



## LEZIONE 4

### Come e perché il moto dei proiettili

Oggi vorrei iniziare riprendendo le considerazioni che abbiamo fatto la volta scorsa sul moto dei proiettili, ma presentandole in forma di traccia didattica.

In primo luogo, penso sia meglio, quando si comincia, non tirare subito in ballo più rif. La cosa abituale, nella pratica didattica corrente, è farli entrare in maniera surrettizia. Si dice: il corpo si muove come se in un altro rif. cadesse in verticale; ma questo può essere un modo di confondere le idee. Non si deve dare già per scontato che ci sia quest'equivalenza di rif.: se mai l'equivalenza dovrà essere il risultato dei nostri ragionamenti.

All'inizio io sto sulla Terra. Voglio capire come si muovono le cose lanciate per aria. Supponiamo di aver imparato, come primo passo, come si muove una cosa che cade in verticale. Abbiamo dunque scoperto che la caduta verticale dei gravi è un moto uniformemente accelerato, con accelerazione costante. A questo proposito mi viene in mente che se si leggono i *Discorsi intorno a due Nuove Scienze* si trova, nel ragionamento di Galileo, una cosa che è incredibilmente moderna. A dire il vero secondo me di cose del genere nei libri di Galileo ce ne sono tante; forse non sono mai stati letti con sufficiente attenzione, per cui è ancora possibile fare delle scoperte.

Che non siano stati letti con grande attenzione, credo si possa spiegare così. Si tratta di classici della storia della scienza, quindi sono più patrimonio di storici e filosofi della scienza che non dei fisici: i fisici si occupano di altre cose. Però per capire quello che ci può essere d'importante dal punto di vista della fisica, ci vuole un fisico. Se chi legge non è un fisico, molte cose possono sfuggirgli.

Ecco l'esempio che dicevo: in quel libro Galileo tratta in primo luogo l'aspetto matematico del moto uniformemente accelerato. Dice: supponiamo che un corpo abbia accelerazione costante, vediamo come si muove. Dimostra che la velocità cresce proporzionalmente al tempo, lo spostamento è proporzionale al quadrato del tempo... A questo fa seguire una serie di teoremi, con le loro brave dimostrazioni, corollari, ecc. Poi a un certo punto dice: ora dobbiamo vedere se le cose vanno così: se i gravi che cadono in natura seguono o no questo tipo di moto. Potrebbe darsi di sì, potrebbe darsi di no.

Tant'è vero che Galileo usa a questo proposito due termini diversi: parla di moto *uniformemente* accelerato (il suo termine è "equabilmente") per il discorso matematico; poi parla di moto *naturalmente* accelerato per la legge fisica di caduta dei gravi. Non è dato sapere a priori se sono la stessa cosa o no: per dire che il moto reale dei gravi nel mondo fisico segue le leggi matematiche del moto accelerato, ci vogliono risultati sperimentali.

Ora questo è un modo di ragionare estremamente moderno: si fa un'ipotesi, se ne sviluppano le conseguenze per via matematica, e poi con l'esperimento si raccolgono i dati che ci daranno o no la conferma della teoria che abbiamo costruito.

### L'accelerazione è sempre costante!

Dopo aver verificato sperimentalmente che un grave che cade in verticale si muove di moto uniformemente accelerato, si scopre un altro fatto sperimentale. Se un grave non parte da fermo, ma parte con una velocità iniziale diversa da zero e comunque diretta, il suo moto è quello che vediamo in fig. 4-1. Basta aggiungere vettorialmente, al moto di caduta che il grave avrebbe se partisse da fermo, lo spostamento che farebbe nello stesso tempo con la sua velocità iniziale:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2. \quad (4-1)$$

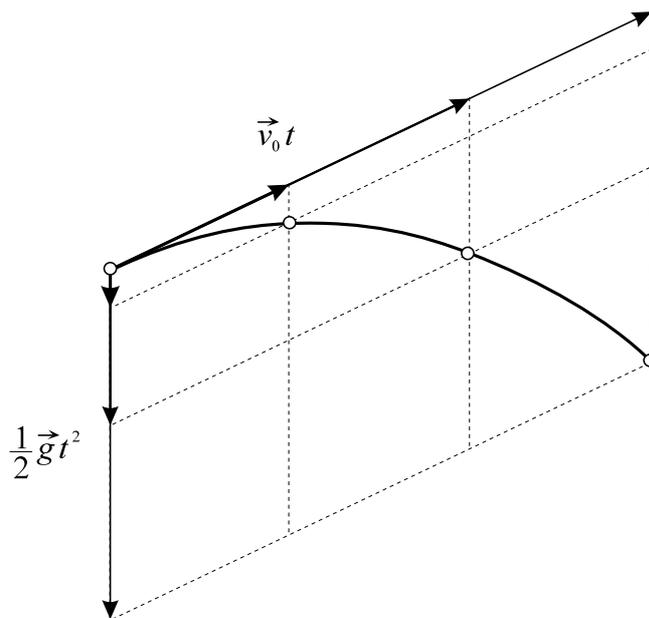


fig. 4-1

Ripeto: questo lo si vede come fatto sperimentale. Ci sono, come sapete, vari modi didatticamente efficaci per farlo vedere.

Ma l'importante è che venga presentato come un fatto sperimentale. L'esperienza ci mostra che così succede; non che così doveva succedere, che è naturale, che è ovvio, che si può dimostrare, o cose del genere. Perché *non è naturale, non è ovvio, e non si può dimostrare*: potrebbe benissimo muoversi in maniera diversa. Dal fatto che un grave che cade da fermo si muove di moto uniformemente accelerato non segue niente, di per sé, su come si deve muovere se gli do una velocità iniziale.

A meno che, naturalmente, io non sappia già qualcosa. Certo, se so già

che il secondo principio della dinamica è una legge lineare, e se so già che la forza di gravità non dipende dalla velocità (per cui è la stessa anche se il corpo si muove con qualunque velocità) allora lo dimostro. Ma Galileo questo non lo sapeva. Notate tra l'altro che Galileo non parla mai di forza di gravità. Ma anche in un insegnamento moderno, quello che mi sembra importante è far vedere che la (4-1) è un fatto sperimentale.

A questo punto, dalla (4-1) imparo che l'accelerazione è sempre uguale a  $\vec{g}$ , anche con una certa velocità iniziale. Per qualunque corpo, per qualunque moto, con qualunque velocità, l'accelerazione dovuta alla gravità è sempre  $9.8 \text{ m/s}^2$  in verticale. È facile capirlo dalla (4-1), perché il primo termine è un moto senza accelerazione, quindi per l'accelerazione conta solo il secondo termine; ma questo è proprio il moto verticale, del quale so già che ha un'accelerazione diretta verso il basso, costante.

Abbiamo così imparato dall'esperienza che l'accelerazione dei gravi, comunque si muovano (e trascurando l'aria), è sempre la stessa. L'accelerazione non dipende dalle condizioni iniziali, dalla velocità, dalla traiettoria, ecc.

Devo confessare che sono incerto su un punto: non sono sicuro che sia opportuno trattare fin dall'inizio il problema con velocità iniziale qualunque. Potrebbe essere meglio cominciare con velocità orizzontale. Per chi abbia familiarità con l'algebra lineare, sommare due vettori ad angolo qualunque non è diverso dal sommare due vettori ortogonali. Solo che sommare due vettori ortogonali consente di associarli alle coordinate, agli assi cartesiani; argomento più familiare per i principianti.

