Tommaso Russo
A.A 2003 - 2004
Informatica IV

Programma svolto

Sintesi del programma

Questa parte del corso intende dare una panoramica sulla possibilità di condurre un' indagine scientifica utilizzando strumenti che fino a qualche decennio fa non esistevano e fino a qualche anno fa erano appannaggio di pochi laboratori particolarmente attrezzati:

- ricerche testuali sulla letteratura scientifica
- programmi di simulazione
- rappresentazione grafica dei risultati sotto diverse prospettive
- confronto con dati reali desumibili da banche dati di misure già effettuate

il test case prescelto è lo studio della genesi delle reti complesse secondo modelli che sono stati ideati negli ultimi 50 anni e sviscerati negli ultimi 6 anni:

- i grafi a connessione casuale di Erdos e Reny
- i reticoli regolari a riconnessione casuale a lunga distanza di Watts e Strogatz
- le reti ad accrescimento preferenziale, senza e con saturazione, di Barabasi

I parametri caratteristici delle reti generate:

- proprietà di connessione
- diametro
- grado medio e sua distribuzione

vengono esaminati per ogni modello, ri-ricavati ove possibile tramite programmi di simulazione ed analisi scritti dagli stessi studenti, e confrontati con i parametri caratteristici delle reti riscontrate nel mondo reale.

Testo di lettura:

Mark Buchanan
"NEXUS - la rivoluzionaria teoria delle reti"
Arnoldo Mondadori collana "saggi"
settembre 2003, ISBN 88-04-51251-2, euro 18.

Riferimento globale:

Reka Albert1 and Albert-Laszlo Barabasi
Statistical Mechanics of Complex Networks

reperibile a: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106096
(verrà distribuito in formato elettronico)

21.4.2004

Introduzione al problema delle reti “Piccolo Mondo”

L’ oracolo di Kevin Bacon: http://www.cs.virginia.edu/oracle/
“Posizione privilegiata” di Kevin Bacon?
“Posizione privilegiata” di qualsiasi altro attore: http://www.cs.virginia.edu/oracle/star_links.html

Il (Mito? Leggenda metropolitana? Problema?) “six degrees of separation”

Stanley Milgram: gli esperimenti (ca 1960) (vedi NEXUS, pg 21-28)

- “Obbedienza al carnefice” (Vedi <lettura non obbligatoria> "The Perils of Obedience", 1974 by Stanley Milgram. Distribuito.)
- “la lettera persa”
- “lettere nel piccolo mondo”

Obiezioni all’ esperimento di Milgram (percentuale lettere arrivate), ripetizione dell’ esperimento in altri contesti.

Problema: quale modello può spiegare la rete “piccolo mondo”?

Prime ipotesi da parte degli studenti: propagazione delle reti di conoscenza ad albero:

- binario (non porta a 6 ma a **34** gradi di separazione)
- Ennario - N = ? Nmin = Radice sesta (6.000.000.000) = ca 43
  - cosi’ pero’ esiste UN SOLO path da me a Kevin Bacon
  - e come si fa a trovarlo? (Problema dell’ algoritmo di ricerca)
- Valori ragionevoli di conoscenti per essere umano? (50 - 100 - 200...)

Primo approccio: reti casuali

Primi richiami di teoria dei grafi (da completare in seguito)

Teoremi strani: “proprietà vera per **quasi tutti i** grafi che soddisfano a...” - definizione esatta:

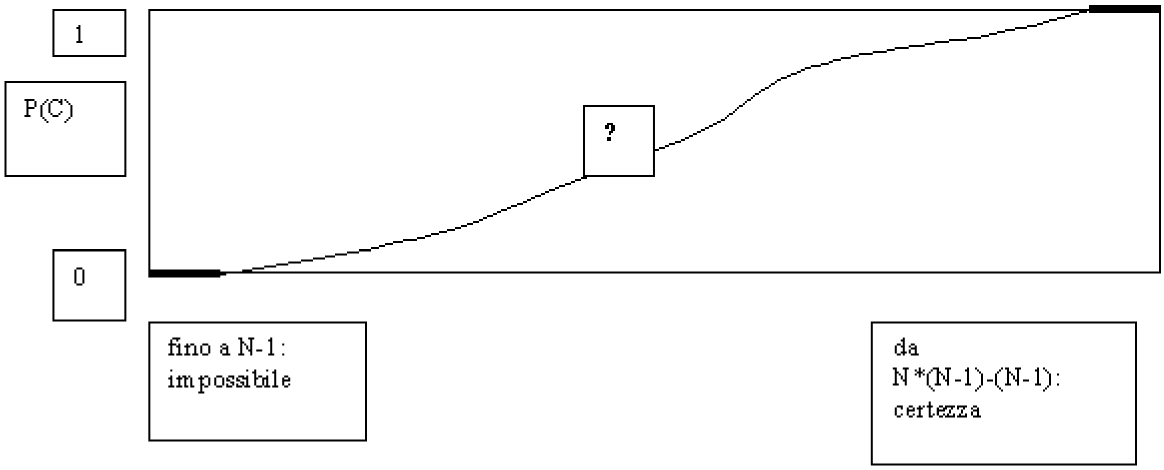
One says that ***almost every graph*** *has property Q* (in a certain model) if the probability that a graph in the model satisfies *Q* goes to 1 when *n* ?   ? (of course, in this case *p* and *M* might depend on *n*).

Matematica “sperimentale”: il limite p -> 1 per N -> infinito ci dice poco; è importante che 1-p sia trascurabile agli effetti pratici per reti di dimensione pratica. Evidenza computazionale: se già per N “piccolo” 1-p è trascurabile, allora per N grandi si può aspettarsi p = ca 1 “quasi certezza”.

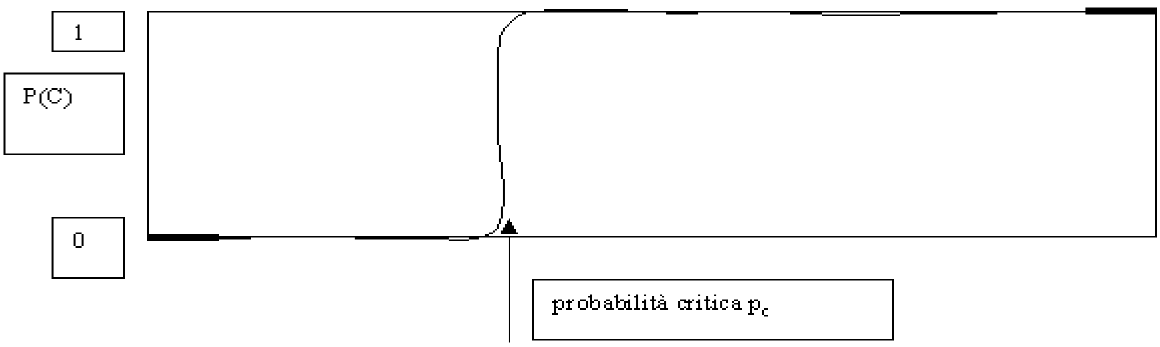
Grafo casuale di probabilità p: esistono p * N * (N-1) /2 archi fra gli N * (N-1) /2 possibili. Quand’ e’ che il grafo è connesso?

