LEZIONE 9

Spiegazione dell'esperimento H–K

Abbiamo ormai preparato il terreno, e possiamo procedere a spiegare quantitativamente (entro i limiti dovuti alle nostre semplificazioni) il risultato dell'esperimento H–K. Indicherò con Δt il tempo (segnato da un orologio fermo nel RI che si muove con la Terra) in cui ha avuto luogo l'esperimento. Sappiamo che $\Delta t \simeq 50\,\text{ore} = 1.8 \cdot 10^5\,\text{s}$.

Sia poi u la velocità della Terra all'equatore; v quella degli aerei rispetto alla Terra. Abbiamo

$$u = \omega R = 465\,\text{m/s}, \qquad v = 2\pi R/\Delta t = 222\,\text{m/s}.$$

Le velocità dei due aerei rispetto al rif. K sono risp. $u+v$ e $u-v$, da cui:

$$\Delta\tau_{1,2} = \Delta t\,\sqrt{1-(u\pm v)^2/c^2}.$$

E ora provate a calcolarlo: chi ha un calcolatorino, provi a mettere i numeri nella formula, e mi dica che cosa trova...

C'è una ragione per cui ho chiesto di fare questo conto. Il fattore che moltiplica Δt è talmente vicino a 1 che la differenza non è visibile, se il vostro visore ha 8 o 9 cifre (e anche un po' di più ...). A prima vista si sarebbe quindi portati a dire che la differenza fra $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_2$ è zero, cosa certamente falsa; in seconda battuta, si dirà che il calcolatore non è in grado di calcolarla...

A dire il vero, il fatto che non compare non significa che il calcolatore non sia in grado di tenerne conto: il numero di cifre con cui sono rappresentati internamente i numeri può essere (di solito è) superiore a quelle che vengono mostrate. Se però il vostro calcolatore non lavora con almeno 13 cifre significative, non c'è speranza di vedere un risultato.

C'è un modo assai semplice per verificare se le cose stanno così: se sul display, quando calcolate la radice quadrata, vedete un semplice 1, provate a sottrarre 1. Se il risultato è proprio 0, niente da fare; ma può darsi che la differenza venga diversa da 0, e questo mostra che il risultato era rappresentato internamente con più cifre di quante ne vengono mostrate; anche se non ci dà nessuna garanzia che il risultato stesso sia affidabile.

Ritengo molto istruttivo far "toccare con mano" questo fatto ai ragazzi. Ma una volta scoperto che non si può affidare così semplicemente il calcolo alla nostra macchinetta, bisogna trovare un altro modo di arrivare in fondo. Una soluzione è sviluppare in serie:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \cdots$$

Nel nostro caso x è dell'ordine di 10^{-12}, x^2 è dell'ordine di 10^{-24} e lo trascuriamo, quindi otteniamo:

$$\Delta\tau_{1,2} = \Delta t\left(1 - \frac{(u\pm v)^2}{2c^2}\right)$$

$$\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = \Delta t\,\frac{2uv}{c^2} = 4\cdot 10^{-7}\,\text{s}. \tag{9–1}$$

Osservate che la differenza dei tempi contiene il prodotto delle velocità (della Terra e dell'aereo) diviso c^2. Questo è un numero piccolo, ma moltiplicato per Δt che è dell'ordine di 10^5 s produce un risultato di $0.4\,\mu$s, che è misurabile.

Non c'è da meravigliarsi se non torna l'esatta differenza dell'esperimento (332 ns) perché occorrerebbe avere i dati esatti della traiettoria, delle velocità, ecc. Però l'ordine di grandezza è quello giusto, il che rende plausibile che un calcolo più accurato possa dare un accordo migliore, come infatti è stato; entro 20 ns dovuti alle varie cause di errore.

Si potrebbe obiettare che che nella (9–1) è rimasto Δt, e noi non abbiamo l'orologio fermo nel centro della Terra. Però i tempi dei vari orologi differiscono solo nella tredicesima cifra, per cui al posto di Δt potete mettere il tempo segnato da un orologio in qualunque posto sulla Terra.

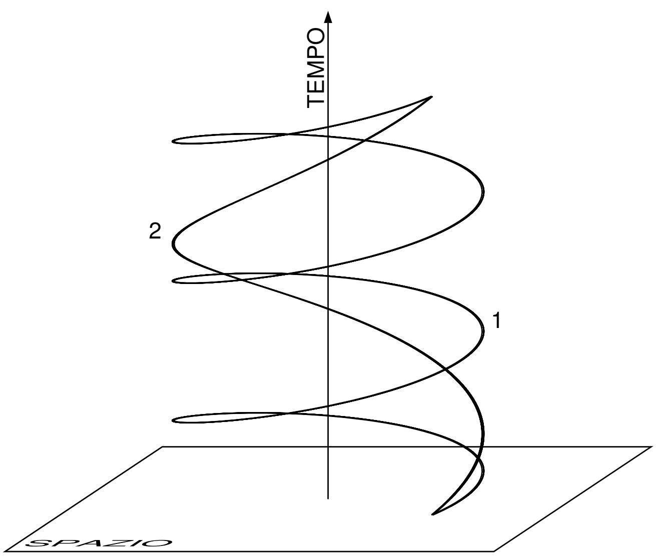

fig. 9–1

Conclusione: è giusto che gli orologi 1 e 2 segnino tempi diversi, come mostra l'esperimento.

Notate che abbiamo di nuovo a che fare con due percorsi nello spazio-tempo. In fig. 9–1 è rappresentata la situazione, che è complicata dalla necessità di rappresentare *due* dimensioni spaziali, perché il moto degli aerei si svolge lungo l'equatore. Come al solito, ho disposto il tempo in verticale; allora un moto circolare uniforme mi dà come curva oraria un'elica che si sviluppa lungo l'asse t. Moto più veloce significa elica di passo più breve (ci vuole meno tempo per fare un giro). Le due eliche partono dallo stesso punto (evento "partenza degli aerei") e terminano ancora in uno stesso punto (evento "arrivo degli aerei").

La curva 1, che sembra più lunga, è in realtà più breve, per effetto di quel segno meno nella formula; quindi l'orologio 1 segna un tempo inferiore all'orologio 2, come si vede dai calcoli. E questo è tutto per l'esperimento H–K.

Faccio notare che non abbiamo parlato affatto di dilatazione del tempo, ma solo e sempre di tempo proprio. C'è un orologio che si muove: il tempo che quell'orologio segna è legato al tempo del laboratorio e al moto dell'orologio stesso dalla formula (8–8).

Vita media dei muoni in un anello di accumulazione

Voglio ora rinforzare l'argomento che abbiamo trattato. Non introdurrò cose nuove, anzi parlerò di esperimenti più vecchi di quelli presentati fino ad ora. Però è interessante far vedere come li si può spiegare seguendo la linea che vi ho illustrata, invece che secondo la linea tradizionale.