D'altra parte, c'è anche il rovescio della medaglia: i vettori ortogonali sono solo un caso particolare, e bisogna evitare che lo si consideri l'unico caso in cui ha senso sommare vettori. Ecco perché non sono sicuro.

### Cambiamo riferimento

A parte questo, il moto con  $\vec{v}_0$  orizzontale è importante perché ci presenta una situazione particolarmente significativa dal punto di vista fisico, che ora voglio discutere. Il punto è che in questo caso riesce naturale introdurre due diversi rif.

Infatti possiamo dire: abbiamo imparato che un grave lanciato orizzontalmente si muove in modo tale che la componente orizzontale del moto e quella verticale si sommano semplicemente; ma allora, se ci mettiamo a guardare le cose da un carretto che si muove in orizzontale con la stessa velocità iniziale del grave, in questo rif. la velocità iniziale del

grave non c'è più, e si torna al moto verticale dal quale eravamo partiti all'inizio. Visto che la velocità orizzontale del grave resta costante, se guardo da un rif. che si muove a questa velocità costante  $\vec{v}_0$ , io acompagno il proiettile, che quindi dal mio punto di vista si muove in verticale.

Ne ricavo che in un rif. con velocità  $\vec{v}_0$  il proiettile cade verticalmente. Ossia (il punto importante è quello che viene adesso) si muove come un proiettile che cade da fermo in un rif. fermo. (È proprio vero? V. problema 1.)

Ho dunque due situazioni. La situazione A è la prima che abbiamo vista. Ho la velocità iniziale  $\vec{v}_0$  e la legge oraria (4-1): questo nel rif. fisso che chiamerò K. Poi ho la situazione B, nel rif. K' del carrello, che viaggia con la velocità  $\vec{v}_0$  uguale a quella iniziale del proiettile: in K' il proiettile cade lungo la verticale. Ma questo è esattamente il moto col quale cadrebbe il grave in K se io l'avessi lasciato cadere con velocità nulla!

Scopro così che il moto di un grave con velocità iniziale  $\vec{v}_0$  in un rif. K, se osservato dal rif. K' è uguale al moto in K di un grave che cade da fermo. Dunque se io sono dentro il vagone di un treno e lascio cadere una cosa, quella mi cade ai piedi, anche se il vagone è in movimento.

Non è ovvio affatto che così dovesse essere: pensate la fatica che ha fatto Galileo per farlo accettare. Ma anche oggi non è ovvio. Provate a fare questa domanda: io sono in un treno che viaggia su un binario liscio, senza scosse; lascio cadere una palla. Come cade? Provate a vedere se vi diranno tutti che cade verticalmente, o no. Una certa frazione dirà che rimane indietro; o avrete altre risposte, anche un po' strane. Sto dicendo, in poche parole, che il PR di Galileo non è ancora entrato nel senso comune.

Presentato nel modo che vi ho detto, si tratta di una scoperta: se sto dentro il vagone del treno, per quanto riguarda la caduta dei gravi non mi accorgo che il treno cammina. Questo è esattamente il discorso del vascello, che si trova nel *Dialogo*: è un esempio del PR. È solo un esempio, perché il PR è un fatto generale, non vale solo per il moto dei gravi.

Arrivati qui, bisogna sottolineare che questa proprietà, che in un RI (un vagone in moto, una nave che cammina) i moti si svolgono come quando è fermo, intanto non è scoperta da poco; e poi, che da essa derivano innumerevoli conseguenze. La possiamo quindi considerare come una delle leggi fondamentali della fisica.

## Il moto dei proiettili e la relatività

Ho insistito su questo perché ritengo cruciale distinguere bene tra quello che si sa, quello che si può ricavare dall'esperimento, quello che si può dimostrare.

Invece il mio timore è che i testi non facciano sempre chiarezza a tale proposito. Vi invito a controllare se viene ben chiarito che cosa si dimostra, che cosa si ricava dagli esperimenti, che cosa è ovvio, che cosa non lo è. Perché ci possono essere cose che sono ben note, ma non sono ovvie. Bisogna ragionare attentamente, non si può dire "si capisce, dev'essere per forza così." Tant'è vero che Simplicio dice: "è ovvio che la pietra lasciata cadere dall'albero della nave rimarrà indietro," anche se i fatti parlano contro di lui. Per lui è ovvio, nel senso che così dicono i libri dove ha studiato. Ha quindi buon gioco Galileo nel chiedergli: "avete voi fatta mai l'esperienza della nave?"

Notate che tutto questo discorso non ha di per sé a che fare con l'insegnamento della relatività. Se però si ha in programma di arrivare alla relatività, allora è assolutamente fondamentale che anche il moto dei proiettili sia stato fatto nel modo giusto. Tra l'altro, l'obiettivo d'insegnare la relatività dà una motivazione per affrontare l'argomento in modo corretto. La relatività si basa in modo essenziale su queste cose, non è un pezzo a sé della fisica, un capitolo nuovo. Quindi bisogna pensare bene a come s'insegna: si richiede una diversa consapevolezza.

Di più: il tema della lezione di oggi è che niente impedisce di cominciare a parlare con linguaggio relativistico, cioè con linguaggio moderno, fin dall'inizio. Si può benissimo,

fin dalla terza secondo i programmi attuali, cominciare a presentare alcuni aspetti della relatività. Non ci sono, a mio parere, nemmeno delle serie difficoltà di base. Trovo che sarebbe anche utile spiegare ai ragazzi che capire i moti relativi e la caduta dei gravi è un passo necessario per avvicinarsi a quella cosa affascinante e grandiosa che prende il nome di relatività.

## Galileo e il PR

Ho già ricordato la volta scorsa a che scopo servisse a Galileo il PR. Gli serviva per far vedere che il sistema copernicano non veniva messo in discussione, non era contestato da certe apparenze: dal fatto che un sasso che cade da una torre non resta indietro, che l'aria non sfugge, ecc.

Vediamo ora come si formula il PR galileiano. Il principio è espresso in quella pagina famosa dei *Massimi Sistemi* che tutti conoscete: un lungo discorso, in cui con diversi esempi si afferma che dentro la nave non ci si può accorgere se la nave cammina. Il PR non ha un enunciato stringato: c'è tutta una conversazione sul tema.

Volendolo esprimere in termini moderni, si può dare un enunciato che anche se più sofisticato contiene esattamente quello che Galileo dice.

*Nessun esperimento consente di distinguere due rif. il cui moto relativo è traslatorio rettilineo uniforme.*

Questa è una generalizzazione, perché si parla di moto traslatorio rettilineo uniforme qualunque, quindi non solo orizzontale; mentre una nave è in moto orizzontale. Infatti sappiamo che il PR vale anche se il moto relativo è verticale o in qualsiasi direzione: basta che sia uniforme.

Ho detto, non a caso: *nessun* esperimento. Ne riparleremo, però fin d'ora richiamo la vostra attenzione su questo particolare.

