazione

vengono esaminati per ogni modello, ri-ricavati ove possibile tramite programmi di simulazione ed analisi scritti dagli stessi studenti, e confrontati con i parametri caratteristici delle reti riscontrate nel mondo reale.

## Testo di lettura:

Mark Buchanan  
"NEXUS - la rivoluzionaria teoria delle reti"  
Arnoldo Mondadori collana "saggi"  
settembre 2003, ISBN 88-04-51251-2, euro 18.

## Riferimento globale:

Reka Albert<sup>1</sup> and Albert-Laszlo Barabasi  
Statistical Mechanics of Complex Networks

reperibile a: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106096>  
(verrà distribuito in formato elettronico)

## 21.4.2004

Introduzione al problema delle reti "Piccolo Mondo"

L' oracolo di Kevin Bacon: <http://www.cs.virginia.edu/oracle/>

"Posizione privilegiata" di Kevin Bacon?

"Posizione privilegiata" di qualsiasi altro attore: [http://www.cs.virginia.edu/oracle/star\\_links.html](http://www.cs.virginia.edu/oracle/star_links.html)

Il (Mito? Leggenda metropolitana? Problema?) "six degrees of separation"

Stanley Milgram: gli esperimenti (ca 1960) (vedi NEXUS, pg 21-28)

- "Obbedienza al carnefice" (Vedi <lettura non obbligatoria> "The Perils of Obedience", 1974 by Stanley Milgram. Distribuito.)
- "la lettera persa"
- "lettere nel piccolo mondo"

Obiezioni all' esperimento di Milgram (percentuale lettere arrivate), ripetizione dell' esperimento in altri contesti.

Problema: quale modello può spiegare la rete "piccolo mondo"?

Prime ipotesi da parte degli studenti: propagazione delle reti di conoscenza ad albero:

- binario (non porta a 6 ma a **34** gradi di separazione)
- Ennario -  $N = ?$   $N_{min} = \text{Radice sesta}(6.000.000.000) = \text{ca } 43$ 
  - o così' pero' esiste UN SOLO path da me a Kevin Bacon
  - o e come si fa a trovarlo? (Problema dell' algoritmo di ricerca)
- Valori ragionevoli di conoscenti per essere umano? (50 - 100 - 200...)

## Primo approccio: reti casuali

Primi richiami di teoria dei grafi (da completare in seguito)

**Teoremi strani:** “proprietà vera per **quasi tutti i** grafi che soddisfano a...” - definizione esatta:

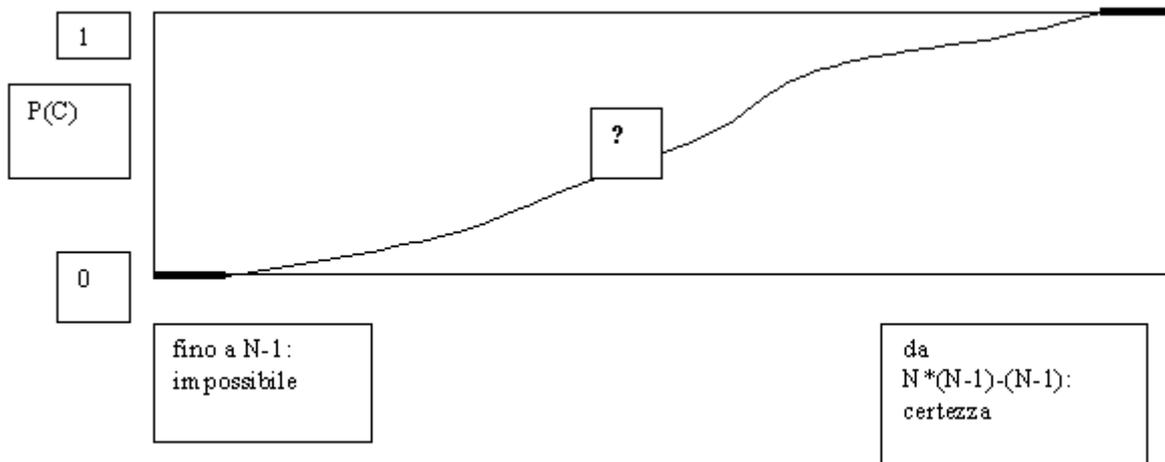
One says that **almost every graph has property Q** (in a certain model) if the probability that a graph in the model satisfies Q goes to 1 when  $n \rightarrow \infty$  (of course, in this case  $p$  and  $M$  might depend on  $n$ ).

Matematica “sperimentale”: il limite  $p \rightarrow 1$  per  $N \rightarrow$  infinito ci dice poco; è importante che  $1-p$  sia trascurabile agli effetti pratici per reti di dimensione pratica. Evidenza computazionale: se già per  $N$  “piccolo”  $1-p$  è trascurabile, allora per  $N$  grandi si può aspettarsi  $p =$  ca 1 “quasi certezza”.

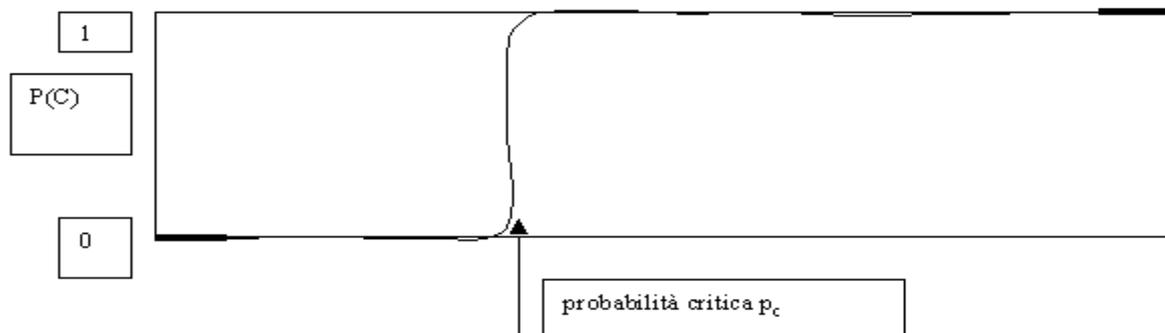
Grafo casuale di probabilità  $p$ : esistono  $p * N * (N-1) / 2$  archi fra gli  $N * (N-1) / 2$  possibili. Quand’ e’ che il grafo è connesso?

Teorema fondamentale della connessione di Erdos - Reny:

Cosa sappiamo:

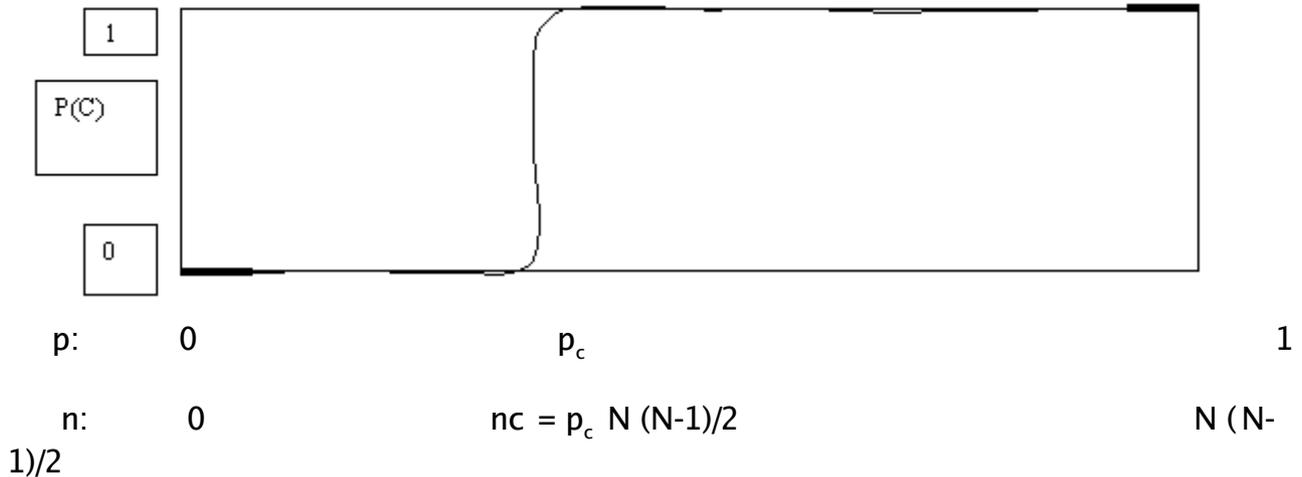


Cosa ha dimostrato Erdos:



## 22.4.2004

in dettaglio: la proprietà C è qui l' essere connesso, ma lo stesso andamento con diversa  $p_c$  si ha anche per altre proprietà (p.es. contenere determinati subgrafi):



1. punto di flesso a  $p_c = (\ln N) / N$ , ossia  $n_c = \ln N (N-1)/2$ ; grado totale grafo =  $K_c = 2 n_c$ ; grado medio dei nodi  $\langle k_c \rangle = K_c / N = \text{ca } \ln N = p_c N$
2. flesso praticamente verticale
3.  $P(C)$  trascurabile per  $p < p_c$ ;  $1 - P(C)$  trascurabile per  $p > p_c$

Dalle formule reperibili su

Reka Albert<sup>1</sup> and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks  
 pg. 13 (dimostrate nelle pagg. precedenti, dimostrazioni NON da sapere)

si ricavano le seguenti tabelle:

Probabilità critica perche' un grafo casuale risulti connesso					
N	$p_{crit} = \ln(N)/N$	$n_{max} = N(N-1)/2$	$n = p_{crit} * n_{max}$	$\langle k \rangle = 2n/N = p_{crit} * N$	$d(p_{crit}) = \ln N / \ln \langle k \rangle$
5	3,22E-001	10	3,218875825	1,61	3,38
10	2,30E-001	45	10,36163292	2,30	2,76
15	1,81E-001	105	18,95635141	2,71	2,72
20	1,50E-001	190	28,4594566	3,00	2,73
25	1,29E-001	300	38,6265099	3,22	2,75
50	7,82E-002	1225	95,84456363	3,91	2,87
100	4,61E-002	4950	227,9559242	4,61	3,02
1.000	6,91E-003	499500	3450,423762	6,91	3,57
10.000	9,21E-004	49995000	46047,09669	9,21	4,15
100.000	1,15E-004	4999950000	575640,5168	11,51	4,71
1.000.000	1,38E-005	5E+11	6907748,371	13,82	5,26
1.000.000.000	2,07E-008	5E+17	10361632908	20,72	6,84

<b>6.000.000.000</b>	3,75E-009	1,8E+19	67545075907	<b>22,52</b>	<b>7,23</b>
1.000.000.000.000 0	2,76E-011	5E+23	1,38155E+13	27,63	8,33
Probabilità critica perché un grafo casuale contenga un ciclo e un componente gigante					
N	$P_{crit}=1/N$	$n_{max}=N(N-1)/2$	$n = p_{crit} * n_{max}$	$\langle k \rangle = 2n/N = p_{crit} * N$	N del comp. Gig.
5	2,00E-001	10	2	1,00	2,92
10	1,00E-001	45	4,5	1,00	4,64
15	6,67E-002	105	7	1,00	6,08
20	5,00E-002	190	9,5	1,00	7,37
25	4,00E-002	300	12	1,00	8,55
50	2,00E-002	1225	24,5	1,00	13,57
100	1,00E-002	4950	49,5	1,00	21,54
1.000	1,00E-003	499500	499,5	1,00	100,00
10.000	1,00E-004	49995000	4999,5	1,00	464,16
100.000	1,00E-005	4999950000	49999,5	1,00	2154,43
1.000.000	1,00E-006	5E+11	499999,5	1,00	10000,00
1.000.000.000	1,00E-009	5E+17	499999999,5	1,00	1000000,00
6.000.000.000	1,67E-010	1,8E+19	3000000000	1,00	3301927,25
1.000.000.000.000 0	1,00E-012	5E+23	5E+11	1,00	100000000,00
Probabilità critica perché un grafo casuale contenga un albero di ordine 3					
N	$P_{crit}=N^{-3/2}$	$n_{max}=N(N-1)/2$	$n = p_{crit} * n_{max}$	$\langle k \rangle = 2n/N = p_{crit} * N$	
5	8,94E-002	10	0,894427191	0,45	
10	3,16E-002	45	1,423024947	0,32	
15	1,72E-002	105	1,807392228	0,26	
20	1,12E-002	190	2,124264579	0,22	
25	8,00E-003	300	2,4	0,20	
50	2,83E-003	1225	3,464823228	0,14	
100	1,00E-003	4950	4,95	0,10	
1.000	3,16E-005	499500	15,79557691	0,03	
10.000	1,00E-006	49995000	49,995	0,01	
100.000	3,16E-008	4999950000	158,1123019	0,00	
1.000.000	1,00E-009	5E+11	499,9995	0,00	
1.000.000.000	3,16E-014	5E+17	15811,38829	0,00	
6.000.000.000	2,15E-015	1,8E+19	38729,83346	0,00	
1.000.000.000.000 0	1,00E-018	5E+23	500000	0,00	

Evoluzione di un grafo casuale. Fasi principali:

- 1- connessioni sparse, nessun albero (perché?)
- 2- connessioni sparse con qua e là alberi, nessun ciclo (perché?)
- 3- ciclo e componente "gigante"; accrescimento della componente gigante e assorbimento
- 4- grafo connesso

Importanza della componente gigante nella teoria della percolazione (cenno)

ref Reka Albert<sup>1</sup> and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks  
 pg. 14 e succ., da darci un'occhiata

I grafi casuali spiegano la struttura delle reti "piccolo mondo"?

Al contrario di quanto afferma Buchanan a pag. 27 in Nexus, sembrerebbe di si', almeno per quanto riguarda i gradi di separazione; vedi il diametro (MAX fra i gradi di separazione calcolati) nella prima tabella.

Si consideri inoltre che:

- 1- "6 gradi di separazione" è dato come MEDIA (non è un diametro) ed è una misura empirica limitata, relativa alle lettere ARRIVATE nell' esperimento di Milgram; magari quelle che hanno seguito un path più lungo si sono perse;
- 2- nella rete delle relazioni sociali  $\langle k \rangle$  è senz' altro superiore a 23, il che corrisponde a una  $p > p_c$  e quindi diametro inferiore;

**Per quanto riguarda 1 - ,**

I dati empirici possono essere ricavati da misure esatte di reti esistenti diverse da quella delle relazioni sociali umane: vedi lista :

Reka Albert<sup>1</sup> and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks  
 pg. 8

Esaminate con attenzione le colonne relativi ai path medi,  $l$  e  $l_{real}$

**Per quanto riguarda 2 - ...**

**28.4.2004**

Probabilità critica perche' un grafo casuale risulti connesso				
N	$\langle k \rangle = 2n/N = p_{crit} * N$	$d(p_{crit}) = \ln N / \ln \langle k \rangle$	$d(2 * p_{crit})$	$d(3 * p_{crit})$
5	1,609437912	3,381989195	1,376726788	1,022192
10	2,302585093	2,760785994	1,50773691	1,191417
15	2,708050201	2,718301206	1,602988372	1,292723
20	2,995732274	2,730371059	1,67327947	1,3643
25	3,218875825	2,753453576	1,72855306	1,41948
50	3,912023005	2,867937186	1,90162335	1,58853
100	4,605170186	3,015473824	2,07409565	1,75382
1.000	6,907755279	3,574249917	2,63073217	2,278842
10.000	9,210340372	4,148191314	3,161291439	2,77508