Mi riferisco a esperimenti che vengono presentati come esempi della "dilatazione relativistica del tempo," e riguardano la vita media dei muoni. Ce ne sono almeno due versioni: la più vecchia è quella che appare anche in un film PSSC, e la tratteremo per seconda; la prima, più recente, è stata eseguita con muoni raccolti in un anello di accumulazione.

Per chi non ne fosse a conoscenza, ecco una breve descrizione dei muoni (il minimo che serve). Il muone è un leptone, ossia una particella che sente solo l'interazione debole (oltre quella elettromagnetica, visto che è carico). Sono in questo analoghi agli elettroni. La massa del muone è circa 206 volte quella dell'elettrone. Però il μ è instabile e decade, con vita media $\tau \simeq 2\,\mu$s, col processo:

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e.$$

Ecco ora l'esperimento con l'anello di accumulazione. Dei muoni di grande energia vengono posti in un anello di accumulazione, dove si muovono a velocità molto alta, vicina a c (pessimo modo di esprimersi, perché non diciamo *quanto* è vicina a c, mentre gli effetti relativistici, a causa del fattore $\sqrt{1-v^2/c^2}$, cambiano molto proprio in vicinanza di c). I muoni rimangono nell'anello un tempo sufficientemente lungo per poterne vedere il decadimento: misurando come varia il loro numero nel tempo, si può calcolare la vita media.

Si trova che la vita media è più lunga di quella a riposo: $\tau' \gg \tau$, per un fattore chiamato universalmente γ, dato da

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

che nell'esperimento era circa 12. Quindi la vita media si allunga di un ordine di grandezza.

Come si spiega questo fatto? La spiegazione tradizionale è che si tratta di un classico esempio di dilatazione del tempo: un orologio che cammina va più lento di un orologio fermo. Ma questo approccio è pericoloso: la dilatazione del tempo è una delle cose che creano confusione perché non si capisce mai bene se si tratta di un effetto oggettivo o soggettivo, se l'orologio che cammina va realmente più lento oppure no, se vale ancora il PR. Se lui si muove rispetto a me io mi muovo rispetto a lui, quindi per lui il mio orologio va più piano: come possono accadere entrambe le cose? Quindi ci si perde in disquisizioni dove la fisica finisce per uscire di scena, e con poco costrutto. Credo che il timore di cadere in tali difficoltà sia una remora non trascurabile ad affrontare la relatività.

È dunque meglio guardare la questione da un altro punto di vista; infatti per spiegare ciò che si vede nell'esperimento, non c'è bisogno di parlare di dilatazione del tempo. Come si fa?

Ricordo che quando si parla di vita media dei muoni ci si riferisce a una legge di decadimento analoga a quella dei nuclei radioattivi: una legge esponenziale. Vita media τ significa che al tempo τ solo una frazione $1/e$ dei muoni sopravvive, gli altri sono decaduti. Perciò per misurare la vita media si procede così: si comincia con un certo numero di particelle, e si va a vedere quante ne sono rimaste dopo un dato tempo.

La domanda cruciale è: tempo di chi? Il tempo che io misuro è quello del laboratorio, ma i muoni in questo rif. sono in moto. D'altra parte stiamo parlando di una proprietà della particella, la sua vita media, alla quale dovremo attribuire un determinato valore come facciamo con la massa, la carica, ecc. Tale proprietà dovrà essere misurata in un rif. in cui la particella è ferma. In altre parole, la vita media va misurata col *tempo proprio* della particella. Se sto nel mio laboratorio, è ovvio che misuro un'altra cosa. Se il muone è fermo, il tempo proprio coincide con quello del laboratorio; ma se è in movimento il tempo proprio sarà:

$$\Delta\tau = \Delta t\,\sqrt{1-v^2/c^2}$$

che è diverso da Δt: più esattamente, è minore.

Possiamo vedere la cosa graficamente, disegnando la curva oraria del muone (fig. 9–2). Il segmento AB rappresenterebbe un muone fermo, mentre la curva oraria del muone in movimento dentro l'anello è un'elica. Come

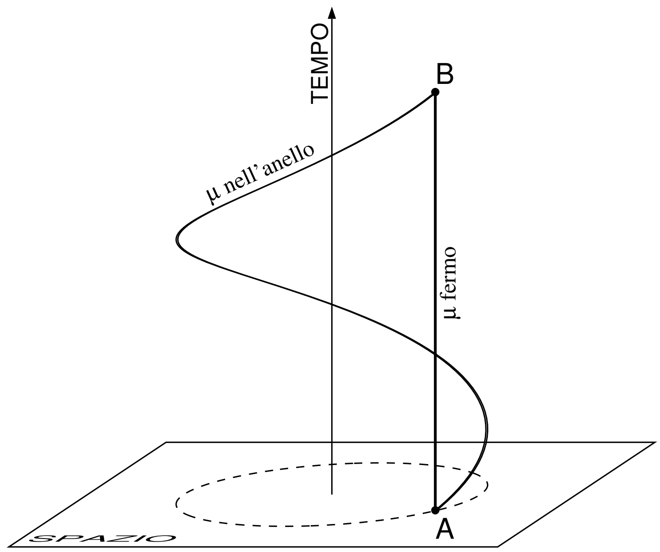

fig. 9–2

sappiamo, a parità di estremi il tratto rettilineo è più lungo dell'arco di curva; quindi nel punto B per il muone fermo è passato più tempo che per il muone in moto. Tra i due è più probabile che sia decaduto il primo, mentre quello in moto, che ha vissuto meno, è meno probabile che sia decaduto. Perciò per gli strumenti del laboratorio i muoni in movimento sembrano avere una vita media maggiore dei muoni fermi. È tutto.

Bisogna sempre saper confrontare le cose che si misurano con le grandezze che compaiono nelle formule. Nel nostro caso, supponiamo di aver fatto l'esperimento con 1000 muoni fermi e con 1000 muoni in movimento: li contiamo all'inizio e alla fine. Lo studio delle curve orarie ci dice che la linea oraria dei muoni fermi, la retta tra A e B, è più lunga: quindi per loro è passato più tempo ed è naturale che siano decaduti in numero maggiore rispetto a quelli che hanno percorso la linea oraria ad elica, più breve. La formula dà solo carattere quantitativo al confronto, e quindi ci permette di calcolare il rapporto delle due vite medie.

Come vedete, tutto si basa sul fatto che le linee orarie hanno lunghezza diversa. Abbiamo quindi sostituito alla dilatazione del tempo il fatto che il tempo proprio è una grandezza che dipende dalla linea oraria percorsa: è la lunghezza di quella curva oraria.