Teorema fondamentale della connessione di Erdos - Reny:

Cosa sappiamo:

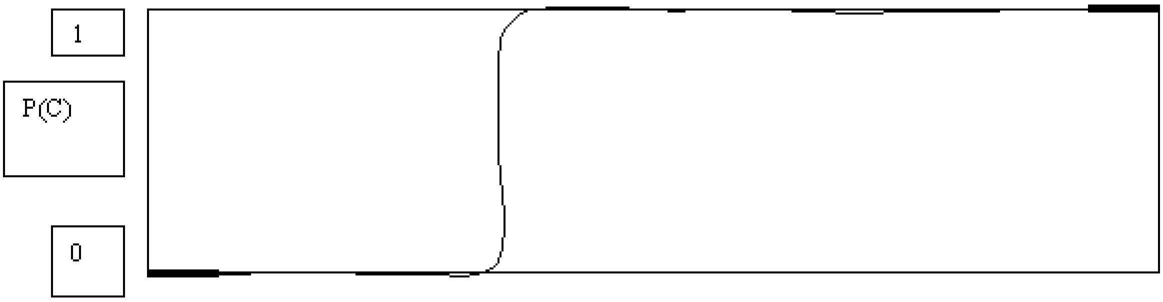


Cosa ha dimostrato Erdos:



22.4.2004

in dettaglio: la proprietà C è qui l' essere connesso, ma lo stesso andamento con diversa p_c si ha anche per altre proprietà (p.es. contenere deteminati subgrafi):



p: 0 p_c 1

n: 0 $nc = p_c\ N\ (N-1)/2$ $N\ (N-1)/2$

1. punto di flesso a $p_c = (\ln N) / N$, ossia $n_c = \ln N\ (N-1)/2$; grado totale grafo $= K_c = 2\ n_c$; grado medio dei nodi $\langle k_c \rangle = K_c / N =$ ca $\ln N = p_c\ N$

2. flesso praticamente verticale

3. P(C) trascurabile per $p < p_c$; 1 - P(C) trascurabile per $p > p_c$

Dalle formule reperibili su
Reka Albert1 and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks
pg. 13 (dimostrate nelle pagg. precedenti, dimostrazioni NON da sapere)

si ricavano le seguenti tabelle:

Probabilità critica perche' un grafo casuale risulti connesso					
N	pcrit=ln(N)/N	n max= N(N-1)/2	n = pcrit * n max	<k>= 2n/N =pcrit*N	d(p crit) = lnN/ln<k>
5	3,22E-001	10	3,218875825	1,61	3,38
10	2,30E-001	45	10,36163292	2,30	2,76
15	1,81E-001	105	18,95635141	2,71	2,72
20	1,50E-001	190	28,4594566	3,00	2,73
25	1,29E-001	300	38,6265099	3,22	2,75
50	7,82E-002	1225	95,84456363	3,91	2,87
100	4,61E-002	4950	227,9559242	4,61	3,02
1.000	6,91E-003	499500	3450,423762	6,91	3,57
10.000	9,21E-004	49995000	46047,09669	9,21	4,15
100.000	1,15E-004	4999950000	575640,5168	11,51	4,71
1.000.000	1,38E-005	5E+11	6907748,371	13,82	5,26
1.000.000.000	2,07E-008	5E+17	10361632908	20,72	6,84
6.000.000.000	3,75E-009	1,8E+19	67545075907	**22,52**	**7,23**
1.000.000.000.000	2,76E-011	5E+23	1,38155E+13	27,63	8,33

Probabilità critica perche' un grafo casuale contenga un ciclo e un componente gigante					
N	Pcrit=1/N	n max= N(N-1)/2	n = p crit * n max	<k>= 2n/N =pcrit*N	N del comp. Gig.
5	2,00E-001	10	2	1,00	2,92
10	1,00E-001	45	4,5	1,00	4,64
15	6,67E-002	105	7	1,00	6,08
20	5,00E-002	190	9,5	1,00	7,37
25	4,00E-002	300	12	1,00	8,55
50	2,00E-002	1225	24,5	1,00	13,57
100	1,00E-002	4950	49,5	1,00	21,54
1.000	1,00E-003	499500	499,5	1,00	100,00
10.000	1,00E-004	49995000	4999,5	1,00	464,16
100.000	1,00E-005	4999950000	49999,5	1,00	2154,43
1.000.000	1,00E-006	5E+11	499999,5	1,00	10000,00
1.000.000.000	1,00E-009	5E+17	499999999,5	1,00	1000000,00
6.000.000.000	1,67E-010	1,8E+19	3000000000	1,00	3301927,25
1.000.000.000.000	1,00E-012	5E+23	5E+11	1,00	100000000,00
Probabilità critica perche' un grafo casuale contenga un albero di ordine 3					
N	Pcrit=N **(-3/2)	n max=N(N-1)/2	n = pcrit * n max	<k>= 2n/N =pcrit*N	
5	8,94E-002	10	0,894427191	0,45	
10	3,16E-002	45	1,423024947	0,32	
15	1,72E-002	105	1,807392228	0,26	
20	1,12E-002	190	2,124264579	0,22	
25	8,00E-003	300	2,4	0,20	
50	2,83E-003	1225	3,464823228	0,14	
100	1,00E-003	4950	4,95	0,10	
1.000	3,16E-005	499500	15,79557691	0,03	
10.000	1,00E-006	49995000	49,995	0,01	
100.000	3,16E-008	4999950000	158,1123019	0,00	
1.000.000	1,00E-009	5E+11	499,9995	0,00	
1.000.000.000	3,16E-014	5E+17	15811,38829	0,00	
6.000.000.000	2,15E-015	1,8E+19	38729,83346	0,00	
1.000.000.000.000	1,00E-018	5E+23	500000	0,00	

Evoluzione di un grafo casuale. Fasi principali:

1- connessioni sparse, nessun albero (perchè?)
2- connessioni sparse con qua e là alberi, nessun ciclo (perchè?)
3- ciclo e componente “gigante”; accrescimento della componente gigante e assorbimento
4- grafo connesso

Importanza della componente gigante nella teoria della percolazione (cenno)
rif Reka Albert1 and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks
pg. 14 e succ., da darci un’ occhiata

I grafi casuali spiegano la struttura delle reti “piccolo mondo”?
Al contrario di quanto afferma Buchanan a pag. 27 in Nexus, sembrerebbe di si’, almeno per quanto riguarda i gradi di separazione; vedi il diametro (MAX fra i gradi di separazione calcolati) nella prima tabella.