80.000	11,28978191	4,657696664	3,621949968	3,20503 9
1.000.000	13,81551056	5,261464354	4,162628527	3,70945 5
300.000.000	19,51929303	6,569048577	5,32651761 8	4,795877
400.000.000	19,80697511	6,633204473	5,38352783	4,849128
1.000.000.000	20,72326584	6,836525469	5,56418280 8	5,01789 9
6.000.000.000	22,51502531	7,229834018	5,91359954 7	5,34443 9
1.000.000.000.000	27,63102112	8,325257055	6,886945897	6,254827

Come si vede, aumentando la densità di connessione 2 - 3 volte (44 e 66 sono più vicini di 22 alla stima di quanti conoscenti abbia un essere umano) il diametro diminuisce, ma di poco; quello che aumenta molto è la resistenza della connettività alla distruzione di connessioni e anche di nodi (che distrugge le connessioni afferenti ai nodi e per di più diminuisce N, aumentando la probabilità critica per la connettività e quindi rendendo facile la disconnessione della parte residua del grafo in un componente gigante e tanti subgrafi piccoli).

Quindi: un grafo casuale genera una rete "piccolo mondo" con diametri ridotti e connessioni medie  $\langle k \rangle$  limitate. **Domande che sorgono:**

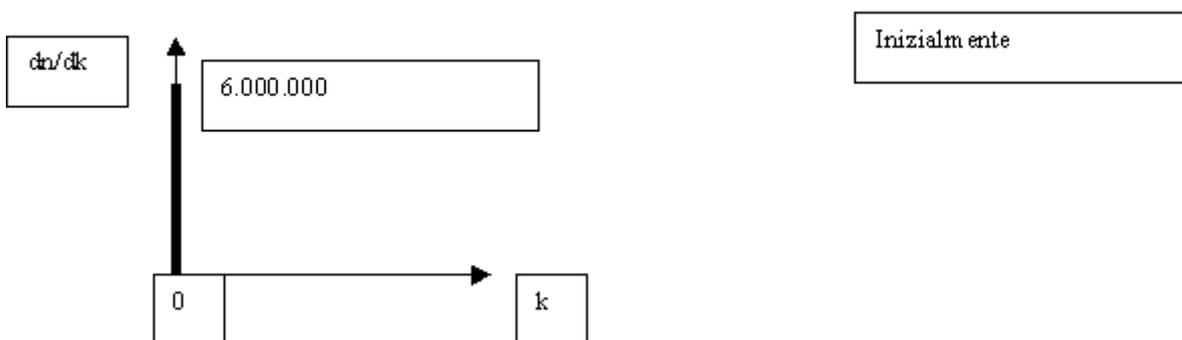
1. possiamo fare di meglio?
2. i grafi casuali spiegano **tutte** le proprietà delle reti "piccolo mondo"?

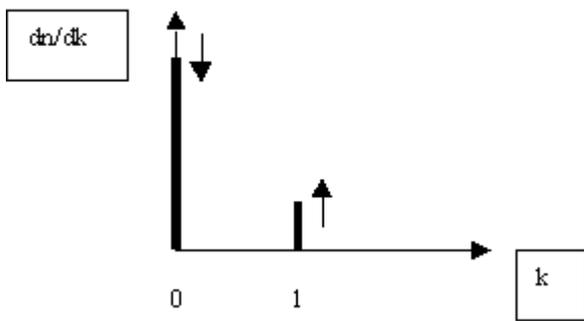
**possiamo fare di meglio?**

Innanzitutto: definizione di "meglio". Stella (albero a un livello) con  $k(\text{radice}) = 6.000.000.000$  e  $k(\text{foglie}) = 1$  dà diametro 2 e  $\langle k \rangle = 2$ , MA  $k(\text{max}) = 6.000.000.000$ .

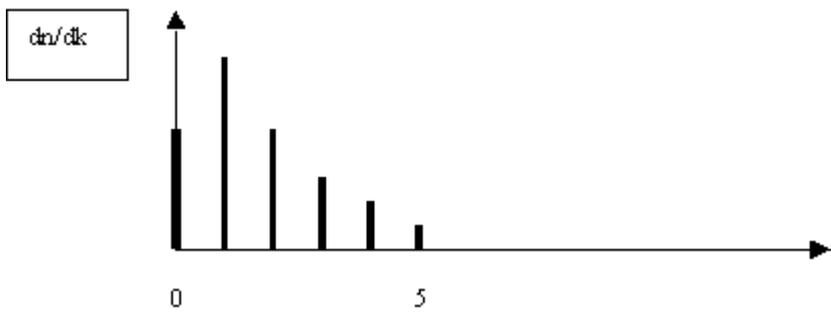
Caratteristiche desiderabili in una rete - concetto di costo di una rete ( $c = \text{cammino}$ ):  
 $\langle k \rangle < \langle c \rangle$  se  $k$  e  $c$  sono distribuiti uniformemente o con Poisson  
 $k(\text{max}) < c(\text{max})$  se  $k$  e  $c$  hanno distribuzioni molto irregolari

Evoluzione della distribuzione di  $k$  sulla rete casuale:

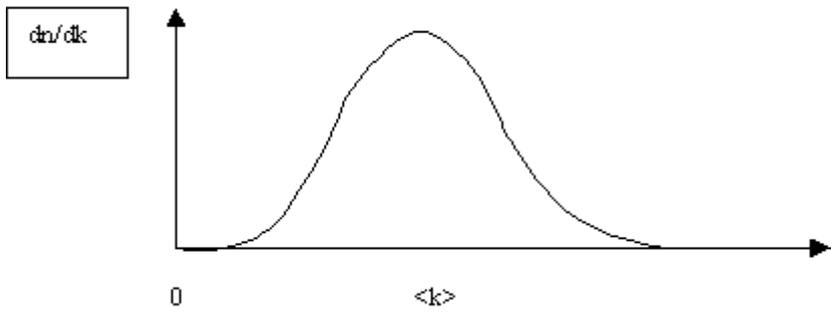




Nella prima fase (solo subgrafi di ordine 2)



Avvicinandosi alla pcrit di connessione



pcrit di connessione

(vedi Statistical Mechanics of Complex Networks, pg 12)

Ricerca di reti con k distribuito più uniformemente: si prendono in esame reti ad alto grado di regolarità

Alberi regolari d-ari di profondità p (d=numero di diramazioni ad ogni livello):

N. foglie =  $d^p$  ( nodi con  $k = 1$  )

N. nodi intermedi ( $p \rightarrow \infty$ ) = N. Foglie /  $(d - 1)$  ( nodi con  $k = d + 1$  )

$k(\max) = d + 1$

$\langle k \rangle = 2$

affrontarlo)

diametro =  $2p$

affrontarlo)

(distribuzione di  $k$ ? Problema interessante per chi voglia

(distribuzione di  $c$ ? Problema interessante per chi voglia

Albero				
Nodi	6.000.000.000			
Diramazioni	Profondità circa	Diametro=2*profondità		Costo
			Kmax=Diram+1	
2	33	64	3	192
3	21	40	4	160
4	17	32	5	160
5	14	26	6	156
6	13	24	7	168
7	12	22	8	176
8	11	20	9	180
9	11	20	10	200
10	10	18	11	198
15	9	16	16	256
20	8	14	21	294
25	7	12	26	312
30	7	12	31	372
35	7	12	36	432
40	7	12	41	492
45	6	10	46	460
50	6	10	51	510