È davvero difficile la geometria dello spazio-tempo?

Un'obiezione che mi sento fare spesso è che per ragionare così bisogna introdurre una metrica insolita, la geometria dello spazio-tempo, che presenta difficoltà.

A tale obiezione rispondo anzitutto che voi insegnate cose ben più difficili di queste; la differenza è che ci siete abituati e non vedete le difficoltà. In questo nuovo modo d'insegnare la relatività, la difficoltà è più vostra che degli studenti, perché voi siete stati abituati a pensare in un certo modo e vi è difficile cambiare ora. Ma non dovete inferire da questa vostra difficoltà che ci sia un'analoga difficoltà per gli studenti: essi, dovendo partire da zero, non hanno pregiudizi.

Viceversa la dilatazione del tempo rischia sempre di creare confusioni. E non mi riferisco solo alla s.s.s.; penso anche all'università, dove ho una larga esperienza. Se non si hanno idee più che chiare su come giocano i diversi rif., ci si confonde e non si raggiungono conoscenze stabili.

È difficile fare discorsi corretti sulla base della dilatazione. Non è impossibile, ma bisogna sempre tener presente che in un rif. c'è qualcosa che si muove e qualcosa che sta fermo, e si ha un certo fenomeno; poi bisogna dire cosa succede se ci si scambiano i ruoli, e bisogna saperlo dire correttamente e con chiarezza.

Con l'approccio che vi propongo invece non c'è nessun problema: mi metto nel RI del laboratorio e calcolo tutto in quel rif. Si vede subito che non c'è simmetria con l'oggetto in moto, perché il rif. ad esso solidale (ad esempio il rif. del muone) non è inerziale. Quindi nessun paradosso. Del resto, abbiamo solo realizzato una "versione per muoni" del paradosso dei gemelli.

D: Può darsi che queste difficoltà nella dilatazione del tempo derivino dal fatto che non si usano le trasformazioni di Lorentz? Lei all'inizio ha detto che le trasf. di Lorentz sarebbe bene lasciarle perdere, ma tutto questo ne viene fuori quasi logicamente. Le trasf. di Lorentz non sono poi la fine del mondo. Io vedo molto problematico procedere per la strada che lei dice, per la definizione del campo elettrico, per la legge di Coulomb e cose di questo genere... Rinunciare alle trasf. di Lorentz l'ho sempre visto con sospetto.

F: Posso dare diverse risposte, ma per prima mi viene in mente questa: vorrei che voi poteste prendere contatto coi ragazzi che hanno preso la maturità, e non stanno studiando fisica; dopo un anno chiedete a loro cosa gli è rimasto in testa di tutto quello che hanno studiato! In particolare di fisica: e in particolare se gli avete fatto le trasf. di Lorentz. Croce diceva che la cultura è ciò che rimane dopo che si è dimenticato tutto... Dovreste verificare quale "cultura" ha prodotto la relatività fatta a base di trasf. di Lorentz.

I: Sì ma con la matematica, se è vero che i passaggi matematici si dimenticano facilmente, il senso della relatività rimarrebbe, se si potesse fare un corso di quattro o cinque mesi...

F: Su questo argomento sono di parere diametralmente opposto! Se c'è una cosa che non solo gli studenti di Liceo, ma anche quelli dell'università, dopo finiti gli studi, spesso non hanno capito e quindi non conservano, è proprio il senso di quello che hanno fatto. Si sono immersi in un formalismo e dentro la formula hanno smarrito il senso di quello che stavano facendo. Una riprova, e parlo di studenti universitari, è che se gli si dà un problema dove c'è da applicare formule lo risolvono; se viceversa gli si chiede di applicare le formule che conoscono ma in un contesto diverso ... finito. Le formule le sanno, ma se le devono usare in applicazioni nuove... È proprio il senso che non c'è: rimane solo uno strumento matematico senza scopo.

Questa è la mia esperienza. Tra coloro che si occupano di didattica della fisica c'è una corrente — per ora ampiamente minoritaria — che sostiene la relatività spiegata come vi sto dicendo; ogni volta che ci s'incontra sorgono ampi dibattiti sull'impostazione e sui problemi che emergono, il che almeno dimostra che il problema è tutt'altro che risolto.

C'è una cosa che molti non vogliono riconoscere: che tutta la didattica della relatività fatta fino ad ora è fallimentare, a tutti i livelli, anche universitari. Tutti, anche tra voi, l'hanno studiata (voi siete quasi tutti fisici). Ma nella mia lunga carriera universitaria ho riscontrato che: per la struttura della materia la relatività non serve quasi mai; per la fisica sperimentale delle alte energie servono solo alcune formule (per i calcoli ci sono programmi già pronti). Resterebbero i teorici, ma i loro problemi sono a livello di complicazione tale che la relatività di cui ci stiamo occupando è troppo banale perché possa riguardarli. Il solo ambito di ricerca dove la relatività entra nei suoi fondamenti è la cosmologia; ma la gente che si occupa di cosmologia è poca, e quei pochi hanno altri problemi... Il risultato è che la comprensione della relatività non è argomento di studio e approfondimento per la gran parte dei fisici.

A livello di s.s.s. poi, i pochi tentativi fatti hanno dato qualche risultato interessante, ma solo perché si trattava di una cosa nuova, e una novità attira l'attenzione e stimola solo per questo gli allievi; ma non hanno dato risultati affidabili nel tempo. Un test lì per lì sembra positivo, i risultati matematici si possono anche ottenere, ma poi ... se approfondite, se chiedete dove entra una certa ipotesi ... buio.

Il mio tentativo è di basarsi su fatti sperimentali. Osservate che ho particolarmente insistito su questi: sugli strumenti attuali che permettono misure impossibili fino a poco tempo fa; sull'ordine di grandezza di certi effetti... Di tutto ciò non c'è traccia nell'insegnamento tradizionale, perché non c'è l'attenzione a prendere contatto con la fisica del fenomeno. Ci si sbriga dicendo che le trasformazioni galileiane non sono più vere vicino alla velocità della luce e si sostituiscono con le formule di Lorentz; da queste si pretende di dedurre tutto. Questo è vero ed anche bello per chi ha considerevole padronanza con lo strumento matematico, che può allora essere un aiuto al ragionamento; ma non è vero né bello per il 99% degli studenti.

Per la grandissima parte degli studenti, aggiungere strumenti matematici significa solo complicargli la vita, a scapito della comprensione. Peggio: significa convincerli che con la matematica si fa tutto. Mentre questa è fisica: la matematica va usata solo per l'indispensabile e nella forma indispensabile. La geometria dello spazio-tempo è la vera matematica necessaria nel nostro caso. La realtà è così.