Si può formulare il PR in modo un po' diverso:

*Tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi in due rif. che si muovono di moto traslatorio rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.*

È quasi la stessa cosa, però c'è una differenza che poi vedremo. E ora la terza formulazione:

*Nel passaggio da un rif. a un altro che si muova rispetto al primo di moto traslatorio rettilineo uniforme, tutte le leggi fisiche sono invarianti.*

Come contenuto, sto dicendo sempre la stessa cosa; ma le tre formulazioni differiscono per un linguaggio successivamente più astratto. E questo merita attenzione. Una formulazione sarà più adeguata di un'altra a seconda del livello di studi, di preparazione, del tipo di allievi, del tipo di scuola.

La prima, che è la formulazione galileiana in senso proprio, è secondo me accessibile anche agli alunni delle terze. Ragazzi di 16 anni sono in grado di capire questo. Tu stai dentro una nave, o dentro un vagone ferroviario, o dentro un'astronave, quel che ti pare. Bene: se la nave o l'astronave si muove di moto rettilineo uniforme, non te ne accorgi.

È chiaro che quando dico "tu" mi riferisco all'osservatore. Ma il significato prescinde dagli osservatori (li abbiamo pensionati, ricordate?): facciamo degli esperimenti fisici dentro un vagone ferroviario, o dentro una macchina che va con direzione e velocità costante; tutto va come se vagone o macchina fossero fermi.

Nel secondo enunciato introduco la parola "leggi": "tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi." Con questo aggiungo un'astrazione. Bisogna che il lettore abbia chiaro che cosa significa "legge."

Che cosa vuol dire che in due riferimenti valgono le stesse leggi? La legge fisica è un'astrazione: non è il risultato di un esperimento, ma riassume tutta una serie di esperimenti: secondo principio della dinamica, conservazione dell'energia, teorema di Gauss

del campo elettrico, quello che preferite... Tutti questi enunciati generali della fisica non sono risultati diretti di un esperimento: sono la sintesi di una serie di esperimenti, realmente eseguiti o possibili. Quindi capire cosa sia una legge fisica significa aver fatto un certo passo verso una conoscenza astratta, rispetto alla visione immediata: faccio un esperimento e guardo il risultato. Ecco perché il secondo enunciato è accessibile a un livello di maturità superiore, mentre non va bene all'inizio.

Col terzo, peggio ancora. Perché qui non solo si parla di leggi, ma si parla di "invarianza delle leggi fisiche." S'introduce il concetto di *trasformazione delle leggi fisiche* in conseguenza di qualche operazione: nel nostro caso di un cambiamento di rif. Questo mi sembra un linguaggio adatto solo al livello universitario, e forse nemmeno al primo anno.

Ho voluto sottolineare questo tipo di problemi, e il fatto che all'inizio bisogna fermarsi al primo enunciato, per farvi vedere come basti cambiare qualche parola, anche se il contenuto è proprio lo stesso, perché si modifichi la proponibilità didattica, si pongano difficoltà diverse, si richiedano capacità diverse da parte degli allievi.

Torniamo allora al primo enunciato. Anzi, non dimentichiamo che possiamo presentare il PR anche in modo più concreto: il fisico A si è annotato le sue misure, anche B ha fatto lo stesso; le confrontano e trovano che sono eguali (principio del taccuino.) Sarà poi bene far vedere che cosa succede quando ciò non accade: come potrebbe andare un esperimento che falsifica il nostro enunciato.

Un'osservazione, ancora a carattere didattico. Bisogna sempre stare attenti, quando si affrontano questi argomenti, a non metterci dentro troppo. Troppo nel senso di volerli vedere nel quadro più ampio, più sofisticato e più generale possibile. Come ho già detto, non sono particolarmente sensibile a questioni di rigore logico e simili, perché secondo me non sono utili dal punto di vista didattico; a parte il fatto che poi generalmente non se n' esce...

## Il PR vale solo per la meccanica?

Un'altra questione che vale la pena di discutere è la seguente. Abbiamo detto "nessun esperimento." E allora ci domandiamo: Il PR galileiano vale solo per la meccanica?

Segnalo la questione perché esiste una tradizione secondo la quale il PR di Galileo è limitato all'ambito dei fenomeni meccanici. La sua estensione, la sua estrapolazione fuori della meccanica, è cosa separata: non è stata considerata da Galileo, e la sua validità va esaminata a parte.

Facendo una piccola parentesi di tipo storico, a me questo dire "Galileo parla solo di meccanica" pare una ricostruzione a posteriori e un po' falsata del suo pensiero. Lo dico per diverse ragioni. Primo: ai tempi di Galileo non esisteva la distinzione della fisica in capitoli, come la conosciamo oggi: la distinzione tra meccanica, ottica, elettromagnetismo, termodinamica, risale in larga misura all'800. Quando la fisica comincia a diventare una struttura abbastanza articolata, con diversi quadri teorici, tra loro piuttosto separati e talora anche in contrasto, allora nasce l'esigenza di definire tutti questi capitoli. Quindi solo nella fisica dell'800 è sensato dire: se parliamo di moti, di velocità, di accelerazioni, di traiettorie, questa è meccanica; mentre non sono così convinto che Galileo avesse questo in mente. Tra l'altro, se andate a rileggere quella famosa pagina dei *Massimi Sistemi* vedrete che Galileo non fa nessuna distinzione.

Non la può fare, perché nella cultura del suo tempo non esiste la meccanica come capitolo a sé della fisica; ma poi non la fa in modo sostanziale, perché quando descrive che cosa fare in quella sala sotto coperta, dice: facciamo tutto quello che ci viene in mente. Parla sì di saltare, lanciare delle palle, ecc. Ma poi ci sono gli uccellini che volano, le mosche, ci sono i pesciolini che nuotano; accendiamo un fuoco al centro della stanza, ci mettiamo a bruciare un po' d'incenso e vediamo il fumo che sale...

Potete anche dire che si tratta sempre e solo di fenomeni meccanici; ma io potrei replicare che questi sono anche fenomeni chimici, biologici: che vanno ben al di là della fisica. Ci sono le farfalle, le mosche, i pesciolini, che si trovano in un ambiente naturale, in cui stanno tranquilli e beati e vivono esattamente nello stesso modo come se la nave stesse ferma. Perciò si potrebbe dire che Galileo sta pure affermando il PR per la biologia, oltre che per la meccanica.

I: Si potrebbe obiettare che non lo dice esplicitamente.

F: Ma non era nella cultura del suo tempo fare questo tipo di analisi, non rientrava nelle sue conoscenze. Però lui dice: fate quello che volete. Ci potremmo anche lanciare in una specie di “fantascienza”: che avrebbe detto per la luce? Ricordate che Galileo aveva provato a misurare la velocità della luce. Come avrebbe risposto se qualcuno gli avesse chiesto: “secondo te la luce dentro la nave si muove con la stessa velocità che se la nave stesse ferma o no?”

I: Dai, la sommava, via!

F: Io non ne sono sicuro. Se gli avessi chiesto del suono? Se io batto le mani, il mio amico all’altro capo della stanza dopo quanto tempo riceve il rumore? Fa differenza se la nave è ferma oppure si muove? Sarete d’accordo con me che non fa differenza. Certo, direte, perché il suono si propaga nell’aria, che si muove con la nave. Voglio solo dire che non è così ovvio che l’avrebbe sommata. Per il suono non avrebbe sommato un bel niente.