### Ipercubi generalizzati

Ipercubi generalizzati completi				
Nodi	6.000.000.000			
Base	Dimensioni	Diametro=dim	Costo	
			<k>=k(costante)	
2	33	33	33	1089
3	21	21	42	882
4	17	17	51	867
5	14	14	56	784
6	13	13	65	845
7	12	12	72	864
8	11	11	77	847
9	11	11	88	968
10	10	10	90	900
15	9	9	126	1134
20	8	8	152	1216
25	7	7	168	1176
30	7	7	203	1421
35	7	7	238	1666
40	7	7	273	1911
45	6	6	264	1584
50	6	6	294	1764

Ipercubi generalizzati NON completi (reticoli a barre)				
Nodi	6.000.000.000			
Base	Dimensioni	Diametro=(b-1) *d		Costo
			Kmax=*2Dim	
2	33	33	66	2178
3	21	42	42	1764
4	17	51	34	1734
5	14	56	28	1568
6	13	65	26	1690
7	12	72	24	1728
8	11	77	22	1694
9	11	88	22	1936
10	10	90	20	1800
15	9	126	18	2268
20	8	152	16	2432
25	7	168	14	2352
30	7	203	14	2842
35	7	238	14	3332
40	7	273	14	3822
45	6	264	12	3168
50	6	294	12	3528

La rete casuale, con il suo costo minimo =  $23 * 7 = 150$  ca, resta imbattuta.

Gli alberi le si avvicinano, ma con diametri sempre molto maggiori.

I grafi ad alta regolarità veramente soddisfano altri requisiti delle reti, come la simmetria => facile algoritmo di routing.

29.4.2004

## I grafi casuali spiegano tutte le proprietà delle reti “piccolo mondo”?

No. Dati empirici molto diversi per

- coefficiente di aggregazione (per reti piccolo mondo varia fra 0.3 e 0.75)
- distribuzione di  $k$  (vedremo meglio in seguito)

Definizione di  $C$ , coefficiente di aggregazione - vedi Collective dynamics of 'small-world' di networks di Duncan J. Watts\* & Steven H. Strogatz, legenda alla fig. 2

coefficiente di aggregazione di una rete casuale =  $p$  (densità dei collegamenti), estremamente bassa rispetto a 0.5

Coefficiente di aggregazione della rete sociale mondiale? Decisamente superiore, pari a quelle delle reti piccolo mondo. Vedi in merito (sola darci un'occhiata) THE STRENGTH OF WEAK TIES:

A NETWORK THEORY REVISITED di Mark Granovetter

Possibile modello che spiega Diametro piccolo e  $C$  alto:

Collective dynamics of 'small-world' di networks di Duncan J. Watts\* & Steven H. Strogatz, (leggerlo tutto, sapere tutto eccetto l'ultima pagina)

Spiegato anche meglio in

Reka Albert<sup>1</sup> and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks pgg 23 - 26, saltare “average path length” e “spectral properties”

## 12.5.2004 (una settimana saltata)

Considerazione sui risultati visti finora: leggi generali ottenute per simulazione, non per risoluzione esatta di equazioni differenziali

Essenziali strumenti di simulazione:

Excel (già usato)

GnuPlot (verrà usato, vedi seguito)

Creazione e analisi grafi?

**Progetto di realizzazione tool** per verifica e la riproduzione dei risultati di Erdos, Watts/Stogatz:

tool multimodulo: ultimo modulo sarà GnuPlot (e questo impatta sulla specifica del penultimo modulo)

altri moduli necessari:

1. Creazione di grafi (secondo varie leggi, sarà un modulo realizzato in diverse versioni)
2. Analisi di grafi
3. (eventualmente) riduzione di risultati ottenuti a dati plottabili

Principi fondamentali di progettazione sw:

Moduli come FILTRI, lettura da stdin e scrittura su stdout, formati Human-readable; questo permette

- la concatenazione in cascata dei moduli
- la scrittura dei risultati intermedi su memoria di massa
- l'ispezione dell' out e la creazione/modifica dell' in da parte di esseri umani

Linguaggi di programmazione usabili: anche diversi da modulo a modulo

Analisi modulo "analisi grafi"

- struttura dati per il grafo (non matrice ma liste di adiacenza)
- algoritmi di ricerca in profondità e ampiezza (preferibile). Dato l' esempio classico basato sulla "colorazione" dei nodi: inizialmente tutti bianchi, (PARTENZA ESPLOAZIONE) se ce n'è almeno uno bianco (se nessuno, algoritmo finito) si sceglie (con qualsiasi criterio, anche a caso) un nodo sorgente; il sorgente viene "ingrigo" e messo in una coda; da ogni nodo presente nella coda (PARTENDO DAL PRIMO) si trovano tutti quelli adiacenti ancora bianchi (se ce n'è almeno uno già nero o grigio c'è un ciclo), che diventano anch' essi grigi e messi nella stessa coda; finito di trovare tutti i suoi adiacenti, il nodo in esame viene "annerito" e tolto dalla coda. L' esplorazione finisce quando la coda è vuota, e allora si ritorna a PARTENZA ESPLOAZIONE (se il grafo non è connesso esistono ancora nodi bianchi, e si devono esplorare i subgrafi rimanenti).
- Modifica all' algoritmo: l' algoritmo classico esplora il grafo ma non consente di tener conto facilmente dei passi fatti dal sorgente; il fatto di considerare in sequenza i nodi della "prima frontiera", poi quelli della "seconda frontiera" e così via è assicurato dal gestire la coda in modo FIFO, ma la "distanza dalla sorgente" è un dato che va perso. Si usano allora 4 colori, bianco, grigio chiaro, grigi scuro e nero; neri sono i nodi già visitati e di cui sono stati considerati tutti i vicini; grigio scuro i nodi dell' ultima frontiera raggiunta (all' inizio la sola sorgente), grigio chiaro i nodi della nuova frontiera in costruzione; costruita la nuova frontiera, i nodi grigio scuro diventano neri, i grigi chiari grigi scuri, e la distanza raggiunta dalla sorgente incrementata di uno. Con questo algoritmo non serve la coda (ma può venir usata perché velocizza), basta un campo "colore" nel vettore nodi.

## Specifiche del formato dei file di in/ou

Output1.

Per un grafo di N nodi il file contiene N record fatti così:

il primo: numero totale nodi (e basta; update del gruppo di lavoro)  
n°nodo ; lista dei nodi connessi (separata da ',')

Esempio

Con molta fantasia propongo (F.Andrian) il grafo

```
1 --- 2 ---- 4
 \   /
  3
```

Il file di output dovrà essere il seguente

4  
1;2,3  
2;1,3,4  
3;1,2  
4;2

Output2.

Si puo' calcolare con "L' algoritmo a priorit  di ampiezza"

E' del tipo

NS;N1,Nc1;N2,Nc2 .....

NS = numero di sottografi

Nx = numero di nodi del sottografo x

Ncx = numero di connessioni del sottografo x

Se il grafo e' connesso abbiamo un solo sottografo (NS=1) da specificare.

Dal grafo di esempio visto sopra otteniamo

1;4,4

### 13.5.2004

Nella specifica dell' output del secondo programma abbiamo trascurato un punto importante: il DIAMETRO

Come si calcola il diametro del grafo esplorato (se era connesso)?

Il numero di passi effettuato per l' esplorazione   indicativo (numero passi  $\leq$  diametro  $\leq 2^*($ numero passi)) e con grafi casuali si avr  quasi sempre diametro "poco" numero passi, ma per calcolarlo con esattezza non c'  verso, bisogna ri-esplorare il grafo n nodi-1 volte prendendo come sorgente ogni nodo a turno (in realt  l' ultimo nodo si pu  saltare, ma non   un gran guadagno). Il massimo dei numeri passi effettuati sar  allora il diametro.

Se il grafo NON   connesso, per convenzione si usa dire che il suo diametro   il diametro della sua maggior componente connessa. E' un numero che non ha nessun interesse, possiamo evitare di calcolarlo e dire che per un grafo non connesso il diametro   infinito.