Avete insegnato la geometria euclidea per studiare determinate cose; dite che il Teorema di Pitagora è utile, perché? Perché per l'ambito dei fenomeni che osservate va bene. Ora ci troviamo in un ambito di fenomeni diversi, nel quale occorre utilizzare una matematica diversa. Non si può sfuggire. Il resto sono sovrastrutture, più o meno utili o facili, ma che rischiano di nascondere la sostanza della questione.

Faccio un esempio pertinente: si potrebbe insegnare la geometria euclidea alla rovescia? Cioè partire col piano cartesiano, definire astrattamente una distanza e da lì ricavarsi tutta la geometria euclidea che si studia nella scuola? Qualcuno lo propone?

Sarebbe capovolgere la cultura: la storia non è andata così, l'interpretazione primaria della realtà è partita dalla geometria euclidea, e solo nel 17-mo secolo si è cominciato ad algebrizzare il tutto. Non a caso questo è stato lo sviluppo storico: infatti la geometria analitica è utile e comoda in molti casi, ma non sempre; non si può o non è opportuno fare tutto con la geometria analitica.

Su questo argomento delle geometria euclidea ho un esempio fresco fresco che ho incontrato in un'area di discussione in Internet.

Problema:

Si consideri un triangolo qualsiasi, e due generici segmenti uscenti da due vertici, come in fig. 9–3. Note le aree dei triangoli che si formano (ad es. 5, 10, 8) determinare l'area della parte rimanente del triangolo.

Ho visto uno che per risolverlo ha fatto molti conti e molti passaggi; ha usato la trigonometria e la geometria analitica... E siccome ha fatto molti conti, ha anche sbagliato. Volendo si può fare con la trigonometria o con la geometria analitica, ma sono strade complicate e pericolose per la facilità di errori. C'è invece una soluzione sintetica molto semplice: trovatela da soli.

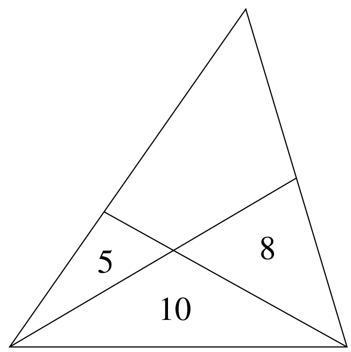

fig. 9–3

Muoni dai raggi cosmici

Questo è ancora un esperimento sui muoni, che però utilizza quelli naturali, prodotti dai raggi cosmici. È l'esperimento descritto nel film PSSC *La dilatazione del tempo*. Si misura il numero N_0 di muoni che ad alta quota, all'altezza h, attraversano verticalmente, in un certo tempo, una certa superficie; poi si misura quanti ne arrivano al suolo (N) nello stesso tempo e su una superficie uguale.

Si suppone ovviamente che la pioggia di muoni sia uniforme, sia nel tempo, sia nello spazio. Inoltre si suppone che sia trascurabile l'interazione dei muoni con l'atmosfera. Questo non è proprio vero, ma il numero di muoni che si perdono per tale ragione è comunque piccolo. Si vede che $N < N_0$, il che si spiega, perché ci aspettiamo che un certo numero di muoni decadano "in volo."

I muoni in questione hanno velocità molto vicina a c; quindi per giungere a terra dalla cima della montagna impiegano un tempo $t = h/c$. Coi dati dell'esperimento ($h = 1800\,\mathrm{m}$) si trova $t = 6\,\mu\mathrm{s}$, circa tre volte la vita media; quindi al livello del mare ne dovrebbero arrivare pochissimi. Invece il numero al suolo è ben superiore al previsto, il che può essere interpretato dicendo che la vita media dei muoni in volo è molto maggiore di $2\,\mu\mathrm{s}$. Pertanto questo è il classico caso in cui si può parlare di dilatazione del tempo.

Se invece non vogliamo usare tale idea, come possiamo interpretare il risultato? Dato che noi vogliamo ricondurre tutto alla geometria dello spazio-tempo e alle lunghezze delle curve, dovremo anzitutto identificare due orologi diversi, le cui curve orarie hanno lunghezze diverse. La situazione è rappresentata in fig. 9–4, dove ho riportato il tempo in ascissa e la coordinata spaziale (quota) in ordinata, perché così si resta più vicini alla disposizione sperimentale.

Se prendiamo le unità di misura in modo che la propagazione della luce sia descritta da una retta con pendenza di 45°, la pendenza della linea oraria dei muoni sarà un po' meno di 45°. Il muone parte dalla cima della montagna (A) e giunge a terra (C) seguendo quella linea oraria: il suo tempo proprio è la lunghezza della linea AC. Dovrò confrontarlo col tempo di un orologio fermo nel laboratorio, che è rappresentato da una linea oraria orizzontale BC.

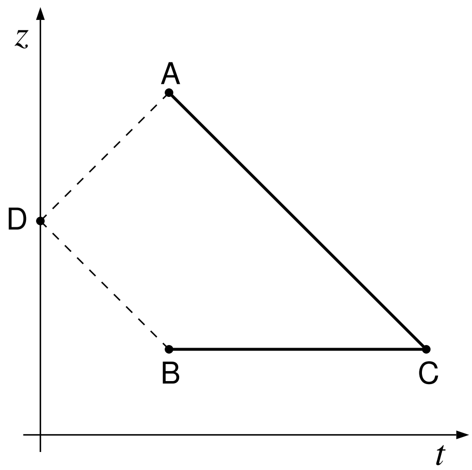

fig. 9–4

Si vede dalla figura che le due linee orarie arrivano nello stesso punto, ma non partono dallo stesso punto: l'orologio è fermo nel laboratorio, mentre il muone parte dalla cima del monte. Perciò il confronto delle lunghezze non è immediatamente significativo. Posso pensare a un secondo orologio fermo in cima alla montagna, ma sorge allora il problema di sincronizzare i due orologi. Una soluzione è di far partire, da un punto D a metà strada, un segnale radio di sincronismo che viaggi alla velocità della luce, e che giunga contemporaneamente alla base e alla cima: così facendo ho due linee orarie dal via dell'esperimento alla fine, che partono dallo stesso punto e giungono allo stesso punto nello spazio-tempo: DAC e DBC.

Per i tratti DA e DB dei segnali radio, la lunghezza è zero (a parte che si tratta comunque di due tratti uguali). Per i rimanenti tratti utilizziamo le solite formule: indicando con v la velocità dei muoni, con $\Delta\tau$ la lunghezza di AC e con $\Delta t = 6\,\mu\text{s}$ quella di BC:

$$\Delta\tau = \Delta t\,\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{9–2}$$

Come si vede, $\Delta\tau < \Delta t$, e se v è vicina a c può essere anche parecchio più piccolo di $2\,\mu\text{s}$ (vita media dei muoni a riposo). Questo spiega perché un buon numero di muoni riescono ad arrivare a terra.