Si consideri inoltre che:

1- “6 gradi di separazione” è dato come MEDIA (non è un diametro) ed è una misura empirica limitata, relativa alle lettere ARRIVATE nell’ esperimento di Milgram; magari quelle che hanno seguito un path più lungo si sono perse;
2- nella rete delle relazioni sociali $<k>$ è senz’ altro superiore a 23, il che corrisponde a una $p > p_c$ e quindi diametro inferiore;

Per quanto riguarda 1 - ,

I dati empirici possono essere ricavati da misure esatte di reti esistenti diverse da quella delle relazioni sociali umane: vedi lista :

Reka Albert1 and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks
pg. 8
Esaminate con attenzione le colonne relativi ai path medi, $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{l}_{real}$

Per quanto riguarda 2 - ...

28.4.2004

Probabilità critica perche' un grafo casuale risulti connesso				
N	<k>= 2n/N =pcrit*N	d(p crit) = lnN/ln<k>	d(2*pcrit)	d(3*pcrit)
5	1,609437912	3,381989195	1,376726788	1,022192
10	2,302585093	2,760785994	1,507736912	1,191417
15	2,708050201	2,718301206	1,602988372	1,292723
20	2,995732274	2,730371059	1,67327947	1,3643
25	3,218875825	2,753453576	1,72855306	1,41948
50	3,912023005	2,867937186	1,901623351	1,588531
100	4,605170186	3,015473824	2,074095657	1,753821
1.000	6,907755279	3,574249917	2,630732177	2,278842
10.000	9,210340372	4,148191314	3,161291439	2,775086
80.000	11,28978191	4,657696664	3,621949968	3,205039
1.000.000	13,81551056	5,261464354	4,162628527	3,709455
300.000.000	19,51929303	6,569048577	5,326517618	4,795877
400.000.000	19,80697511	6,633204473	5,38352783	4,849128
1.000.000.000	20,72326584	6,836525469	5,564182808	5,017899
6.000.000.000	22,51502531	7,229834018	5,913599547	5,344439
1.000.000.000.000	27,63102112	8,325257055	6,886945897	6,254827

Come si vede, aumentando la densità di connessione 2 - 3 volte (44 e 66 sono più vicini di 22 alla stima di quanti conoscenti abbia un essere umano) il diametro diminuisce, ma di poco; quello che aumenta molto è la resistenza della connettività alla distruzione di connessioni e anche di nodi (che distrugge le connessioni afferenti ai nodi e per di più diminuisce N, aumentando la probabilità critica per la connettività e quindi rendendo facile la disconnessione della parte residua del grafo in un componente gigante e tanti subgrafi piccoli).

Quindi: un grafo casuale genera una rete "piccolo mondo" con diametri ridotti e connessioni medie <k> limitate. **Domande che sorgono:**

1. possiamo fare di meglio?
2. i grafi casuali spiegano **tutte** le proprietà delle reti "piccolo mondo"?

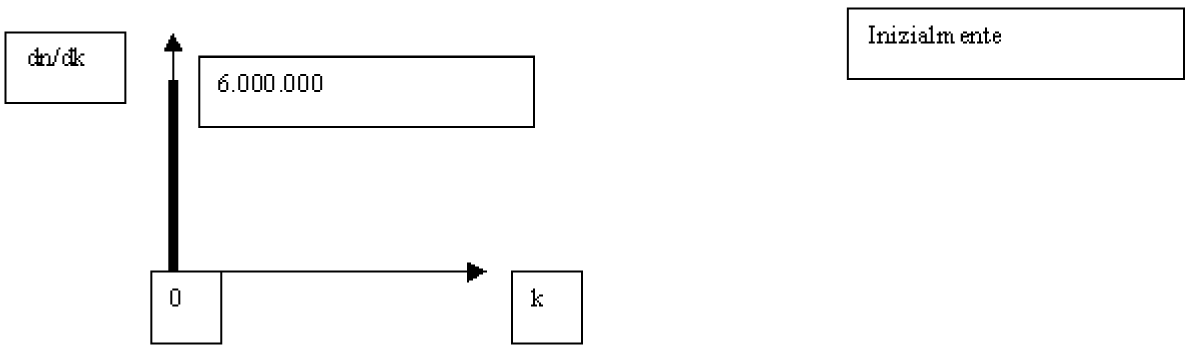
possiamo fare di meglio?

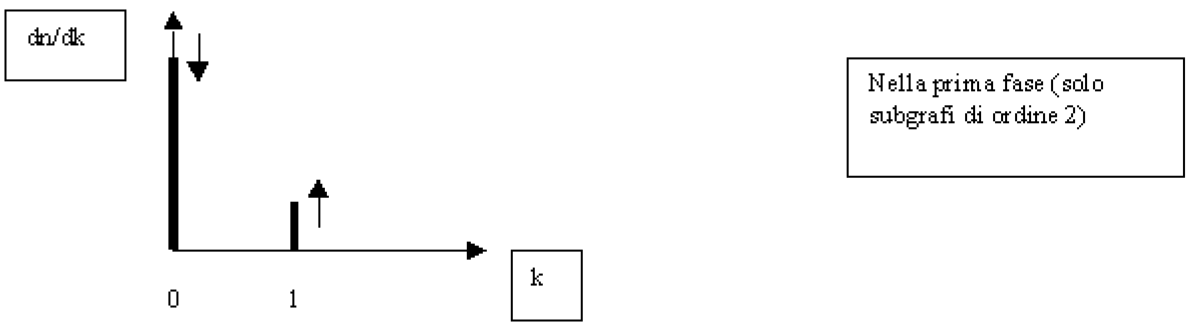
Innanzitutto: definizione di "meglio". Stella (albero a un livello) con k(radice) = 6.000.000.000 e k (foglie) = 1 dà diametro 2 e <k>=2, MA k(max) = 6.000.000.000.