(oppure calcolarlo e vedere come varia prima di raggiungere la connessione: ha un andamento di qualche interesse)

**Torniamo alle reti "piccolo mondo" di Watts e Strogatz:**

Punti notevoli:

W & S non disponevano di alcuna formula analitica per calcolare C(p) e diametro(p);

solo in seguito altri ricercatori hanno determinato che dev' essere circa

$$C(p) = \sim C(0) * (1-p)^3$$

( Statistical Mechanics of Complex Networks, pg 26)

$$\text{Diam}(p) = \sim \text{Diam}(0) / \sqrt{2 * p * \langle k \rangle * N_{\text{nodi}}} \quad (\text{per } p \text{ lontane da } 1)$$

**(Esempio dei grafi di shortcut completi ):** posto  $n_c = n$ . nodi che partecipano ai shortcut,  $N_c$  numero di corrispondenti connessioni "casuali", è  
 $\text{diam}(N_c) = \sim 1 + \text{diam}(0) / n_c$   
con  $N_c = n_c(n_c-1)/2 \approx n_c * n_c / 2$      $n_c = \sqrt{2 * N_c}$

==> intuizione, verifica solo numerica con selezione casi via Montecarlo;

Il plot di C(p) e Diam (p) su scala lineare non dà indicazioni immediate: le due curve precipitano entrambe a valori molto bassi per poi mantenersi basse fino a p=1, a una prima vista potevano convalidare l' ipotesi che D e Diam procedessero di conserva, alti C corrispondenti ad alti Diam e viceversa; le differenza è data dagli andamenti per p basse delle due curve

Per apprezzare la differenza bisognava effettuare uno **zoom sui p bassi**, cosa che risulta automatica utilizzando per p una scala logaritmica  $x = \text{Log } p$  ( $p = 10^x$  ( $p=0$  va fuori scala,  $p=1$  corrisponde a  $x=0$ ) il plot si fa per valori negativi di x 0, -1, -2 ... corrispondenti a  $p= 1, 0.1, 0.001$  eccetera. In questo caso, y rimane lineare in C e Diam

Passando da scala lineare a scala logaritmica molte cose appaiono più chiare.

Cosa accade ponendo anche  $y = \text{Log } C/C(0)$  e  $y = \text{Log } \text{Diam}/\text{Diam}(0)$  ?

Si Zooma anche sulla parte bassa di C e Diam;  $\ln(\text{Diam}(\ln p))$  diventa una retta discendente con pendenza 1/2; l' altra curva rimane con curvatura verso il basso perché non è in p ma in (1-p).

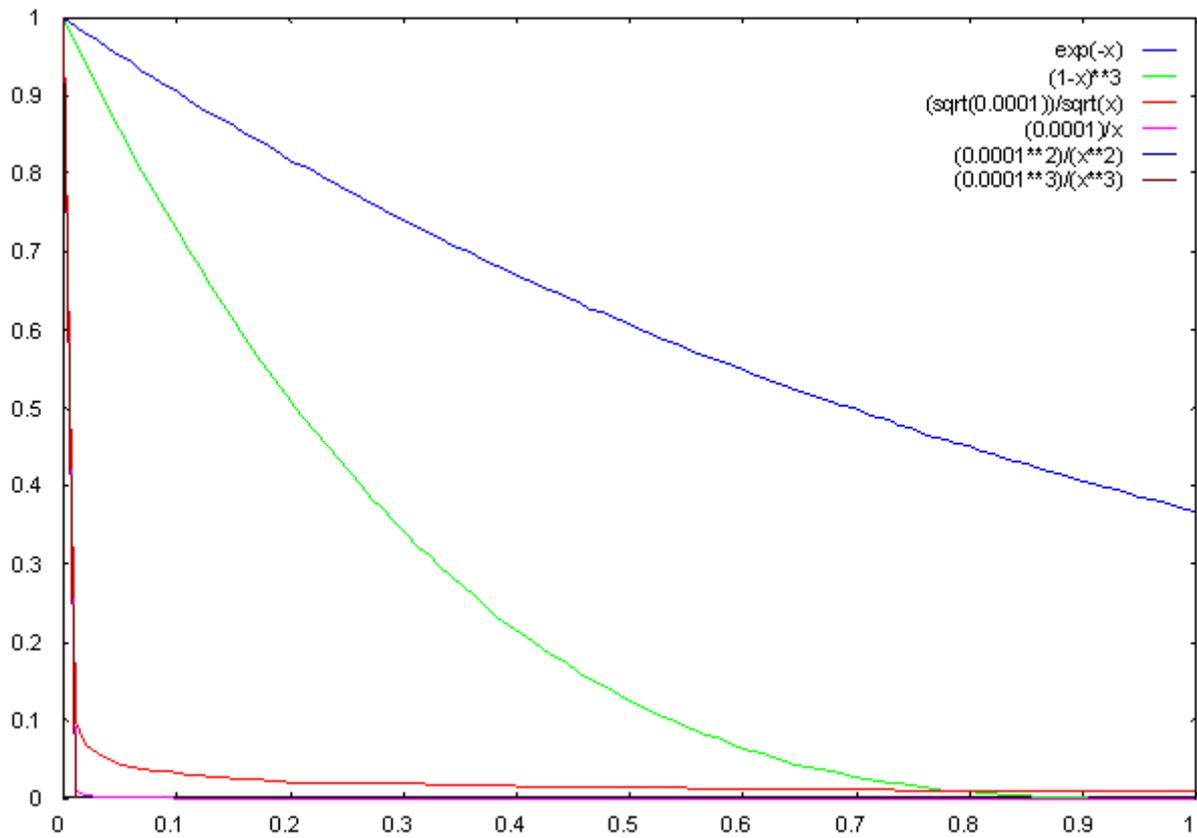
**Piccolo corso sull' uso di gnuplot, semplice e potente strumento d' indagine...**

```
plot
set range
set logscale
set range se logscale
```

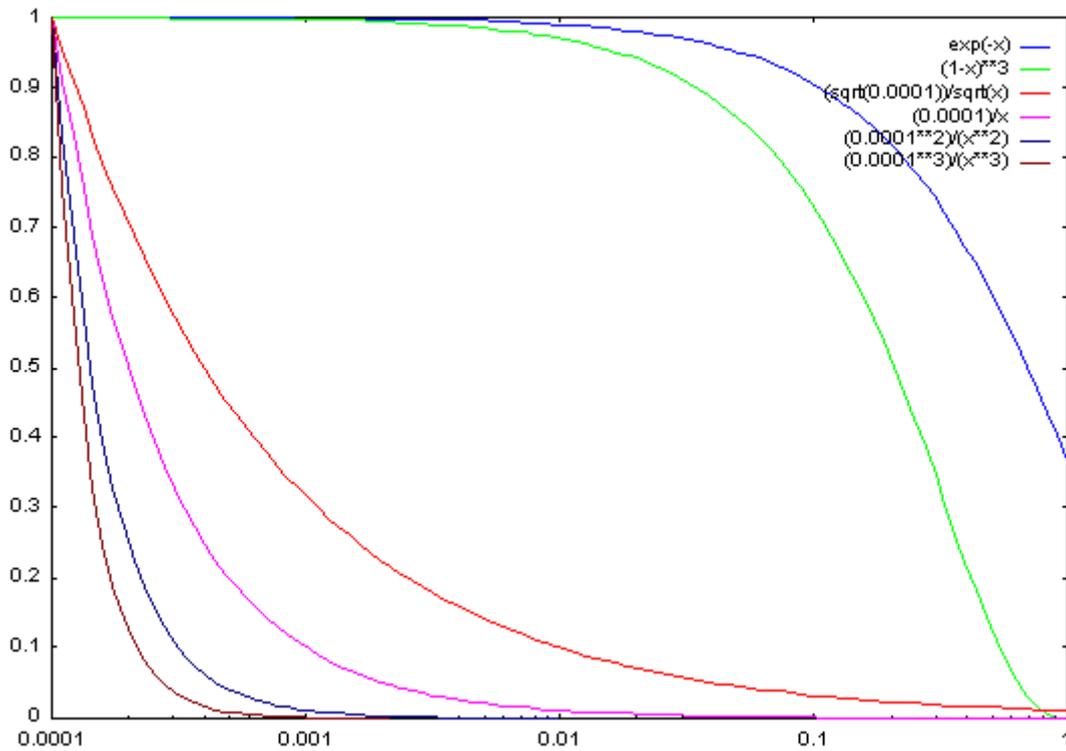
**Vediamo alcune tipiche "curve di decadimento" in scala lineare, x logaritmica, x e y logaritmiche:**

```
gnuplot> set xrange [0.0001:1]
gnuplot> set yrange [0.0001:1]
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
```