Non c'è molto di più da dire. La cosa interessante è che anche in questo caso per interpretare correttamente l'esperimento bisogna confrontare due curve che partono dallo stesso punto e giungono allo stesso punto nello spazio-tempo. Si tratta di mostrare che hanno lunghezze diverse (come al solito, quella che sembra più corta è in realtà più lunga).

L'esperimento di Briatore e Leschiutta

Esaminiamo ora un altro esperimento, un altro pezzo della fisica degli orologi relativistici. Questo esperimento è legato al redshift gravitazionale, ma invece di misurare la differenza tra la frequenza della radiazione emessa e quella della radiazione ricevuta, misura direttamente il tempo. Per noi è importante, perché direttamente collegato alla rappresentazione geometrica che abbiamo usata.

L'esperimento è stato fatto in diversi luoghi e in diverse varianti: noi prenderemo in considerazione quello fatto da Briatore e Leschiutta nel 1975, fra Torino e un laboratorio in montagna, sul gruppo del Cervino. Anche qui, per vedere qualcosa ci vogliono orologi atomici.

Due orologi identici vennero posti uno a Torino, nel laboratorio dell'Istituto "Galileo Ferraris" e uno sul Plateau Rosà, a quota 3250 m rispetto a Torino. Com'è ovvio, i due orologi non differivano solo in quota: la loro distanza in linea d'aria era di circa 90 km. L'orologio di Torino (1) emetteva un segnale di sincronismo iniziale; dopo 68 giorni (la durata dell'esperimento) emetteva un segnale di sincronismo finale. Risultò che l'orologio 1 alla fine era indietro di $2.4\,\mu\text{s}$ rispetto all'orologio 2.

Cominciamo col dire che ovviamente gli orologi vanno bene: sono stati ampiamente collaudati e controllati; l'orologio 2, una volta riportato a Torino, marciava d'accordo con l'altro. Sarebbe assai strano se eventuali danneggiamenti, dovuti al trasporto da Torino al Plateau Rosà, si fossero esattamente compensati nel viaggio di ritorno. Nei due laboratori tutto è uguale: grandezze come pressione, temperatura, ecc., possono essere mantenute uguali con ovvi accorgimenti; l'unica cosa inevitabilmente diversa è l'intensità del campo gravitazionale, di cui riparleremo fra poco.

La propagazione delle onde radio nell'atmosfera non può avere apprezzabili differenze fra l'inizio e la fine. Per spiegare un ritardo di $2.4\,\mu$s con una differente velocità di propagazione, bisognerebbe assumere una variazione di velocità assolutamente non credibile, se si tiene conto che in $2.4\,\mu$s la luce percorre 720 metri, cioè quasi l'1% della distanza fra i due orologi.

Nei due laboratori, come ho già detto, è tutto uguale, tranne il campo gravitazionale (non siamo ancora riusciti a modificarlo a piacere) ma la variazione della gravità da sola non è sufficiente a spiegare il fenomeno. Abbiamo discusso, all'inizio del corso, l'eventuale influenza del campo gravitazionale sugli orologi atomici, e vi ho assicurato che è trascurabile: lo era nel caso dell'esperimento H–K, ma qui la differenza è ancora più piccola, com'è facile calcolare. Occorre dunque trovare un'altra spiegazione della differenza, che è sicuramente genuina.

Sembra naturale concludere che "l'orologio più in alto va più svelto." Ma come vedrete, l'interpretazione che daremo sconsiglia di usare tale frase. L'ho citata perché è largamente usata; ma tenete presente, perché è un punto centrale del mio modo di presentare la relatività, che dovremo vietarci di dire cose del genere.

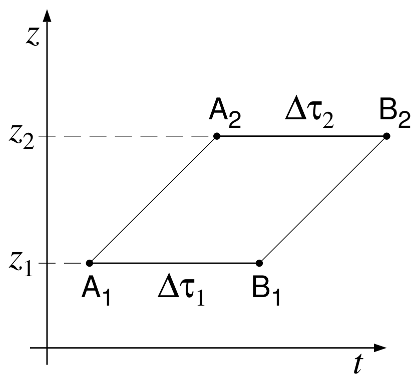

fig. 9–5

Per procedere nella spiegazione, disegniamo un diagramma spazio-tempo dell'esperimento (fig. 9–5). Anche in questo caso metto il tempo in ascisse e la coordinata spaziale in ordinate, per le stesse ragioni di prima. Si potrebbe anche fare invertendo gli assi: è chiaro che non cambierebbe niente. Però è forse il caso di fare un'osservazione didattica: per uno studente non è affatto facile interpretare una figura in cui gli assi sono scambiati rispetto a come lui è abituato. Se non ci credete, fate una prova facendo disegnare la parabola $y = x^2$, poi disegnate la stessa parabola con gli assi scambiati, e chiedete se saprebbero scrivere l'equazione della nuova curva. Ho visto che anche all'università molti studenti hanno difficoltà in tali situazioni.

L'orologio 1 sta fermo alla quota z_1; l'orologio 2 sta fermo alla quota z_2: le loro linee orarie sono rette orizzontali. Inizia l'esperimento. L'orologio 1 emette il segnale di partenza (evento A_1) che viaggia alla velocità della luce, e quando giunge in z_2 fa partire l'orologio 2 (evento A_2).

Dopo un certo tempo, l'orologio 1 manda il segnale di fine esperimento (evento B_1); questo giunge all'altro orologio (evento B_2) e termina la misura. Ciò che conta è che i segnali d'inizio e fine esperimento viaggino alla stessa velocità; non importa se quella della luce o no, basta che sia la stessa. Questo mi permette di dire che le curve orarie dei segnali sono rette parallele.

La figura $A_1A_2B_2B_1$ è un parallelogramma, in quanto ha i lati opposti paralleli; e noi sappiamo che i lati opposti di un parallelogramma sono uguali. Quindi anche i tempi misurati dai due orologi, che sono le lunghezze $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_2$ risp. di A_1B_1 e di A_2B_2 debbono essere uguali. Ma l'esperimento ci dice che $\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$!

Qui è proprio il caso di applicare un principio metodologico generale (dovuto a Galileo): se dopo una serrata critica l'esperimento regge, e i nostri ragionamenti o teorie portano a conclusioni differenti, non c'è che una strada: cambiare ragionamenti o teorie. Il dato che rimane è che l'orologio più in alto segna un tempo più lungo; l'interpretazione è ancora da costruire.

La realtà è diversa dalla sua rappresentazione

Per cominciare, occorre aver chiaro che un diagramma spazio-tempo *non è* lo spazio-tempo: è una sua rappresentazione, una mappa, una "carta geografica" degli eventi nello spazio-tempo. Ci si può quindi chiedere: questa mappa è fedele? Dico che una mappa è fedele se la misura delle distanze sulla carta torna con quelle reali: se il rapporto fra una distanza misurata sulla carta e una misurata nella realtà è *costante* (la *scala* della carta).