D’altra parte ho solo proposto quest’idea a titolo provocatorio. Intendo che non si deve né costringere un testo storico, scritto quasi quattro secoli fa, dentro le forche caudine di come vediamo le cose nei tempi attuali, né è lecito trarne illazioni su cosa avrebbe potuto dire circa argomenti di cui non tratta: bisogna limitare l’indagine entro il quadro delle conoscenze e delle idee del tempo.

Quindi per me non è corretto dire che il principio di Galileo vale solo per la meccanica. Galileo dice che vale nel quadro delle sue conoscenze: punto e basta. Che cosa avrebbe detto se gli si fossero proposti fenomeni come la propagazione della luce, come l’elettromagnetismo, ecc., non lo possiamo dire. Non ha senso! Ma per la stessa ragione non ha senso neppure dire che avrebbe detto di no, che avrebbe ristretto il PR alla sola meccanica. Eppure questo è stato detto nell’800.

Notate però che nell’800 si sapeva un’altra cosa. Nel quadro della meccanica newtoniana, se supponete che sui corpi agiscano forze che sono funzione soltanto delle loro distanze, allora il PR è un teorema. Se ho due sistemi di riferimento che si muovono di moto relativo traslatorio rettilineo uniforme, e se le forze sono funzione solo della distanza, il PR si dimostra. Quindi nell’800 il PR veniva visto come un teorema di meccanica. Dato che l’elettromagnetismo è cosa diversa, non è detto che il teorema debba valere anche lì.

### Che cosa ha detto Einstein?

Ecco perché insisto sull’enunciato galileiano: in questa forma il PR non è un teorema di meccanica, è un *enunciato fisico*: fate degli esperimenti, e scoprirete che non potete dire se la nave si muove o sta ferma. Ma se la mettiamo così, è lecito chiedersi: ma allora Einstein che ha fatto? Non ha fatto altro che affermare esplicitamente la validità generale del PR (e non è poco: ci torno fra breve). Facciamo tutti gli esperimenti possibili, e la cosa funziona. Non l’ha detto proprio in questi termini, però... Ecco la citazione di Einstein:

“Esempi di questo genere [...] portano all’ipotesi che al concetto di quiete assoluta non corrisponda alcuna proprietà dei fenomeni; e ciò non solo nella meccanica, ma anche nell’elettrodinamica. Al contrario, per tutti i sistemi di coordinate [con la nostra terminologia diremmo ‘riferimenti’] per i quali valgono le equazioni della meccanica, valgono pure le stesse equazioni elettrodinamiche e ottiche [...] Intendiamo perciò elevare quest’ipotesi (il cui contenuto verrà chiamato nel seguito ‘principio della relatività’) al rango di postulato [...]”

Ora secondo me questo lo si può dire presto; non c'è bisogno di aver fatto chissà quanta fisica. Potete dire: in ultima analisi, secoli dopo, si è scoperto che quella formulazione di Galileo regge solidamente alla prova degli esperimenti e delle conoscenze: anche quelle di oggi. Ecco che cosa vuol dire “nessun esperimento.” Punto e basta! E credo che questo non sia affatto difficile da digerire. Anzi, detto così è molto più semplice.

Tutta la fisica che conosciamo soddisfa il PR. Fate un esperimento qualunque, il primo che vi viene in mente: oggi ne possiamo fare molti di più, possiamo fare un'infinità di esperimenti che Galileo non poteva neppure immaginare. Però il suo successo più importante è questo: la sua formulazione del PR la possiamo trasferire tale e quale nella fisica di oggi, *senza cambiare una virgola*.

Per capire qual è stato il contributo di Einstein, è opportuno un breve riassunto storico. Una trentina di anni prima Maxwell ha proposto, per via teorica, l'esistenza delle onde e.m.; incluso il valore della loro velocità di propagazione.

Se si lascia da parte la corrente di spostamento, le equazioni di Maxwell — comprese le unità di misura, le costanti che vi figurano, ecc. — erano già conosciute, ricavate da esperimenti precedenti. Maxwell non fa altro che aggiungere la corrente di spostamento; ma fatto questo viene fuori, come conseguenza delle equazioni, che devono esistere le onde e.m., con una certa velocità che oggi si chiama  $c$ . Nel SI,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ; ma voi sapete che la situazione delle unità e.m. a quel tempo era a dir poco confusa: ce n'erano non so se tre, quattro, cinque sistemi fra elettrostatico, elettromagnetico, di Gauss; e poi razionalizzati o no. Ma qualunque sistema si adottasse, questo non influiva sul valore della velocità: veniva fuori sempre 300 000 km/s.

Poco dopo l'esistenza delle onde e.m. viene dimostrata sperimentalmente. Vorrei sottolineare che non solo le onde e.m. esistono, ma trovano subito importanti applicazioni per la trasmissione d'informazioni a distanza. Ricordo che la radiotelegrafia nel 1905 era già nata (Marconi). Dunque nessun dubbio sull'esistenza delle onde e.m. e sulle loro proprietà. Ma se dalle equazioni di Maxwell risulta che la velocità delle onde e.m. è  $c$ , è naturale chiedersi: rispetto a quale riferimento?

### A che punto si può parlare del PR?

Ora una piccola parentesi didattica. Dicevo prima che queste cose secondo me si possono insegnare presto. Penso anche che non sia necessario un insegnamento della fisica strettamente deduttivo. Intendo deduttivo non nel senso della logica, ma nel senso che non si possa trattare un argomento senza tutte le necessarie premesse. Quindi, per esempio, che non si possa parlare di onde e.m. se prima non è stato trattato il campo elettrico, il campo magnetico, le leggi dell'induzione, ecc.

Bene: sono del parere che occorra un po' scuotersi. Siamo alla fine del 20-mo secolo, le onde e.m. non solo ci sono, ma le usiamo tutti, fanno parte della nostra vita quotidiana. Non è essenziale che uno sappia esattamente quale teoria fisica c'è dietro, quali sono le strutture matematiche, i concetti con cui i fisici ci sono arrivati. Le onde e.m. esistono. Lo sanno tutti, lo sanno anche i ragazzini che le onde e.m. sono una componente vitale della nostra civiltà. La nostra vita sarebbe tutta diversa senza di esse. Provate a pensarci, solo un momento: cominciando dalla televisione, ma non solo: anche cose più vitali, come la radio e il telefono. Riuscite a immaginarvi senza TV, radio, telefono?

È quindi un fatto che le onde e.m. fanno parte del panorama della conoscenza comune. Ogni giornale parla continuamente di onde e.m., magari a proposito d'inquinamento... E non dico giornali tecnici, parlo dei quotidiani.

Non mi sembra perciò una cosa strana dire all'inizio della fisica che le onde e.m. si propagano con una certa velocità; e non credo sia un problema farlo accettare. Si tratta solo di aggiungere che un certo signor Maxwell l'ha previsto fin dal 1870, e che aveva previsto pure il valore di questa velocità, cioè 300 000 km/s. E basta.

Dopo di che sorge la domanda: va bene, Maxwell aveva previsto che viaggiano alla velocità di 300 000 km/s. Ma misurata rispetto a che cosa? a quale riferimento?

A questa domanda le risposte possibili sono due, questa volta sì su base soltanto logica: o le velocità delle onde e.m. sono diverse nei diversi rif., ossia c'è qualche rif. in cui la velocità è  $c$ , e altri in cui non lo è, oppure questa velocità è sempre la stessa. Non ci sono altre possibilità.