$/(x^{**2}), (0.0001^{**3})/(x^{**3})$

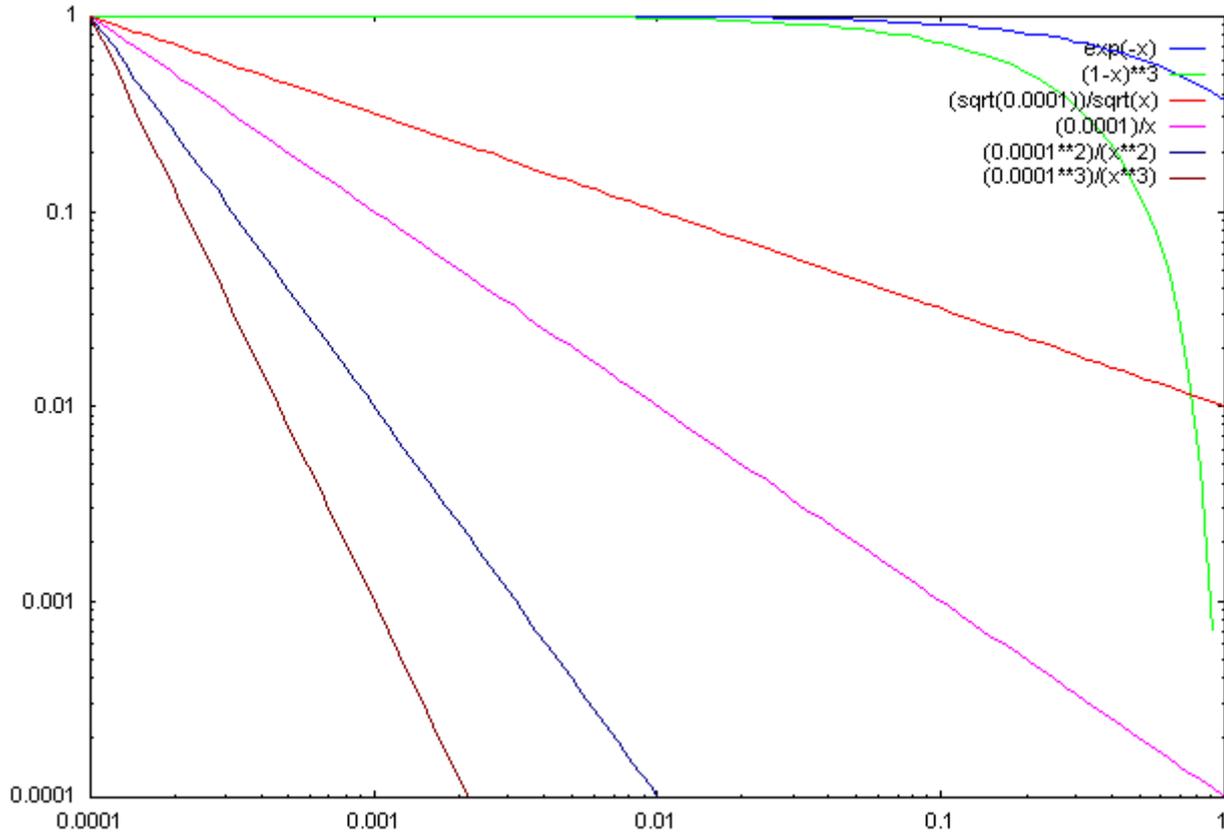


```
gnuplot> set logscale x
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)
```



Ecco come Watts e Strogatz hanno evidenziato lo scarto fra l' andamento di diam (p) e di C(p)!

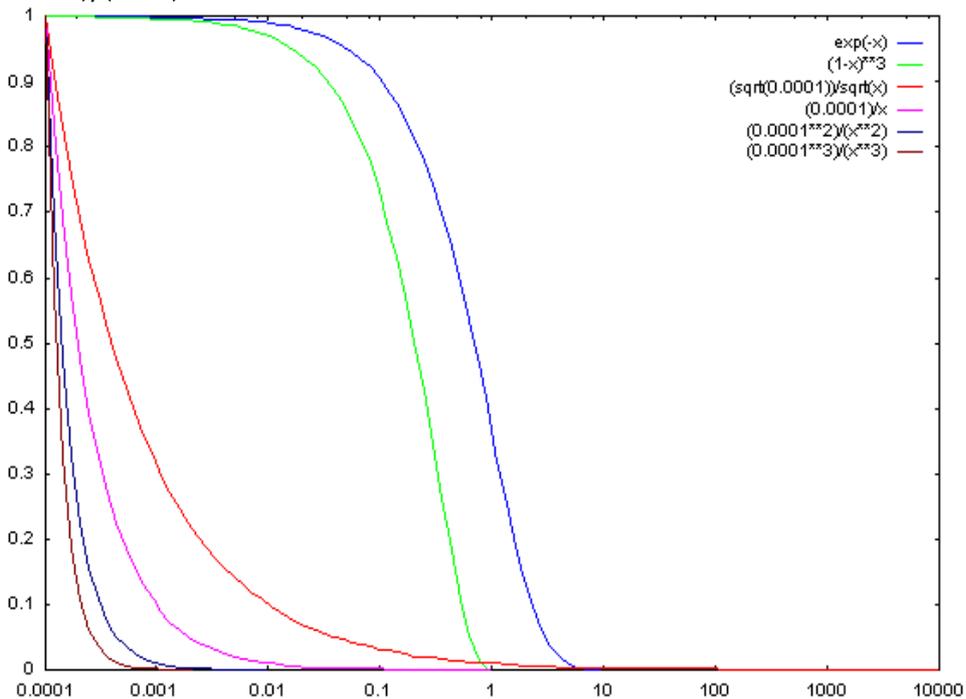
```
gnuplot> set logscale
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)
```