È ben noto che le carte geografiche che rappresentano la Terra non sono mai fedeli, perché la Terra è (circa) sferica e non c'è modo di rappresentare fedelmente una superficie sferica su un piano. Si può approssimare, tanto meglio quanto più ci si limita a una porzione piccola, ma non si otterrà mai una mappa fedele.

Osservate che è possibile fare una mappa non fedele anche di una superficie piana: basta deformare il disegno in qualunque modo. Si tratta sempre di una mappa, finché la corrispondenza punto a punto rimane biunivoca (e continua, differenziabile ...); ma la deformazione altera i rapporti delle distanze. Ci possono anche essere motivi validi per questo; ma mentre di una superficie piana è possibile, volendo, tracciare una mappa fedele, per una superficie sferica ciò non è proprio possibile.

Vediamo ora una figura che spiega perché avevo proposto il calcolo del grado di longitudine: calcolare la lunghezza di 1° di parallelo a due latitudini diverse. La fig. 9–6 mostra la carta d'Italia, rappresentata con paralleli equidistanti e meridiani equidistanti, ortogonali fra loro. Una carta così fatta è molto comoda per certi scopi: se voglio longitudine e latitudine di un punto basta un'interpolazione lineare.

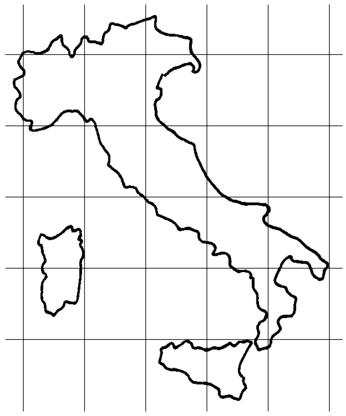

fig. 9–6

Naturalmente la carta non è fedele: se fissate due meridiani e ne misurate la distanza in Sicilia e poi dalle parti di Bolzano, sulla carta la distanza è sempre la stessa; se invece andate a fare le misure reali (che non è una cosa facile, specialmente dalle parti di Bolzano, ma i geodeti sanno fare questo e altro) trovate che è molto diversa, come abbiamo già calcolato. Non è certo una grande scoperta: sappiamo bene che i meridiani si avvicinano andando verso il polo. Ma il punto importante è che non solo questa particolare mappa non è fedele: in certi casi, come per la Terra, non si può fare diversamente. Si può usare una rappresentazione diversa, delle tante che sono state inventate dai geografi, ma sarà sempre infedele.

Insegnamento da trarre: quando si vede un disegno non bisogna prenderlo per la realtà: un disegno è una rappresentazione convenzionale della realtà e *può non essere fedele*. Per sapere se è fedele o no c'è un solo modo: confrontarlo con la realtà.

Riprendiamo allora il disegno di prima, quello dell'esperimento B–L. Ora che siamo ammaestrati a guardare il disegno come una carta geografica dello spazio-tempo, ci rendiamo conto che il fatto che sulla carta appaia $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$ non dimostra niente: non vuol necessariamente dire che quei due tempi siano uguali; può darsi che sia vero ma può darsi di no. Se voglio accertarlo devo fare l'esperimento. Come abbiamo visto, le misure mi dicono che i tempi sono diversi: $\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = 2.4\,\mu\mathrm{s}$ su 68 giorni. La variazione relativa è circa $3 \cdot 10^{-13}$, che è molto poco; ma comunque sono diversi: quindi la fig. 9–5 *non è una mappa fedele dello spazio-tempo.*

Il fatto che la differenza sia così piccola ci spiega perché l'esperimento è stato possibile solo da quando esistono degli orologi atomici che siano allo stesso tempo trasportabili e abbiano la precisione necessaria. Il fatto che la mappa non è fedele c'insegna che la geometria dello spazio-tempo è un po' meno semplice di come appare sul disegno. Uno può dire che non gli piace, ma c'è poco da fare: il mondo è fatto in quel modo. La presenza del campo gravitazionale (è chiaro che è lui il responsabile di questo fatto, in quanto l'unica differenza significativa fra i due orologi è la loro quota) modifica la geometria dello spazio-tempo.

Esperimento B–L e redshift gravitazionale

L'esperimento B–L è la stessa cosa, in termini di orologi, dell'esperimento di Pound–Rebka–Snider in termini di frequenza, che abbiamo già discusso; quindi ce lo potevamo anche aspettare. Ricordate che l'esperimento di redshift gravitazionale l'abbiamo giustificato col PE, e da lì si vede che l'effetto dipende dalla gravità: il rif. accelerato nello spazio vuoto equivale a quello sulla Terra, dove c'è la gravità.

L'esperimento B–L è del tutto analogo, anche se fatto con orologi anziché con la frequenza della radiazione: sulla Terra, in presenza di gravità, si deve avere il ritardo mostrato dall'esperimento. Se invece lo stesso esperimento venisse fatto su una grande astronave, a motori spenti, nello spazio remoto (quindi in assenza di campo gravitazionale) un orologio a prua e uno a poppa, anche se molto distanti tra loro, non mostrerebbero nessuna differenza.

Vediamo più da vicino la relazione tra i due esperimenti. Supponiamo che nell'esperimento B–L, oltre ai segnali d'inizio e fine, venga inviato tra i due orologi anche un treno di onde monocromatiche: sia ν_1 la frequenza misurata alla partenza. Se il treno consiste di N cicli, sarà

$$N = \nu_1 \Delta\tau_1.$$

Gli stessi N cicli vengono ricevuti all'arrivo, ma con una frequenza ν_2 e nel tempo $\Delta\tau_2$: dunque

$$N = \nu_2 \Delta\tau_2.$$

Confrontando:

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}. \tag{9–3}$$

Come sappiamo, $\nu_2 < \nu_1$ e l'esperimento B–L ci mostra che $\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$, come richiesto dalla (9–3).

Parlando del redshift gravitazionale avevamo dato l'espressione (7–1) per la variazione di frequenza:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2}$$

e poi, nella discussione del problema 8.3, avevamo osservato che gh non è che la differenza ΔV del potenziale gravitazionale, per cui

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta V}{c^2}.$$

Ora la (9–3) ci mostra che tempi e frequenze nei due esperimenti vanno in proporzione inversa, per cui le variazioni relative (che sono molto piccole) saranno opposte. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\delta\Delta\tau}{\Delta\tau} = -\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta V}{c^2}. \tag{9–4}$$

Lo spazio-tempo è curvo

Vediamo di concludere, riassumendo i concetti fondamentali. L'esperimento B–L ci mostra che l'usuale mappa spazio-tempo non è fedele. Le carte geografiche della Terra non sono mai fedeli perché la superficie della Terra è curva. Conclusione: lo spazio-tempo è curvo. La conclusione è giusta, ma il modo di arrivarci è sbagliato. La mia affermazione a questo punto suonerà strana, e debbo quindi giustificarla.