Nel primo caso esistono rif. privilegiati, nei quali le onde e.m. viaggiano con velocità  $c$ , mentre in ogni altro rif. la velocità risulta diversa. Se è così, le onde e.m. non rispettano il PR. Un fisico nel suo rif. misura la velocità delle onde e.m., e da quello che trova capisce in che rif. sta. Dal momento che le onde e.m. sono una proprietà necessaria del campo e.m., di cui si può calcolare la velocità a partire dalle equazioni di Maxwell, se accade che sperimentalmente in un rif. si trovi una velocità e in un altro una diversa, significa che le leggi della fisica sono diverse nei due rif. Dipendono dal rif., almeno per l'elettromagnetismo.

Nel secondo caso la velocità è sempre la stessa e il PR va bene: la misura della velocità non mi permette di distinguere un rif. dall'altro. Però ora mi trovo nei guai per un altro motivo, perché sarei portato a dire che questo non può essere. Infatti, se la velocità è  $c$  in un certo rif., in uno che si muove rispetto al primo con velocità  $v$  mi aspetto di trovare  $c+v$  o  $c-v$ , non  $c$ . Questo abbiamo imparato dal moto dei proiettili: la velocità del corpo in  $K'$  va sommata a quella di  $K'$  rispetto a  $K$  per avere la velocità del corpo in  $K$ .

Quindi ci troviamo di fronte a due alternative: o per l'elettromagnetismo non vale il PR, oppure non vale la legge galileiana di composizione delle velocità. Ma bisogna aver chiaro che fra queste due alternative *non si decide con la logica*. Non ce n'è una che sia per forza giusta, inesorabilmente, mentre l'altra è per forza sbagliata: bisogna vedere. E la novità rivoluzionaria di Einstein è che lui *sceglie la seconda*.

### Ma Einstein come ci arriva?

Purtroppo le ragioni per cui Einstein sceglie la seconda non sono alla portata di un insegnamento secondario. Se andate a leggere il classico articolo del 1905, vedrete che il ragionamento è abbastanza complesso: non era affatto semplice concludere che le cose dovessero andare in quel modo. Per capirlo bisogna avere adeguate conoscenze tecniche, ed essere addentro alle discussioni del tempo. Però la conclusione di Einstein è assai chiara e comprensibile: l'ho riportata poco sopra.

Einstein dice: non c'è quiete assoluta; tutti i rif. sono equivalenti, non solo nella meccanica (ricordate quello che dicevo circa il PR come teorema della meccanica?) ma anche nell'elettromagnetismo. Quindi prendiamo questa equivalenza come principio base e la chiamiamo "Principio della Relatività." (Nell'originale tedesco c'è la preposizione articolata: "Prinzip der Relativität.")

Ma Einstein come ci arriva? Le sue ragioni non sono sperimentali. L'esperimento di Michelson–Morley era già stato fatto, ma Einstein ha detto esplicitamente che a quel tempo non lo conosceva, o comunque non l'aveva considerato decisivo. Non è questo che l'ha convinto, ma il fatto che ragionando sulle equazioni di Maxwell, si trovavano cose strane, per lui poco soddisfacenti.

Ecco un esempio dello stesso Einstein, che vi posso citare anche se non credo che si possa portare in classe. Forse in quinta, ma non certo in terza. Se considerate il classico esperimento d'induzione e.m. fra un magnete e una bobina, sapete che la legge di Faraday–Neumann funziona bene, dà il risultato giusto, sia quando si muove il magnete, sia quando si muove la bobina. Il problema è che si tratta di due situazioni completamente diverse. Se si muove il magnete, c'è un campo magnetico variabile, e le equazioni di Maxwell ci dicono che sarà presente di conseguenza un campo elettrico. Ma se si muove

la spira il campo elettrico non esiste; per spiegare la corrente che si produce nella bobina dobbiamo ricorrere alla forza di Lorentz sugli elettroni.

Quello che c'è di comune fra i due casi è il cambiamento di flusso. Quindi è il moto relativo che conta, come si vede dalla forma integrale della legge dell'induzione, dove si parla solo di variazione del flusso concatenato con la bobina. Però se si assume che esista un rif. privilegiato, allora non si capisce come mai conti solo il moto relativo.

Non è un argomento logico: direi piuttosto che è un argomento estetico. Di fatto vedo che nell'elettromagnetismo c'è questa simmetria: che io muova la spira o che muova il magnete il risultato è lo stesso; però poi mi venite a dire che c'è un rif. assoluto. Non mi piace. Più o meno, questo è il ragionamento di Einstein.

## Basi sperimentali del PR

Nasce allora un problema didattico, perché gli argomenti teorici che abbiamo appena visto non si possono usare. Se pensate di basarvi sull'esperimento di Michelson, si tratta comunque di un unico esperimento, a parte difficoltà più serie che dirò fra poco. Per nostra fortuna, da quel tempo è passato quasi un secolo; non c'è quindi nessun motivo per legarci le mani da soli, rimettendoci nella situazione difficile di un secolo fa. In tutto questo tempo sono successe tante cose, abbiamo capito tante cose, abbiamo acquisito capacità tecniche molto più avanzate, abbiamo un sacco d'informazioni in più: dunque usiamole. E con questo apro un discorso che mi sentirete fare più volte.

Quando si parla dell'insegnamento della relatività, una delle prime cose da fare è liberarsi da questo peso, da questo handicap della ricostruzione storica. Noi oggi sappiamo tanta fisica, abbiamo tanta tecnica in più, abbiamo tanti fatti sperimentali; perché dobbiamo obbligarci a insegnare un argomento in maniera complicata, solo per seguire il percorso storico? Non è affatto detto che quella sia la via didatticamente più valida: oggi abbiamo fatti sperimentali molto più eloquenti, che si possono capire senza bisogno di sapere tanta fisica. Pensate all'esperimento di Michelson: quanta fisica bisogna sapere per capirlo? Bisogna sapere di onde, soprattutto interferenza; bisogna conoscere le ipotesi sulla natura della luce: la luce consiste di onde elettromagnetiche, ecc. Ci vuole un intero corso di fisica per arrivare a parlare dell'esperimento di Michelson.

Non crediate poi che per descrivere un esperimento basti un disegno e un po' di parole. Questa è un'illusione, a meno che non ci sia nei ragazzi una certa pratica sperimentale, e la consapevolezza generale di cosa significa fare un esperimento e interpretarlo. Si può credere: ho descritto l'esperimento. Ho fatto una figura; qui c'è l'interferometro, ecco gli specchi, ecco il raggio di luce, ecc. E loro hanno capito che cosa significa veramente l'esperimento. Illusione... Sono esperimenti complessi, e se non vengono capiti, il loro valore didattico di fondamento per gli sviluppi successivi cade miseramente. Per di più, come vi mostrerò, non sono necessari.

Vediamo quindi qualche esempio di prove sperimentali moderne. Comincio coi sistemi di radionavigazione. (Possiamo limitarci al GPS, che è il più moderno e ha ormai sostituito tutti gli altri.) Più avanti spiegherò perché questi sistemi sono prove del PR, e sono prove estremamente semplici ed evidenti. Ora sottolineo che si tratta di apparati pratici, in uso reale; molta gente li usa per mestiere, per esigenze di lavoro. E non funzionerebbero se non valesse il PR, nel senso dell'invarianza della velocità delle onde e.m.