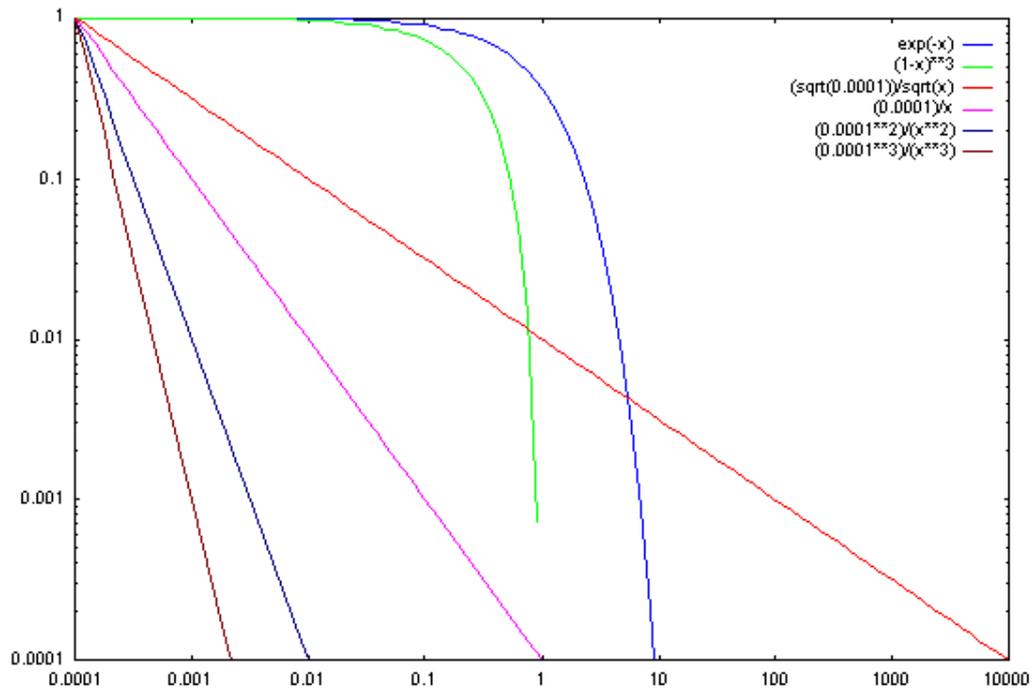
Evidenti le rette delle funzioni che seguono la “legge della potenza”. Meno evidente il fatto che  $\exp(-x)$  (e la gaussiana  $\exp(-x^2)$ ) prima o poi le taglia tutte: per vederlo, estendiamo il range:

**Decadimenti per  $x \gg 1$ :**

```
gnuplot> set xrange [0.0001:10000]
gnuplot> set logscale x
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)
```



```
gnuplot> set logscale
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)
```



20.5.2004

### Un altro punto di vista sui grafi di Watts e Strogatz:

si possono considerare cluster locali di ( $\langle k \rangle - c$ ) nodi totalmente connessi; il problema diventa connettere con una rete casuale i cluster e non i nodi, sfruttando le "c" connessioni di ogni nodo non interne al suo gruppo.

Cambiano le dimensioni:  $N$  diventa  $N/(\langle k \rangle - c)$ ; ma ogni connessione a un gruppo può essere effettuata ad uno qualunque dei suoi nodi, e quindi aumenta il grado del gruppo solamente di  $1/(\langle k \rangle - c)$

Per  $N = 6.000.000.000$

$\langle k \rangle = 23$  (quella della probabilità critica di connessione)

$c = 3$ ; quindi nodi in un gruppo = 20

$N$  gruppi 300.000.000

$\langle k \text{ gruppi} \rangle$  di probabilità critica di connessione  $\rightarrow 19,5...$

Diam = Diam (kcrit gruppi) + 1 + 1 = 6,6 + 2 = 8,6

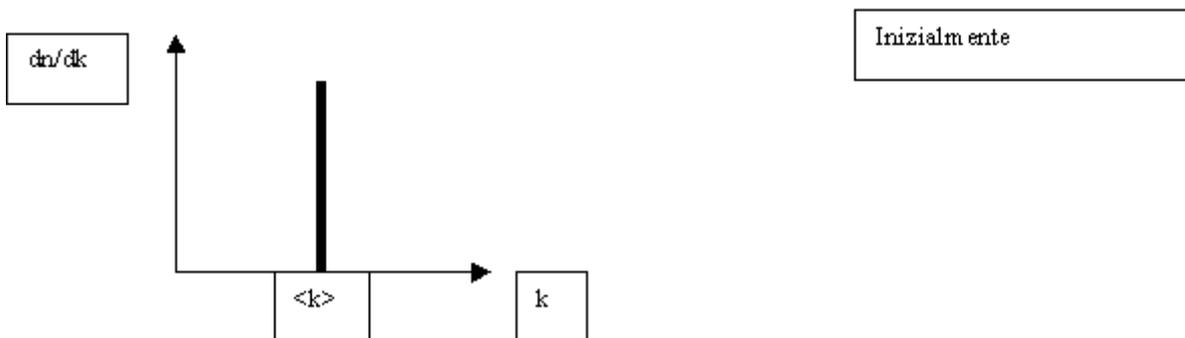
ma qui ci avanzano  $c * (k - c) = 60$  archi per ogni gruppo...

Diam = Diam (3 \* kcrit gruppi) + 1 + 1 = 4,8 + 2 = 6,8

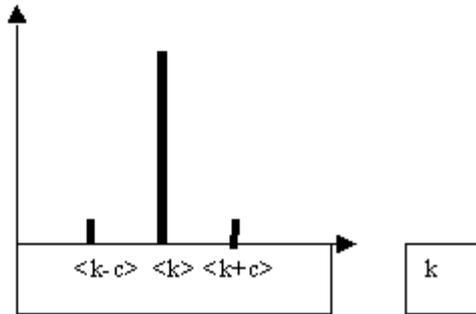
Toh, i 6 - 7 gradi di separazione...

### Distribuzioni di K

Evoluzione della distribuzione di  $k$  sulla rete ordinata con introduzione di connessioni casuali:

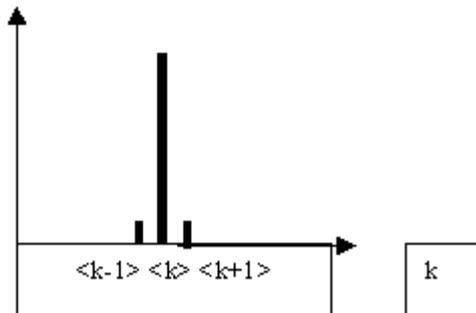


$dn/dk$



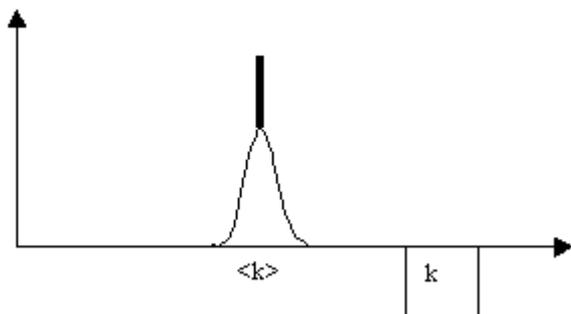
shortcuts di grafi completi

$dn/dk$

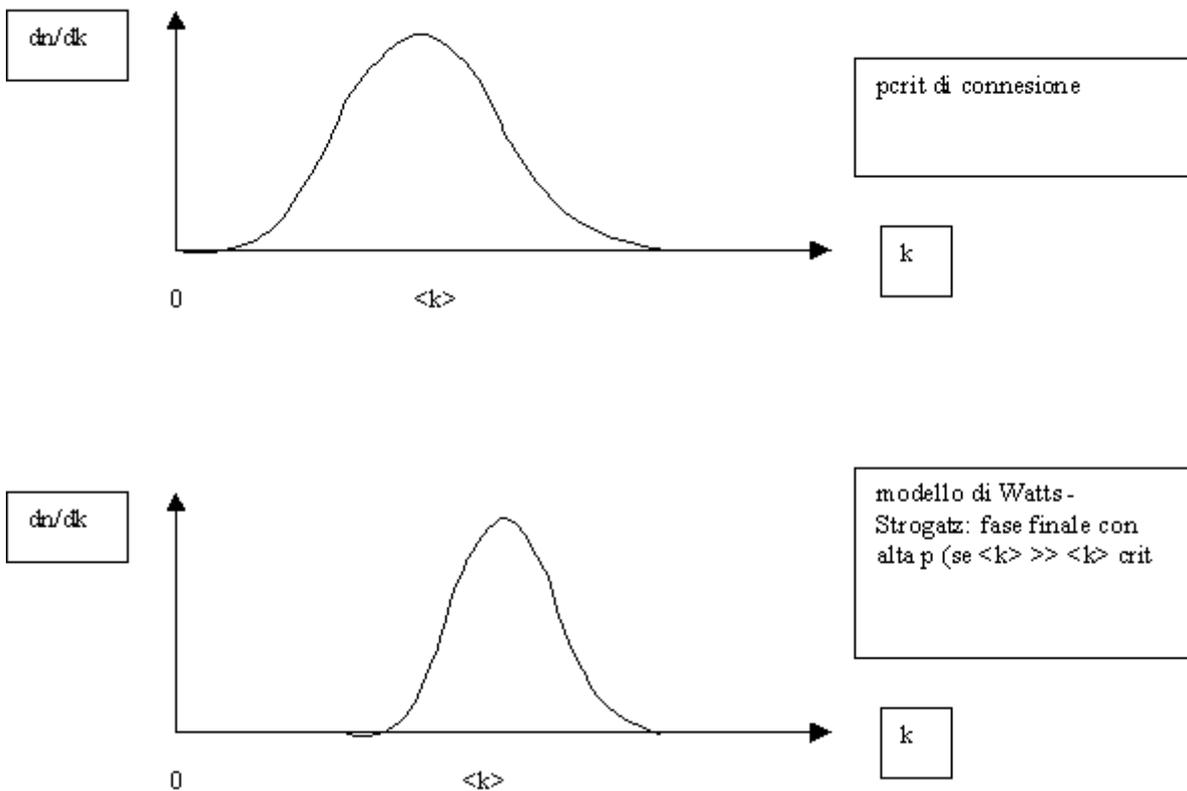


modello di Watts -  
Strogatz: fase iniziale

$dn/dk$



modello di Watts -  
Strogatz: fase finale con  
bassa  $p$



## Distribuzione di $k$ nelle reti reali...

Esaminiamo l' articolo "Classes of small-world networks" di L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy, and H. E. Stanley (distribuito in PDF)

e soprattutto i grafici log-log delle distribuzioni riscontrate nelle reti reali, alla luce degli andamenti visti con gnuplot di varie funzioni...

- rete elettrica USA: distribuzione gaussiana, come atteso dalla teoria di Watts-Strogatz
- rete dei maggiori aeroporti: come sopra
- rete delle collaborazioni fra attori: l' andamento riserva una sorpresa, visto in scala log-log ha un largo tratto rettilineo, seguendo in esso la legge della potenza ( $y=x^{-\gamma}$ )
- l' Internet e il WWW hanno un andamento ancor più rettilineo (Barabasi, vedremo)

Le reti che seguono la legge della potenza sono state dette "scale free" (prive di scala)

SIGNIFICATO:

"Scale free" è tipico delle strutture che presentano caratteristiche di AUTOSIMILARITA' (frattali)

esempi (NEXUS, pgg 113 – 122):

- bacini idrografici
- strutture molecolari generate da “attaccamento preferenziale”

## **dal 26.5.2004 in poi**

Distribuzione del grado nelle reti Internet e Web:

( Barabasi-Albert, Statistical Mechanics of Complex Networks, pgg 3-5)

Per la rete internet la distribuzione segue perfettamente la “legge della potenza”. Per la rete WEB-links in entrata, addirittura, al posto di una caduta finale esponenziale c'è una coda in cui gamma diminuisce: indice della presnza di un piccolo ma significativo numero di nodi superconnessi (al limite, un unico nodo collegato a tutti i rimanentei) detta “gelazione” (da una transizione di fase sol – gel che si ha in un caso matematicamente ananogo nei polimeri) .

Più estesamente in

Barabasi-Albert-Jeong, Scale free characteristics of random networks: the topology of the world-wide-web, pgg 69 – 73.

Per spieguare queste caratteristiche:

Modello di Barabasi-Albert: modello di accrescimento preferenziale, con P proporzionale a k

(Barabasi-Albert-Jeong, Scale free characteristics of random networks: the topology of the world-wide-web, pgg 73 – 75)

( Barabasi-Albert, Statistical Mechanics of Complex Networks, pgg 27-30)

Necessità di entrambi i fattori “accrescimento” e “preferenzialità” per l' emergere della distribuzione “scale free”

(pg 29)

Proprietà del modello Scale Free

( Barabasi-Albert, Statistical Mechanics of Complex Networks, pgg 30 – 32, paragrafi:

1 (Average path lenght, in accordo con i bassi diametri di tutte le small world networks) e  
3 (Clustering coefficient, che NON SPIEGA gli alti gradi di aggregazione delle reti sociali e delle reti Internet e Web desumibili a pg. 4 e 5.)

Vedi anche Barabasi-Albert-Jeong, the diameter of the WWW (breve comunicazione a Nature del 1999)

).

**Limiti del modello** scale free ( Statistical Mechanics of Complex Networks, pg 32, e anche Barabasi-Albert-Jeong, Scale free characteristics of random networks: the topology of the world-wide-web, pgg 75 - 77):

- non spiega alti coefficienti di aggregazione.
- predice  $\Gamma = 3$ , mentre nelle reti reali  $\Gamma$  varia da 1 a 3.
- non spiega il “cut off” esponenziale di alcune reti come quella degli attori.

Correzioni introdotte:

- $p$  dipende da  $k$  in modo non lineare (pg 32-33)
- $p$  aumenta col tempo (crescita accelerata, in accordo con misure reali, pg 34)
- inserimento di nuove connessioni (preferenziali) anche fra nodi già esistenti oltre che con i nuovi (spiega molto bene due caratteristiche della distribuzione della rete degli attori: la saturazione iniziale, e  $\Gamma$  diverso da 3 (ca 2.3). Non spiega il “cut off” esponenziale finale).
- “decadimento”, eliminazione casuale di archi esistenti con velocità inferiore all'aggiunta di nuovi. Risultati analoghi al precedente.

Più importanti: (vedi anche Nexus cap. VIII, pg 141):

- Limiti alla crescita delle connessioni di un singolo nodo (pag. 36). Spiega i “cut off” e può essere ipotizzato dovuto a vari meccanismi:
  - saturazione (costo crescente delle nuove connessioni). Spiega il cut-off esponenziale per gli aeroporti.
  - invecchiamento (attrattività dei nodi azzerata a una certa età, anche se portatori di un gran numero di connessioni (“pensionamento”)). Spiega il cut-off esponenziale per la rete di attori.

La grande assente: la distanza fisica

Applicazione pratica di tutto ciò?

Yook - Jeong – Barabasi

Modeling The Internet's Large-Scale Topology

Esistono numerosi programmi per la realizzazione di modelli di rete internet like su cui testare nuovi algoritmi di routing: l' articolo dimostra chiaramente che sono **tutti sbagliati**, per cui qualunque simulazione su di essi porterebbe a risultati errati (algoritmi efficienti scartati come inefficienti e viceversa). Come dev' essere un modello giusto, cosa resta ancora da aggiustare.

**Resistenza alla distruzione** (Nexus pg 149 sgg).

## **Sui programmi di simulazione:**

Nella specifica dell' output del secondo programma abbiamo trascurato altri due punti importanti: il coefficiente di aggregazione e la distribuzione del grado.

Calcolo del coefficiente di aggregazione medio: non presenta difficoltà. Per le reti perfettamente casuali che abbiamo simulato sinora, non è molto significativo (è praticamente sempre eguale a  $p$  "densità delle connessioni")

Calcolo della distribuzione del grado: non presenta neanche lui difficoltà algoritmiche, ma:

- va memorizzato come VETTORE
- va rappresentato come INSIEME di CURVE – cioè grafico tridimensionale.

Vedi i comandi GNUPlot necessari.....

Programma di generazione dei grafi: da scrivere in due altre versioni:

- reti "piccolo mondo" di Watts e Strogatz
- reti ad accrescimento preferenziale di Barabasi.