I passi principali sono:

1) l'esperimento B–L ci dice che la mappa spazio-tempo non è fedele;
2) la superficie della Terra è curva, quindi non se ne possono fare mappe fedeli (il termine matematico è "isometriche").

Tra le due situazioni c'è però una grande differenza: per la Terra io *non posso* fare una mappa fedele, perché la superficie della Terra è *curva* e quindi non è rappresentabile fedelmente su un piano. (Notate che quando dico "curva" intendo sferica, non ad es. cilindrica. Una porzione di superficie cilindrica è isometrica a una porzione di piano, e infatti è sviluppabile sul piano senza deformazioni.) È essenziale il fatto che *non esiste* mappa fedele della Terra.

Invece nel caso dell'esperimento B–L noi abbiamo solo scoperto *una* mappa non fedele, ma questo non dimostra che non ne esista alcuna. Può essere colpa nostra, della rappresentazione che abbiamo scelta. L'esperimento c'insegna che in presenza della gravità si ottiene una mappa non fedele: ma allora, se non ci fosse la gravità si potrebbe creare una mappa fedele. Dunque la soluzione è semplice: basta porsi in un RI, in caduta libera, e allora, mancando la gravità, avremo una mappa fedele dello spazio-tempo.

Ma questo è proprio vero? Possiamo davvero far sparire la gravità? Localmente sì, ma in presenza di un campo gravitazionale non uniforme vi sono sempre quei piccoli effetti che sappiamo (le forze di marea) che non è possibile cancellare.

Del resto, anche per le carte geografiche, se prendiamo una piccolissima porzione della Terra possiamo avere una rappresentazione così prossima a essere fedele, che gli strumenti non rivelino differenza tra le misure sulla carta e sul terreno: localmente anche una superficie curva può essere rappresentata fedelmente. (In termini matematici, questa proprietà si esprime dicendo che si tratta di una *varietà riemanniana*.) Però su grande scala ciò non è possibile.

Nello spazio-tempo la situazione si presenta proprio nello stesso modo, perché posso far sparire la gravità approssimativamente, ma non esattamente. Che succede se faccio l'esperimento di Pound–Rebka in un satellite? Avrò un piccolo effetto di redshift (l'abbiamo calcolato nel problema 8–3), e se c'è questo avrò anche un piccolo risultato per l'esperimento B–L. Sarebbe un esperimento fantascientifico, perché l'effetto è assai piccolo, e occorrerebbe un satellite immenso, orologi estremamente raffinati, ecc.; ma dal momento che il campo gravitazionale prodotto dalla Terra, dal Sole, o da qualunque altro corpo, non è uniforme, non c'è modo di farlo sparire completamente. Di conseguenza *non è possibile disegnare una mappa fedele dello spazio-tempo.*

Notate che l'analogia non è superficiale: è profonda, si tratta proprio della stessa cosa. Quindi *lo spazio-tempo è curvo.*

Questa è una delle grandi scoperte di Einstein: la gravità implica una curvatura dello spazio-tempo. Come vedete, si riesce ad arrivare a conclusioni assai profonde della RG con un'analisi di poche cose, purché siano quelle giuste. Solo 25 anni fa questi discorsi non si sarebbero potuti fare, perché gli esperimenti non c'erano; si sarebbe dovuto ricorrere a ragionamenti molto più complicati. Ancor più dobbiamo ammirare Einstein, che ci è arrivato 80 anni fa, del tutto senza esperimenti…

È possibile parlare agli studenti di queste cose. Naturalmente so bene cosa potrete obiettare: si tratta di cose difficili, non tanto per i conti o le formule, quanto per l'astrazione e i ragionamenti. Occorre saper cambiare punto di vista; svincolarsi da concezioni radicate, direi quasi dogmatiche. Ma tutto sta a vedere cosa s'intende per maturità: se s'intende che si dev'essere in grado di affrontare questi ragionamenti oppure no; se si deve riuscire a seguire certi ragionamenti astrusi dei filosofi e questi no. Ma ne riparleremo ancora.

Problemi

1. Un'astronave A si trova a motori spenti nello "spazio profondo," molto lontana da qualsiasi stella. Dall'astronave parte una scialuppa S di esplorazione: essa viaggia in linea retta, con accelerazione costante rispetto ad A in modulo pari a g, per 30 giorni (tempo di A). Poi cambia il verso dell'accelerazione, sempre tenendo costante il modulo, per altri 60 giorni. Infine inverte ancora l'accelerazione per 30 giorni.

a) Dove si trova S dopo 60 giorni (tempo di A)?

b) E dopo 120 giorni?

c) Quanto tempo è trascorso, nel secondo caso, secondo l'orologio di bordo di S?

2. Risolvere per via sintetica il problema del triangolo.

3. Se i muoni prodotti dai raggi cosmici, nell'esperimento che abbiamo descritto, hanno velocità $v = 0.9999\,c$, quanto vale il rapporto N/N_0 tra quelli contati sul monte e quelli contati a livello del mare? (I dati sono: dislivello $h = 1800\,\mathrm{m}$; vita media dei muoni $\tau_\mu = 2\,\mu\mathrm{s}$.)

4. Quali altri "errori" ci sono nella carta di fig. 9–6, oltre la variazione di scala lungo i paralleli a seconda della latitudine?

Risposte

Problema 1. (L'astronave e la scialuppa):

Le indicazioni sull'astronave servono a stabilire che la possiamo trattare come un RI. Inoltre l'accelerazione della scialuppa è definita *rispetto ad* A, quindi dal punto di vista cinematico la relatività non c'entra: la legge del moto di S è quella solita del moto uniformemente accelerato.

Per inciso (ma è irrilevante per il problema) per far muovere le scialuppa in quel modo i suoi motori non dovranno esercitare una spinta costante: di questo riparleremo nell'ambito della dinamica relativistica, e in particolare discuteremo perché ciò *non significa* che la massa della scialuppa aumenta con la velocità.

Alla fine dell'intervallo $T = 30$ giorni $= 2.6 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$, la scialuppa avrà una velocità $gT = 2.5 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$, e avrà percorso uno spazio $\frac{1}{2}\,g\,t^2 = 3.3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{m} \simeq 220\,\mathrm{UA}$. La velocità si annullerà al tempo $2T$, quando lo spazio percorso sarà doppio. Dato che l'accelerazione negativa continua, al tempo $3T$ la scialuppa avrà velocità $-gT$, e infine, al tempo $4T$, sarà ferma rispetto ad A.