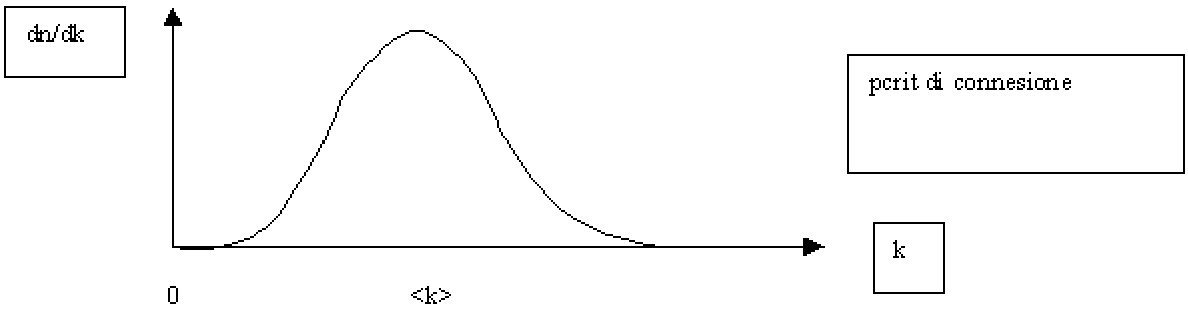
Caratteristiche desiderabili in una rete - concetto di costo di una rete (c = cammino:)

<k> <c>	se k e c sono distribuiti uniformemente o con Poisson
k(max) c(max)	se k e c hanno distribuzioni molto irregolari

Evoluzione della distribuzione di k sulla rete casuale:







(vedi Statistical Mechanics of Complex Networks, pg 12)

Ricerca di reti con k distribuito più uniformemente: si prendono in esame reti ad alto grado di regolarità

Alberi regolari d-ari di profondità p (d=numero di diramazioni ad ogni livello):

N. foglie = d^p (nodi con k = 1)
N. nodi intermedi (p -> ∞) = N. Foglie / (d - 1) (nodi con k = d + 1)
k (max) = d + 1
<k> = 2 (distribuzione di k? Problema interessante per chi voglia affrontarlo)
diametro = 2 p (distribuzione di c? Problema interessante per chi voglia affrontarlo)

Albero				
Nodi	6.000.000.000			
Diramazioni	Profondità circa	Diametro=2*profondità		Costo
			Kmax=Diram+1	
2	33	64	3	192
3	21	40	4	160
4	17	32	5	160
5	14	26	6	156
6	13	24	7	168
7	12	22	8	176
8	11	20	9	180
9	11	20	10	200
10	10	18	11	198
15	9	16	16	256
20	8	14	21	294
25	7	12	26	312
30	7	12	31	372
35	7	12	36	432
40	7	12	41	492
45	6	10	46	460
50	6	10	51	510

Ipercubi generalizzati

Ipercubi generalizzati completi				
Nodi	6.000.000.000			
Base	Dimensioni	Diametro=dim		Costo
			<k>=k(costante)	
2	33	33	33	1089
3	21	21	42	882
4	17	17	51	867
5	14	14	56	784
6	13	13	65	845
7	12	12	72	864
8	11	11	77	847
9	11	11	88	968
10	10	10	90	900
15	9	9	126	1134
20	8	8	152	1216
25	7	7	168	1176
30	7	7	203	1421
35	7	7	238	1666
40	7	7	273	1911
45	6	6	264	1584
50	6	6	294	1764

Ipercubi generalizzati NON completi (reticoli a barre)	

Nodi	6.000.000.000			
Base	Dimensioni	Diametro=(b-1) *d		Costo
			Kmax=*2Dim	
2	33	33	66	2178
3	21	42	42	1764
4	17	51	34	1734
5	14	56	28	1568
6	13	65	26	1690
7	12	72	24	1728
8	11	77	22	1694
9	11	88	22	1936
10	10	90	20	1800
15	9	126	18	2268
20	8	152	16	2432
25	7	168	14	2352
30	7	203	14	2842
35	7	238	14	3332
40	7	273	14	3822
45	6	264	12	3168
50	6	294	12	3528

La rete casuale, con il suo costo minimo = 23 * 7 = 150 ca, resta imbattuta.

Gli alberi le si avvicinano, ma con diametri sempre molto maggiori.

I grafi ad alta regolarità veramente soddisfano altri requisiti delle reti, come la simmetria => facile algoritmo di routing.

29.4.2004

I grafi casuali spiegano tutte le proprietà delle reti "piccolo mondo"?

No. Dati empirici molto diversi per
- coefficente di aggregazione (per reti piccolo mondo varia fra 0.3 e 0.75)
- distribuzione di k (vedremo meglio in seguito)

Definizione di C, coefficente di aggregazione - vedi Collective dynamics of'small-world' di networks di Duncan J. Watts* & Steven H. Strogatz, legenda alla fig. 2

coefficente di aggregazione di una rete casuale = p (densità dei collegamenti), estremamente bassa rispetto a 0.5

Coefficente di aggregazione della rete sociale mondiale? Decisamente superiore, pari a quelle delle reti piccolo mondo. Vedi in merito (sola darci un' occhiata) THE STRENGTH OF WEAK TIES: A NETWORK THEORY REVISITED di Mark Granovetter

Possibile modello che spiega Diametro piccolo e C alto:
Collective dynamics of'small-world' di networks di Duncan J. Watts* & Steven H. Strogatz, (leggerlo tutto, sapere tutto eccetto l' ultima pagina)

Spiegato anche meglio in
Reka Albert1 and Albert-Laszlo Barabasi Statistical Mechanics of Complex Networks
pgg 23 - 26, saltare "average path lenght" e "spectral properties"

12.5.2004 (una settimana saltata)

Considerazione sui risultati visti finora: leggi generali ottenute per simulazione, non per risoluzione esatta di equazioni differenziali

Essenziali strumenti di simulazione:

Excel (già usato)
GnuPlot (verrà usato, vedi seguito)
Creazione e analisi grafi?

Progetto di realizzazione tool per verifica e la riproduzione dei risultati di Erdos, Watts/Stogatz:

tool multimodulo: ultimo modulo sarà GnuPlot (e questo impatta sulla specifica del penultimo modulo)

altri moduli necessari:
1. Creazione di grafi (secondo varie leggi, sarà un modulo realizzato in diverse versioni)
2. Analisi di grafi
3. (eventualmente) riduzione di risultati ottenuti a dati plottabili

Principi fondamentali di progettazione sw:

Moduli come FILTRI, lettura da stdin e scrittura su stdout, formati Human-readable; questo permette

- la concatenazione in cascata dei moduli
- la scrittura dei risultati intermedi su memoria di massa
- l' ispezione dell' out e la creazione/modifica dell' in da parte di esseri umani

Linguaggi di programmazione usabili: anche diversi da modulo a modulo
Analisi modulo “analisi grafi”