Secondo esempio: le sonde spaziali. Anche qui sto parlando di oggetti reali, direi quasi familiari, di cui si parla continuamente: non si tratta di strumenti racchiusi nei laboratori di fisica. Ma la cosa importante è semplicemente che funzionano. Sono apparati complessi, che contengono computer, laser, oscillatori, strumenti di misura dei più diversi tipi. Li spediamo a varie velocità, li mandiamo in tutte le parti del sistema solare, e funzionano. Sono laboratori che si muovono, a velocità considerevoli, e che vanno bene come se stessero sulla Terra. Questo non è che il PR.

Terzo esempio: stelle, galassie... Anche queste sono dei laboratori in moto. Infatti pensate a tutto quello che sappiamo oggi sulle stelle: come sono fatte dentro, da dove viene l'energia, qual è la loro evoluzione; la spiegazione di tutto ciò la traiamo dalla fisica che abbiamo imparato nei nostri laboratori. Per capire la struttura e l'evoluzione stellare bisogna usare la fisica nucleare, l'elettromagnetismo, la meccanica statistica... praticamente tutta la fisica che sappiamo e che abbiamo imparata dagli esperimenti fatti sulla Terra.

Ma le stelle non stanno mai ferme (anche se continuiamo a chiamarle stelle fisse): sono in moto anche molto veloce, dell'ordine di 100 km/s o più rispetto a noi. Le galassie hanno velocità di centinaia di km/s. E l'astrofisica riesce a spiegare questi fenomeni con le stesse leggi che valgono nei laboratori terrestri.

Abbiamo dunque dei laboratori in cui viene messa alla prova tutta la fisica che conosciamo, e che si muovono rispetto a noi. La stessa fisica funziona nelle stelle come da noi, quindi vale il PR. Non è difficile raccontare questo. Poi bisognerà spiegare meglio cosa significa che la fisica sulle stelle è uguale a quella sulla Terra. Ma intanto bisogna segnalare questo fatto, che non è ovvio, e mi meraviglia che di solito non venga messo in evidenza.

Riflettete: noi siamo qua, abbiamo studiato un po', abbiamo fatto degli esperimenti, abbiamo capito come son fatti gli atomi, le molecole, i nuclei, come avviene la propagazione della luce, ecc. Abbiamo capito come queste cose vanno sulla Terra. Poi alcuni scienziati hanno detto: cerchiamo di spiegare la struttura delle stelle sulla base di queste cose che sappiamo. E abbiamo visto che funziona. Abbiamo capito perché ci sono certe classi di stelle, perché ci sono i vari stadi di evoluzione, perché ci sono le nane bianche, le giganti, le stelle pulsanti, ecc.

E nello stesso tempo l'astronomia ci ha insegnato che le stelle non stanno ferme. Vi sembra niente questo? Abbiamo questi oggetti che guizzano di qua e di là con le velocità che abbiamo visto: sono quindi rif. in moto rispetto al nostro, e i fenomeni lì dentro si svolgono come se avvenissero sulla Terra. Se questa non è una prova del PR! Abbiamo riprodotto, a grande scala e a grandi velocità, il naviglio di Galileo!

## Il Global Positioning System

Vorrei ora fermarmi un po' sul GPS. Lo descrivo molto semplificato, pensando a due soli satelliti geostazionari. In realtà i satelliti usati sono più di due, e non sono geostazionari. Ci conviene prenderli geostazionari, perché così non dobbiamo preoccuparci del loro moto rispetto alla superficie terrestre. Il sistema reale usa satelliti non stazionari perché questo assicura una maggiore copertura della Terra, ma qui non importa.

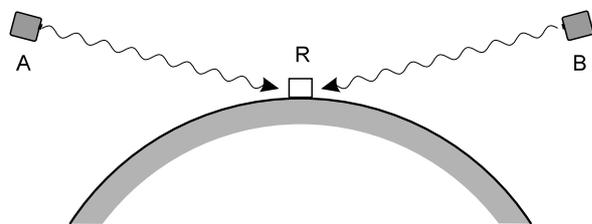


fig. 4-2

Di ciascun satellite è nota la posizione nello spazio; tutti trasmettono dei segnali al nostro ricevitore, qui sulla Terra. I satelliti portano a bordo degli orologi (incidentalmente si tratta di orologi atomici). Il segnale emesso da un satellite contiene, oltre a un codice d'identificazione, l'informazione sul tempo a cui è stato emesso, e i dati necessari per calcolarne la posizione a ogni istante desiderato.

Il ricevitore R (fig. 4-2) riceve il segnale del satellite A a un certo tempo, e sa a che tempo è stato emesso, perché nel segnale è contenuta quest'informazione. Di qui ricava immediatamente l'intervallo di tempo trascorso nel passaggio del segnale da A a R, e la distanza AR. Inoltre è in grado di calcolare la posizione di A nello spazio al tempo di emissione. Idem per B, e così conosciamo anche la distanza BR e la posizione di B. Ragionando nel piano si vede che con le posizioni dei due satelliti e le due distanze AR,

BR si trova la posizione di R. Notate che si è usato il fatto che i segnali viaggiano alla velocità  $c$ .

Nel sistema reale due satelliti non bastano: in primo luogo perché siamo in tre dimensioni e già questo richiede tre satelliti; poi perché nel sistema come l'ho descritto anche il ricevitore dovrebbe essere dotato di un orologio di qualità adeguata. Si riesce a evitarlo usando almeno 4 satelliti, ma non è necessario ora spiegare come si fa.

A noi interessa invece capire dove entra il PR. Il fatto è che la Terra gira su se stessa e gira intorno al Sole. Quindi un rif. solidale alla Terra non è inerziale: non ha velocità costante né orientamento costante rispetto a un RI. In fig. 4-3 a sinistra è disegnata la situazione a un certo istante; a destra quella 12 ore più tardi. Come vedete, mentre nella prima figura il satellite A sta avanti a B nel senso del moto orbitale della Terra, 12 ore dopo la situazione è scambiata: A sta indietro. Ricordate che la velocità orbitale della Terra è circa 30 km/s: 1/10000 di  $c$ .

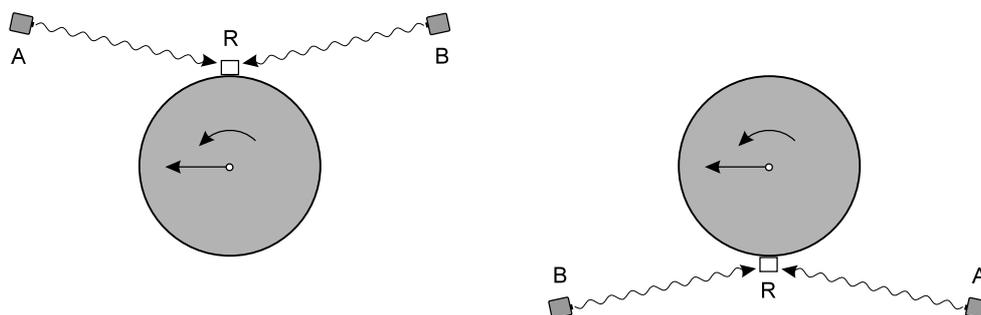


fig. 4-3

Supponiamo ora che la velocità delle onde e.m. in un rif. solidale alla Terra dipenda dal fatto che la Terra si muove: allora l'onda che va da A a R non avrà la stessa velocità di quella che va da B a R. Potremmo pensare che nella situazione di sinistra la prima sia maggiore della seconda, e viceversa nella situazione di destra. Se il software che elabora i dati GPS non ne tiene conto, sbaglia il calcolo della posizione di R: attribuisce alla distanza AR un valore minore del vero, e invece un valore maggiore a BR. Di conseguenza, la posizione calcolata di R risulta spostata verso A rispetto a quella reale. Dodici ore dopo, il ruolo dei due satelliti si è scambiato, e il calcolo della posizione del ricevitore me lo darà spostato verso B.