Perciò

a) Dopo 60 giorni la scialuppa sarà a 440 UA dall'astronave.

b) La simmetria del moto di andata e ritorno dice subito che dopo 120 giorni S si trova proprio accanto ad A.

In formule, abbiamo

$$v(t) = \begin{cases} g\,t & (0 \le t \le T) \\ g\,(2T - t) & (T \le t \le 3T) \\ g\,(t - 4T) & (3T \le t \le 4T). \end{cases} \qquad (9\text{–}5)$$

Il calcolo del tempo proprio di S si riduce all'integrale (8–7):

$$\Delta\tau = \int_0^{4T} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}\, dt$$

che con le (9–5) per $v(t)$ si può esprimere in funzioni elementari. Però dato che $gT/c = 6.9 \cdot 10^{-3}$ è ragionevole sviluppare in serie la radice, conservando solo i termini fino al secondo ordine in gT/c. Inoltre, data la simmetria del moto, basta considerare l'intervallo $[0, T]$ e poi moltiplicare per 4 il risultato.

Abbiamo dunque:

$$\Delta\tau \simeq 4\int_0^T \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt = 4T - \frac{2}{c^2}\int_0^T v^2\, dt = 4T - \frac{2g^2T^3}{3c^2}.$$

e mettendo i numeri

$$\Delta\tau \simeq 4T - 84\,\mathrm{s}.$$

c) L'orologio di bordo di S sarà indietro di 84 secondi rispetto a quello di A.

Problema 2. (Problema del triangolo):

Sia ABC il triangolo, D un punto del lato AB, E un punto del lato AC, F l'intersezione di CD e BE (fig. 9–7). Conosciamo le aree dei triangoli BCF, BDF, CEF. Congiungiamo A con F. Le aree dei triangoli ABF, AEF stanno nello stesso rapporto di BF ad EF, perché rispetto a quelle basi i due triangoli hanno la stessa altezza. Lo stesso è vero per BCF, CEF: dunque

$$\text{area(ABF)} : \text{area(AEF)} = 10 : 8.$$

Con ragionamento del tutto simile si trova anche

$$\text{area(ACF)} : \text{area(ADF)} = 10 : 5.$$

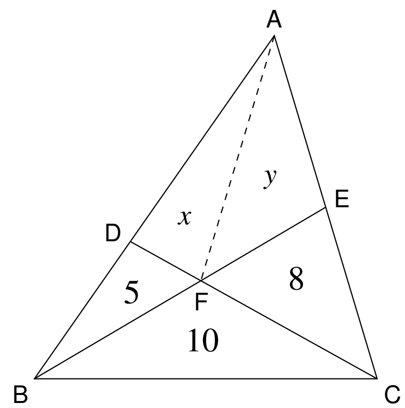

fig. 9–7

Indichiamo con x, y le aree di ADF, AEF rispettivamente: abbiamo allora

$$(x + 5) : y = 10 : 8$$
$$(y + 8) : x = 10 : 5$$

da cui $x = 10$, $y = 12$.

Come si vede, la chiave della soluzione sta nell'aggiunta di un elemento ausiliario alla figura, in questo caso il segmento AF. È una delle strategie indicate da G. Polya in quel prezioso libretto dal titolo *How to solve it* (Princeton 1971).

Problema 3. (Muoni dai raggi cosmici):

Il problema è immediato: basta calcolare $\Delta\tau$ con la (9–2), con $\Delta t = h/v \simeq h/c$, e poi si avrà

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{\tau_\mu}\right).$$

Dato che v/c è molto vicino a 1, col calcolo diretto si perdono un po' di cifre significative: 4 in questo caso, il che non è grave. Se si volesse evitare il problema, basterebbe scrivere
$$1 - v^2/c^2 = (1 - v/c)(1 + v/c)$$
e poi calcolare la radice quadrata.

Il risultato è $N/N_0 = 0.96$, contro un rapporto 0.05 che si avrebbe se $\Delta\tau$ fosse uguale a Δt (se non ci fosse "dilatazione del tempo").

Problema 4. (Errori nella carta di fig. 9–6):

Cominciamo con l'osservare che sulla carta paralleli e meridiani si tagliano ad angolo retto, come sulla sfera; dunque gli angoli vengono rispettati in questa rappresentazione?

La risposta è negativa, ma non è immediato vederlo. Osserviamo in primo luogo che sulla sfera la distanza tra due punti alla stessa longitudine, e che differiscono per $\Delta\varphi$ in latitudine, è $R\,\Delta\varphi$; invece la distanza tra due punti alla stessa latitudine, e la cui differenza in longitudine è $\Delta\lambda$, è *circa* $R\cos\varphi\,\Delta\lambda$.

Perché "circa"? La ragione è che quella scritta è l'esatta lunghezza dell'arco di parallelo, ma la distanza va presa lungo un cerchio massimo, che non coincide col parallelo (questo lo vedremo meglio nella prossima lezione). Però per piccole distanze l'approssimazione è lecita.

Se ora prendiamo due punti vicini, che differiscono tanto in longitudine quanto in latitudine (fig. 9–8), il segmento che li unisce formerà col meridiano un angolo α tale che
$$\Delta\varphi\ \mathrm{tg}\,\alpha = \cos\varphi\,\Delta\lambda.$$

La carta è stata costruita riportando in ascisse le latitudini, con un certo fattore di scala che chiamerò k_φ, e in ordinata le longitudini, con fattore di scala k_λ. Perché due diversi fattori di scala? Perché non c'è motivo che siano uguali, ma anzi può convenire prenderli diversi, scelti in modo da ottenere una rappresentazione non troppo infedele di una certa regione della Terra.

A questo scopo, fissata una latitudine $\bar\varphi$ della carta, converrà fare in modo che quando $R\,\Delta\varphi = R\cos\bar\varphi\,\Delta\lambda$ sia anche $k_\varphi\Delta\varphi = k_\lambda\Delta\lambda$; il che richiede $k_\lambda = k_\varphi\cos\bar\varphi$. Per es. per la carta di fig. 9–6 si è preso $\bar\varphi = 42°$ e quindi $k_\lambda = 0.74\,k_\varphi$.

Stando così le cose, l'angolo α sulla carta diventerà un α' tale che
$$k_\varphi\,\Delta\varphi\ \mathrm{tg}\,\alpha' = k_\lambda\,\Delta\lambda$$
ossia
$$\Delta\varphi\ \mathrm{tg}\,\alpha' = \cos\bar\varphi\,\Delta\lambda$$
e si vede che solo al centro della carta, per $\varphi = \bar\varphi$, avremo $\alpha' = \alpha$: sarà $\alpha' \gtrless \alpha$ a seconda che $\varphi \gtrless \bar\varphi$.