- struttura dati per il grafo (non matrice ma liste di adiacenza)
- algoritmi di ricerca in profondità e ampiezza (preferibile). Dato l' esempio classico basato sulla “colorazione” dei nodi: inizialmente tutti bianchi, (PARTENZA ESPLORAZIONE) se ce n'è almeno uno bianco (se nessuno, algoritmo finito) si sceglie (con qualsiasi criterio, anche a caso) un nodo sorgente; il sorgente viene “ingrigito” e messo in una coda; da ogni nodo presente nella coda (PARTENDO DAL PRIMO) si trovano tutti quelli adiacenti ancora bianchi (se ce n'è almeno uno già nero o grigio c'è un ciclo), che diventano anch' essi grigi e messi nella stessa coda; finito di trovare tutti i suoi adiacenti, il nodo in esame viene “annerito” e tolto dalla coda. L' esplorazione finisce quando la coda è vuota, e allora si ritorna a PARTENZA ESPLORAZIONE (se il grafo non è connesso esistono ancora nodi bianchi, e si devono esplorare i subgrafi rimanenti).
- Modifica all' algoritmo: l' algoritmo classico esplora il grafo ma non consente di tener conto facilmente dei passi fatti dal sorgente; il fatto di considerare in sequenza i nodi della “prima frontiera”, poi quelli della “seconda frontiera” e così via è assicurato dal gestire la coda in modo FIFO, ma la “distanza dalla sorgente” è un dato che va perso. Si usano allora 4 colori, bianco, grigio chiaro, grigi scuro e nero; neri sono i nodi già visitati e di cui sono stati considerati tutti i vicini; grigio scuro i nodi dell' ultima frontiera raggiunta (all' inizio la sola sorgente), grigio chiaro i nodi della nuova frontiera in costruzione; costruita la nuova frontiera, i nodi grigio scuro diventano neri, i grigi chiari grigi scuri, e la distanza raggiunta dalla sorgente incrementata di uno. Con questo algoritmo non serve la coda (ma può venir usata perché velocizza), basta un campo “colore” nel vettore nodi.

Specifiche del formato dei file di in/ou

Output1.
Per un grafo di N nodi il file contiene N record fatti cosi':

n°nodo ; lista dei nodi connessi (separata da ',')

Esempio
Con molta fantasia propongo (F.Andrian) il grafo

```
1   ---  2  ----  4
   \    /
     3
```

Il file di output dovra' essere il seguente
1;2,3
2;1,3,4
3;1,2
4;2

Output2.
Si puo' calcolare con "L'algoritmo a priorita' di ampiezza"

E' del tipo

NS;N1,Nc1;N2,Nc2 .....

NS = numero di sottografi
Nx = numero di nodi del sottografo x
Ncx = numero di connessioni del sottografo x

Se il grafo e' connesso abbiamo un solo sottografo (NS=1) da specificare.

Dal grafo di esempio visto sopra otteniamo
1;4,4

13.5.2004

Nella specifica dell' output del secondo programma abbiamo trascurato un punto importante: il DIAMETRO

Come si calcola il diametro del grafo esplorato (se era connesso)?

Il numero di passi effettuto per l' esplorazione è indicativo (numero passi <= diametro <= 2*(numero passi)) e con grafi casuali si avrà quasi sempre diametro “poco>” numero passi, ma per calcolarlo con esattezza non c'è verso, bisogna ri-esplorare il grafo nnodi-1 volte prendendo come sorgente ogni nodo a turno (in realtà l' ultimo nodo si può saltare, ma non è un gran guadagno). Il massimo dei numeri passi effettuati sarà allora il diametro.

Se il grafo NON è connesso, per convenzione si usa dire che il suo diametro è il diametro della sua maggior componente connessa. E' un numero che non ha nessun interesse, possiamo evitare di calcolarlo e dire che per un grafo non connesso il diametro è infinito.

Torniamo alle reti “piccolo mondo” di Watts e Strogatz:

Punti notevoli:

W & S non disponevano di alcuna formula analitica per calcolare C(p) e diametro(p);

solo in seguito altri ricercatori hanno determinato che dev’ essere circa

C(p) = ~ C(0) * (1-p) ^ 3
(Statistical Mechanics of Complex Networks, pg 26)
Diam(p) = ~ > Diam (0) / sqrt (2 * p * <k> * Nnodi) (per p lontane da 1)

(**Esempio dei grafi di shortcut completi**): posto nc = n. nodi che partecipano ai shortcut, Nc numero di corrispondenti connessioni "casuali", è

diam (Nc) = ~ 1 + diam (0) / nc

con Nc = nc(nc-1)/2 =~ nc*nc/2 nc = sqrt(2*Nc)

==> intuizione, verifica solo numerica con selezione casi via Montecarlo;

Il plot di C(p) e Diam (p) su scala lineare non dà indicazioni immediate: le due curve precipitano entrambe a valori molto bassi per poi mantenersi basse fino a p=1, a una prima vista potevano convalidare l' ipotesi che D e Diam procedessero di conserva, alti C corrispondenti ad alti Diam e viceversa; le differenza è data dagli andamenti per p basse delle due curve

Per apprezzare la differenza bisognava effettuare uno **zoom sui p bassi**, cosa che risulta automatica utilizzando per p una scala logaritmica x=Log p p = 10^x (p=0 va fuori scala, p=1 corrisponde a x=0) il plot si fa per valori negativi di x 0, -1, -2 ... corrispondenti a p= 1, 0.1, 0.001 eccetera. In questo caso, y rimane lineare in C e Diam

Passando da scala lineare a scala logaritmica molte cose appaiono più chiare.

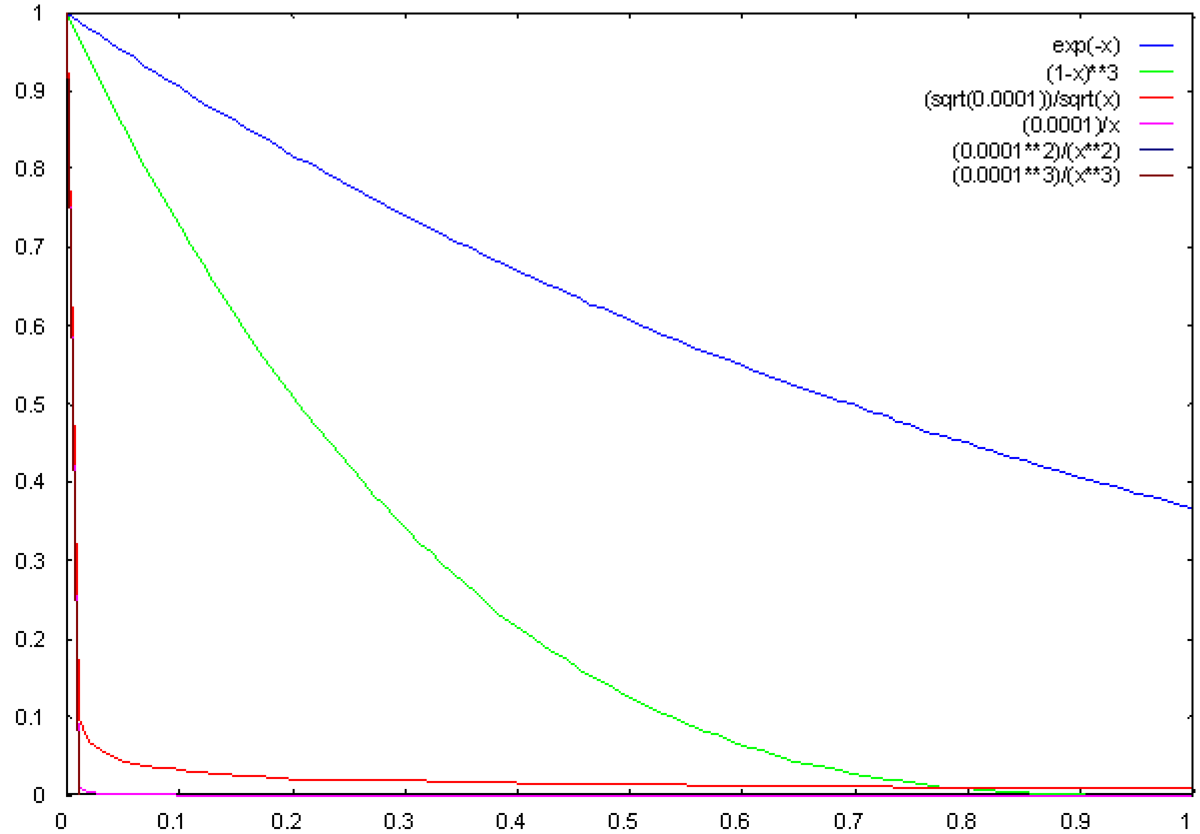
Cosa accade ponendo anche y=Log C/C(0) e y=Log Diam/Diam(0) ?