Se il ricevitore sta in una postazione fissa, io mi accorgerò del problema perché mi sembrerà che R si stia spostando alternativamente avanti e indietro, col periodo di 24 ore. Si potrebbe però ritenere che l'effetto sia comunque piccolo: nei quesiti che vi darò alla fine, chiederò di stimarlo. Vedrete che l'informazione che si ottiene dal GPS è molto significativa. Infatti — inutile dirlo — nessuno ha mai visto, usando il GPS, questa ipotetica oscillazione: il GPS funziona perfettamente in accordo con l'ipotesi che la velocità delle onde e.m. sia sempre  $c$ .

Da quando ho imparato com'è fatto il GPS, mi chiedo se quelli che l'hanno progettato erano consapevoli di star usando il PR. Io sospetto di no. Ho idea che il PR, inteso in questo senso, sia una conoscenza di senso comune, che si dà per scontata senza rifletterci su. Credo che per gli ingegneri sia un fatto di senso comune che i segnali viaggiano a velocità  $c$ . La Terra gira intorno al Sole? ruota su se stessa? Che importa? chi ci pensa? Dico questo per ribadire che lo stesso fatto che, se preso da un certo lato, sembra profondo quanto complicato, da un altro lato, più pratico, diventa conoscenza di senso comune.<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Solo dopo aver tenuto queste lezioni ho scoperto che in realtà la progettazione del GPS pose dei problemi non banali: un cenno lo troverete in nota nella lez. 10.

## Il paradosso del condensatore

A proposito di PR, ecco ora un “paradosso,” che però non è un paradosso relativistico in senso proprio: appare un paradosso solo se non si conosce la relatività.

Supponiamo di avere il solito condensatore piano sufficientemente grande (fig. 4-4), per cui siamo sicuri che il campo è uniforme; ho indicato i segni delle cariche e il verso del campo.

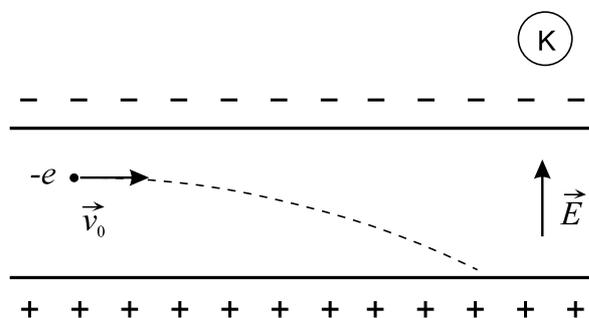


fig. 4-4

Da dentro il condensatore — non da fuori, è importante — lancio un elettrone in direzione parallela alle armature, con velocità iniziale  $\vec{v}_0$  verso destra: esso viene deviato verso l’armatura positiva, e siccome il campo è uniforme, la traiettoria è una parabola, come per i proiettili sulla Terra. In particolare ciò che m’interessa è che la componente orizzontale della velocità è costante.

Ora passiamo in un rif. che viaggia con la velocità orizzontale dell’elettrone.

In questo rif. il condensatore si muove in senso opposto, con velocità  $-\vec{v}_0$ . Abbiamo dunque sulle due armature cariche negative e cariche positive che vanno verso sinistra, e si hanno due correnti: le frecce in fig. 4-5 indicano i versi delle correnti, che sono ovviamente opposti sulle due armature. Le correnti producono un campo magnetico, che risulta diretto verso l’interno della figura.

In questo rif. l’elettrone è inizialmente fermo. Lo lascio andare e comincia a cadere; cadendo acquista velocità, e con la velocità compare una forza di Lorentz, progressivamente crescente: la forza è tale da deviare l’elettrone verso sinistra. Dunque la velocità orizzontale dell’elettrone, che era nulla all’inizio, poi diventa negativa. Come vedete, in un rif. ho concluso che la velocità orizzontale era costante, nell’altro che non è costante, e ciò non è possibile! Pensateci su.

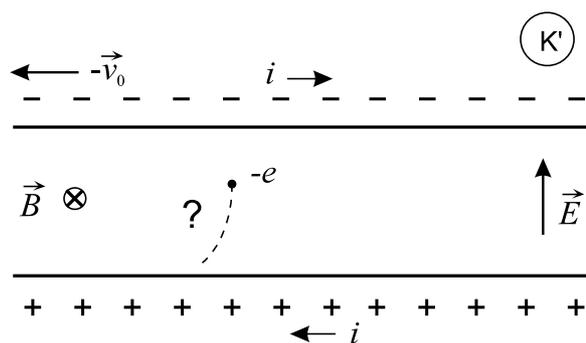


fig. 4-5

I: Abbiamo supposto che il campo nel rif.  $K'$  abbia la stessa direzione che ha nel rif.  $K$ . Questo non è automatico: bisognerebbe vedere come cambia il campo elettrico quando le cariche della sorgente sono in movimento.

F: Il problema va esaminato nel suo contesto. Qui si parla di un fisico di un secolo fa, all’incirca. Conosce l’elettromagnetismo, le equazioni di Maxwell le ha già viste, conosce i campi magnetici, ha fatto esperimenti sul moto degli elettroni nei campi magnetici... Quindi sa che il campo elettrico in queste condizioni dipende solo dalla densità di carica presente sulle armature, e non dal fatto che le cariche siano o no in moto. La densità era uniforme in  $K$ , e lo è anche in  $K'$ : quindi il campo è certamente ancora verticale.

## Problemi

1. Avevo detto: in un rif. con velocità  $\vec{v}_0$  un proiettile cade verticalmente, come un proiettile che cade da fermo in un rif. fermo. Ora dovrete pensare perché ho scritto “è proprio vero?”
2. Se la velocità delle onde e.m. fosse costante rispetto al Sole, e valesse la legge di composizione galileiana, quanto sbaglierebbe il GPS?

3. Schematizziamo una cavità risonante con due specchi affacciati, tra i quali si riflette un'onda e.m. La frequenza di risonanza è quella alla quale si formano onde stazionarie. Calcolare la variazione di frequenza nelle stesse ipotesi del quesito 2, in funzione della velocità della cavità.

In un rif. in “quiete assoluta” la velocità delle onde e.m. è la stessa nei due sensi, e ne viene fuori una certa frequenza; se il sistema si muove, le onde che viaggiano in un verso e quelle nell'altro non hanno la stessa velocità: come cambia la frequenza di risonanza?

Perché ha interesse questa domanda? Perché se un apparecchio del genere lo metto su una sonda spaziale (e di sicuro ci sono cavità risonanti in una sonda spaziale) allora nelle ipotesi che abbiamo fatto si potrebbe vedere un cambiamento della frequenza di risonanza. Bisogna però stimare quant'è grande il cambiamento: potrebbe non essere osservabile...

4. Sempre nelle stesse ipotesi, come cambia la direzione in cui si vede una stella, a causa del moto orbitale della Terra? (Questo effetto esiste realmente: è la “aberrazione stellare.”)

Stavolta il problema è: visto che l'aberrazione esiste, vuol dire che la velocità della luce si compone con quella del sistema di riferimento, oppure no?

5. Studiare il paradosso dell'elettrone nel condensatore. Spiegare (senza fare calcoli, e senza usare la relatività!) qual è la previsione corretta: il moto in  $K'$  sarà solo verticale o no? Dov'è sbagliato il ragionamento (o le ipotesi sottintese)?

## Risposte

*Problema 1.* (Il proiettile cade verticalmente?):

Il problema è la presenza dell'aria, come abbiamo visto nella lezione precedente (problema 2): invito a rileggere quella discussione. Nel rif.  $K'$  (quello che si muove con la velocità orizzontale iniziale del proiettile) c'è un vento con velocità  $-\vec{v}_0$ , quindi il proiettile *non cade in verticale*. Il PR non vale a causa dell'aria, che è ferma in un rif. ma non nell'altro, e quindi influenza diversamente la caduta di un grave. Due fisici che eseguissero questo esperimento nei due rif. troverebbero risultati diversi.

Invece la validità del PR viene restaurata se il rif.  $K'$  è poniamo lo scompartimento di un treno in corsa, dove l'aria è ferma rispetto a  $K'$ . Allora è giusto aspettarsi che tutto vada allo stesso modo come se il treno fosse fermo.

*Problema 2.* (Se non valesse il PR, di quanto sbaglierebbe il GPS?):

Riferiamoci alla fig. 4-3, e supponiamo per semplicità che A, R, B siano allineati. Sia  $D$  la distanza  $\overline{AR} = \overline{BR}$ . Sia poi  $v$  la velocità orbitale della Terra (circa 30 km/s).

Nelle ipotesi fatte, nella situazione di sinistra il tempo che il segnale impiega a percorrere il tratto AR è  $D/(c+v)$ , mentre per il tratto BR è  $D/(c-v)$ . Se il software del GPS ignora la variazione di velocità, e assume che questa sia sempre  $c$ , stima la distanza AR al valore  $D' = cD/(c-v)$ , e la distanza BR al valore  $D'' = cD/(c+v)$ : entrambi i risultati portano ad assumere la posizione di R spostata verso B, di un tratto  $Dv/c$  (a meno di termini di secondo ordine in  $v/c$ ). Nella situazione di destra, 12 ore dopo, l'errore cambia segno, e il ricevitore appare spostato verso A.

La distanza  $D$  è circa 26 000 km (i satelliti GPS non sono geostazionari!) e perciò l'errore ammonta a 2.6 km.

*Problema 3.* (Risonanza di una cavità):

Si avrà un'onda stazionaria quando il tempo di andata e ritorno è multiplo del periodo  $T$  dell'onda. Se  $l$  è la distanza tra gli specchi, questo tempo è

$$\tau = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2}$$

e la condizione di risonanza  $\tau = n T$  porta a

$$T = \frac{2cl}{n(c^2 - v^2)}$$

da cui, per la frequenza:

$$\nu = n \frac{c}{2l} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

La correzione è di secondo ordine in  $v/c$ : se per es. prendiamo  $v = 10 \text{ km/s}$  risulta una diminuzione relativa della frequenza di risonanza di  $1.1 \cdot 10^{-9}$ . Piccola, ma largamente osservabile con gli strumenti di oggi.

**Problema 4.** (Aberrazione stellare):

Sia  $K$  il RI solidale al (centro del) Sole,  $K'$  quello solidale alla Terra (più esattamente, al suo centro). Sia poi  $\vec{v}$  la velocità della Terra in  $K$ , e  $\vec{c}$  quella della luce, sempre in  $K$  (conviene qui pensare alla velocità della luce come vettore). Allora per la velocità  $\vec{c}'$  della luce in  $K'$  avremo

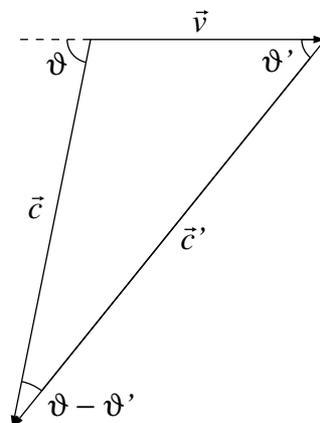


fig. 4-6

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}.$$

Dalla fig. 4-6 si vede (teorema dei seni) che

$$\sin(\vartheta - \vartheta') = \frac{v}{c} \sin \vartheta' \simeq \frac{v}{c} \sin \vartheta. \quad (4-2)$$

Dato che  $v/c \simeq 10^{-4}$ , l'approssimazione è lecita finché bastano 4 cifre. Oggi invece le misure vanno oltre le 4 cifre significative; ma ciò significa che è possibile verificare che la (4-2) non è corretta, anche se non si fa l'approssimazione. Non è corretta proprio perché non lo è l'ipotesi su cui si basa.

Quanto alla seconda domanda, per la risposta, che consiste nella teoria relativistica dell'aberrazione, non abbiamo gli strumenti (e non li avremo neppure alla fine del corso ...). Posso quindi dare soltanto una risposta senza giustificazione.

Sicuramente la situazione relativistica non è descritta dalla fig. 4-6, se non altro perché in figura si vede che anche il modulo della velocità cambia passando da  $K$  a  $K'$ . Il fenomeno aberrazione è invece presente anche in relatività, ma la formula (4-2) è sostituita da un'altra, più complicata, che differisce solo per termini di secondo ordine in  $v/c$ .

È per questo motivo che nella pratica astronomica solo da poco tempo (forse 20 anni) è stato necessario far uso della forma relativistica dell'aberrazione.

**Problema 5.** (Il paradosso del condensatore):

Abbiamo già visto che sicuramente nel rif.  $K'$  il campo elettrico è uniforme e verticale, e senza dubbio esiste anche il campo magnetico; quindi la conclusione tratta in  $K'$  è ineccepibile, e dev'essere sbagliata quella in  $K$ . Ma dove?

In  $K$  abbiamo correttamente osservato che la componente orizzontale della forza è nulla, e ne abbiamo dedotto che deve restare costante la velocità: questo è certamente vero in meccanica newtoniana, e perciò la prima conclusione che possiamo trarre è che *le leggi dell'elettromagnetismo*, da cui abbiamo dedotto la conclusione in  $K'$ , *non sono compatibili con la meccanica newtoniana*.

Più esattamente, l'incompatibilità nasce se imponiamo che le leggi dell'elettromagnetismo valgano in  $K'$  come in  $K$ , ossia se chiediamo di estendere il PR all'elettromagnetismo. Ma che esista questa incompatibilità non è a questo punto una sorpresa: l'avevamo già capito a proposito della velocità della luce.

Per ora non possiamo dire di più; riprenderemo il problema quando avremo fatto conoscenza con la forma relativistica delle leggi della dinamica (lez. 12). Potremo dimostrare a quel punto che la dinamica relativistica risolve il paradosso.