Si Zooma anche sulla parte bassa di C e Diam; ln(Diam(ln p)) diventa una retta discendente con pendenza 1/2; l' altra curva rimane con curvatura verso il basso perché non è in p ma in (1-p).

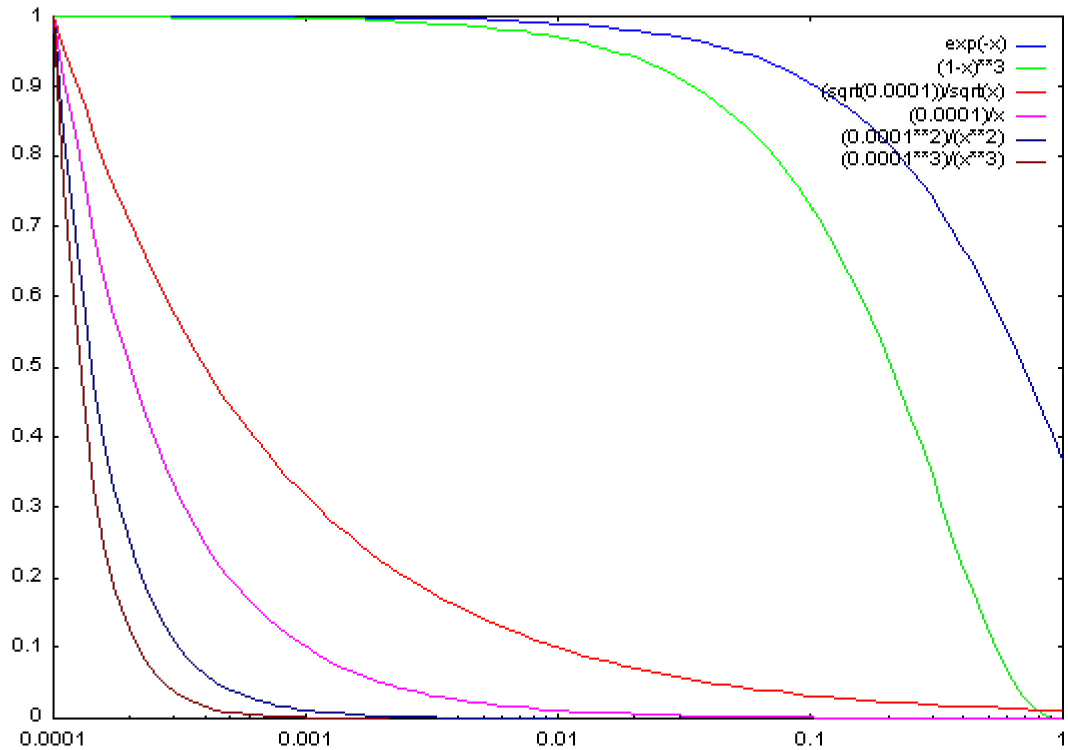
Piccolo corso sull' uso di gnuplot, semplice e potente strumento d' indagine...
plot
set range
set logscale
set range se logscale

Vediamo alcune tipiche "curve di decadimento" in scala lineare, x logaritmica, x e y logaritmiche:

gnuplot> set xrange [0.0001:1]
gnuplot> set yrange [0.0001:1]
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)

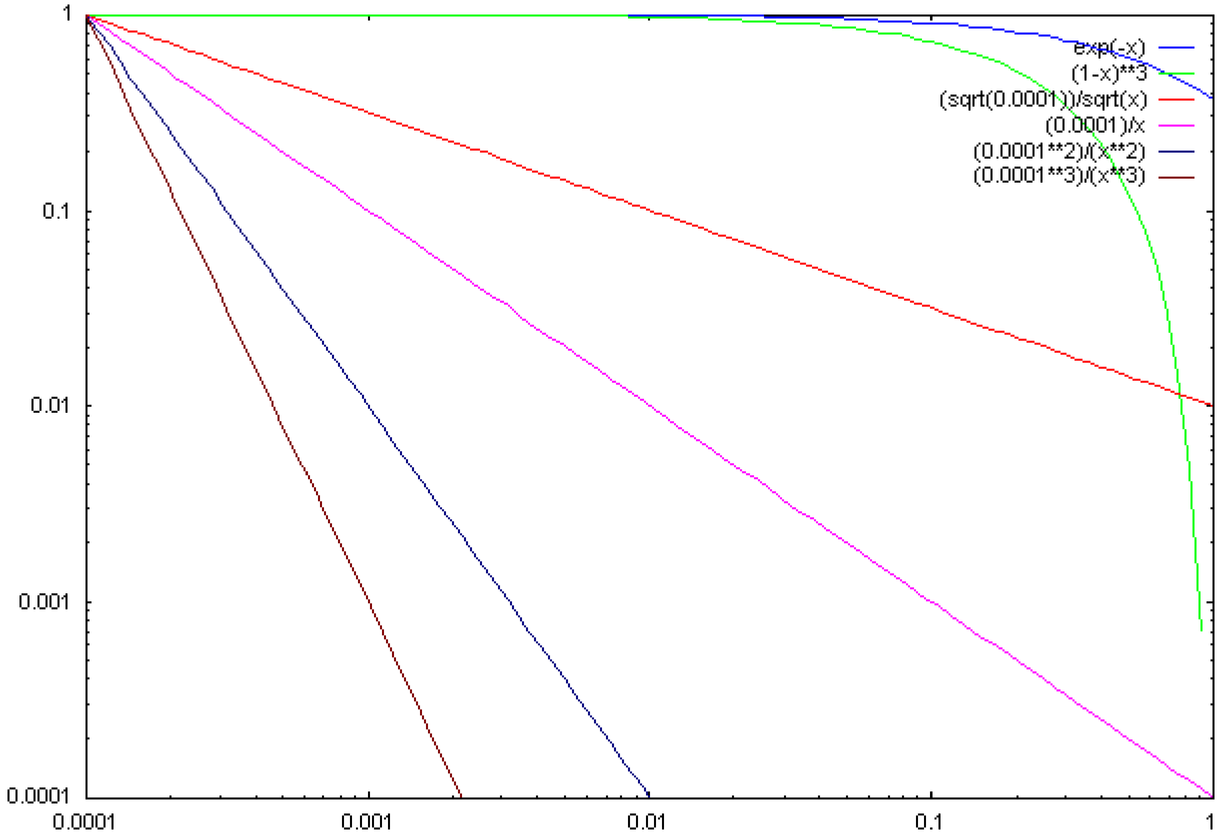


gnuplot> set logscale x
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)



Ecco come Watts e Strogatz hanno evidenziato lo scarto fra l' andamento di diam(p) e di C(p)!

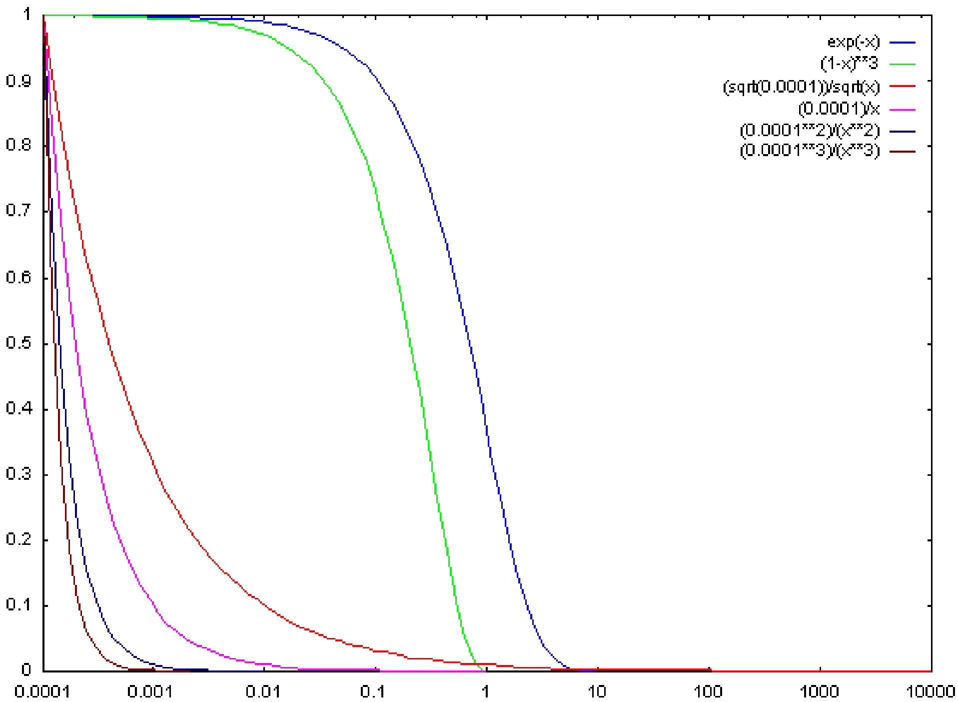
gnuplot> set logscale
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)



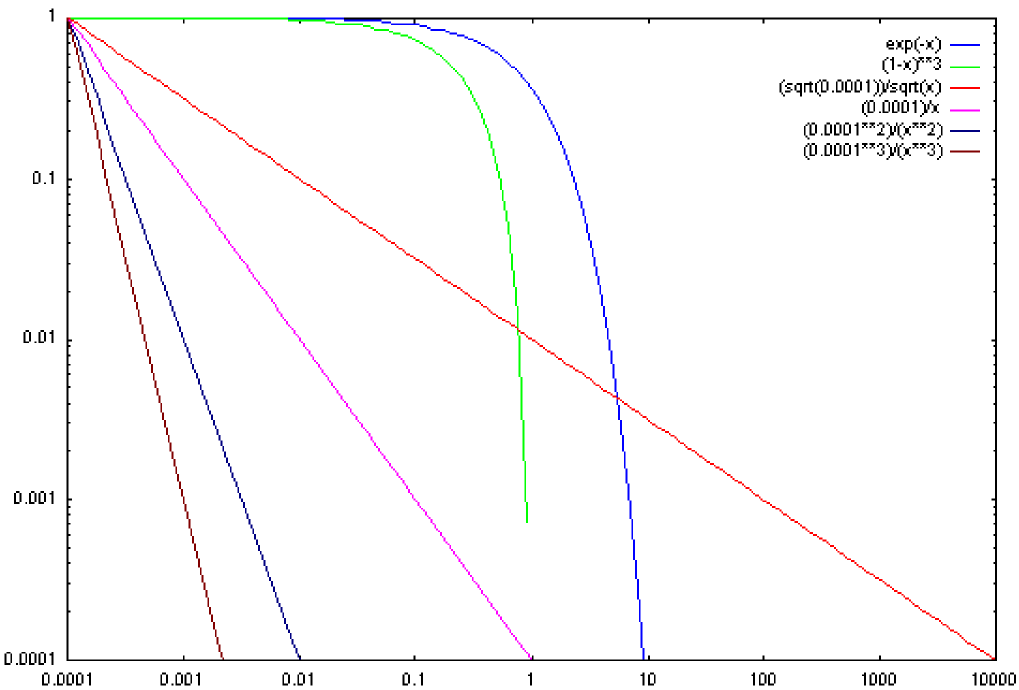
Evidenti le rette delle funzioni che seguono la "legge della potenza". Meno evidente il fatto che exp(-x)(e la gaussiana exp(-x2)) prima o poi le taglia tutte: per vederlo, estendiamo il range:**

Decadimenti per x >> 1:

gnuplot> set xrange [0.0001:10000]
gnuplot> set logscale x
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)



gnuplot> set logscale
gnuplot> plot exp(-x), (1-x)**3, (sqrt(0.0001))/sqrt(x), (0.0001)/x, (0.0001**2)
/(x**2), (0.0001**3)/(x**3)



Ancora da fare

Un altro punto di vista sui grafi di Watts e Strogatz:

si possono considerare cluster locali di (<k> - c) nodi totalmente connessi; il problema diventa connettere con una rete casuale i cluster e non i nodi, sfruttando le “c” connessioni di ogni nodo non interne al suo gruppo.

Cambiano le dimensioni: N diventa N/(<k>-c); ma ogni connessione a un gruppo può essere effettuata ad uno qualunque dei suoi nodi, e quindi aumenta il grado del gruppo solamente di 1/(<k>-c)

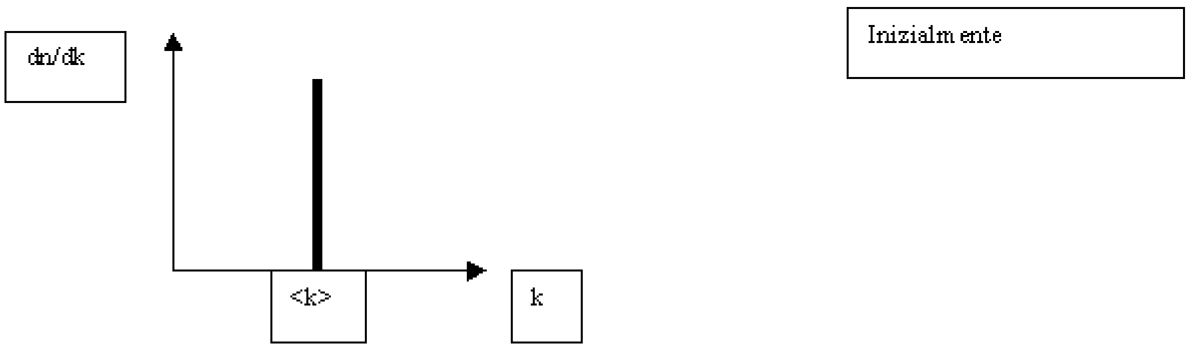
Per N = 6.000.000.000
<k> = 23 (quella della probabilità critica di connessione)
c = 3; quindi nodi in un gruppo = 20
N gruppi 300.000.000
<k gruppi> di probabilità critica di connessione -> 19,5...
Diam = Diam (kcrit gruppi) + 1 + 1 = 6,6 + 2 = 8,6

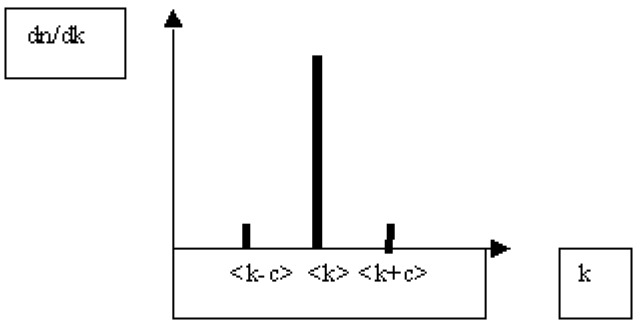
ma qui ci avanzano c * (k-c) = 60 archi per ogni gruppo...
Diam = Diam (3 * kcrit gruppi) + 1 + 1 = 4,8 + 2 = 6,8

Toh, i 6 - 7 gradi di separazione...

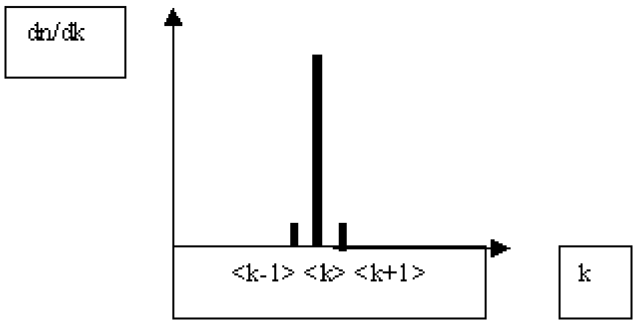
Distribuzioni di K

Evoluzione della distribuzione di k sulla rete ordinata con introduzione di connessioni casuali:

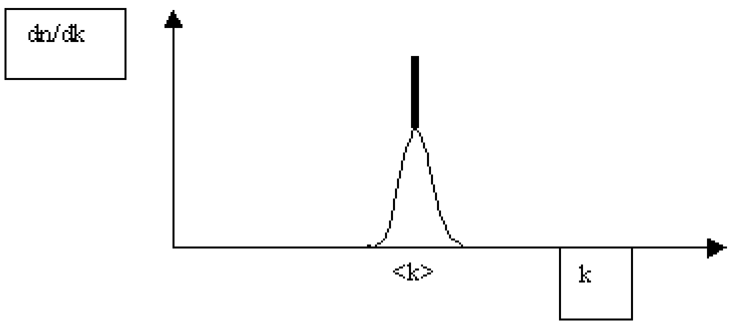




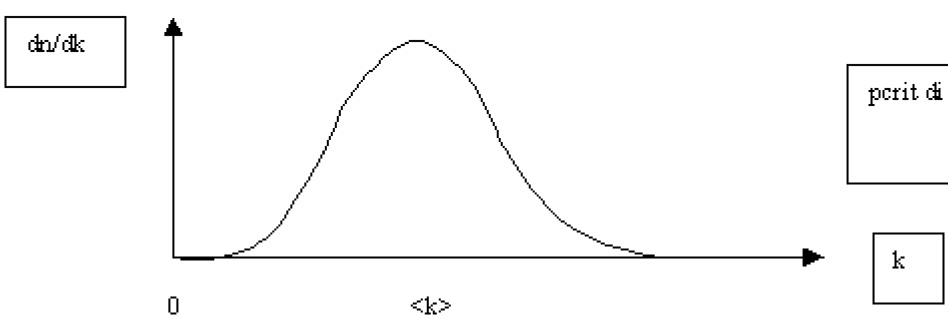
shortcuts di grafi completi



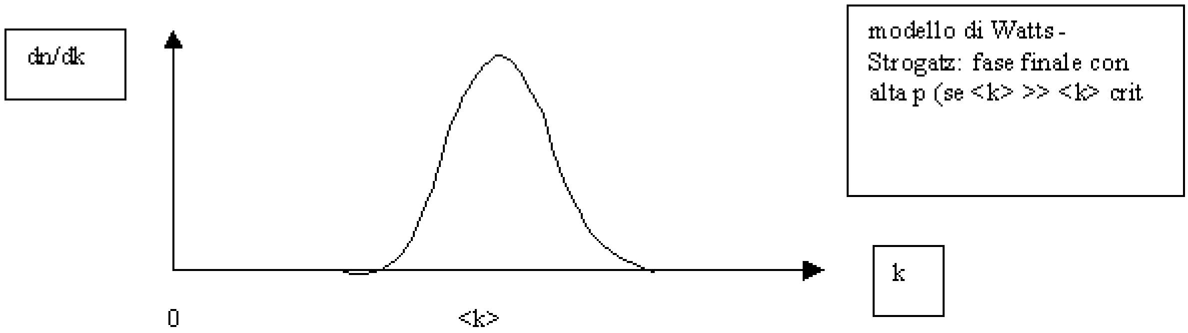
modello di Watts-Strogatz: fase iniziale



modello di Watts-Strogatz: fase finale con bassa p



pcrit di connesione



Distribuzione di k nelle reti reali...

Esaminiamo l' articolo "**Classes of small-world networks" di L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy, and H. E. Stanley** (distribuito in PDF)

e soprattutto i grafici log-log delle disribuzioniriscontrate nelle reti reali, alla luce degli andamenti visti con gnuplot di varie funzioni...