LEZIONE 13

L'inerzia dell'energia

Nel settembre 1905 Einstein pubblica un articoletto di 3 pagine, il cui titolo, tradotto, è: *L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia*? È la scoperta di quella che poi verrà spesso chiamata, assai impropriamente, "equivalenza massa-energia." Dico impropriamente, perché questa seconda espressione, come vedremo più avanti, si presta a molteplici equivoci. Invece il titolo di Einstein spiega l'idea assai meglio di tanti discorsi confusi sull'equivalenza che capita di leggere qua e là.

Einstein riprende l'argomento anche in lavori successivi, e discute diversi esempi: sarebbe molto interessante, ma anche molto lungo, esaminarli tutti. È un procedimento frequente in Einstein (e che ha in comune con Galileo) quello di esporre diversi esperimenti ideali, che seguono strade apparentemente eterogenee per arrivare allo stesso risultato. Egli è consapevole di dover creare una nuova visione delle cose, e quindi di non potersi limitare a una sola dimostrazione, sia pure impeccabile; cerca invece di far vedere che tutto è collegato insieme, che tutto punta a quel certo risultato.

Einstein sa che di fronte a un'idea rivoluzionaria la semplice dimostrazione non basta, ma occorre un accumulo di prove; inoltre c'è chi rimane più convinto — intendo intuitivamente convinto — da una certa dimostrazione e chi da un'altra. Perciò ne escogita due o tre differenti e mostra che da qualunque parte si guardino le cose, la fisica che conosciamo ci obbliga a una data conclusione, che non possiamo eludere. Neppure possiamo pensare che ci sia un errore nel ragionamento: se anche il primo fosse sbagliato, ce n'è un altro che porta allo stesso risultato per una strada indipendente, e così via.

Fra i diversi argomenti che portano all'inerzia dell'energia, ho scelto di esporre il primo di quelli di Einstein, ma un po' variato, in una forma che mi sembra faciliti la presentazione didattica. I lavori di Einstein non sono ovviamente per studenti di liceo; sebbene non siano difficili da leggere, sono pur sempre scritti per dei fisici, e perciò occorre semplificarli.

Il ragionamento consiste in due esperimenti ideali, il primo dei quali è relativo a una situazione in cui la meccanica newtoniana spiega tutto quello che succede. Il secondo è strettamente parallelo al primo salvo per un particolare; ma analizzandone le conseguenze si è costretti ad ammettere l'inerzia dell'energia.

Un esperimento con i proiettili

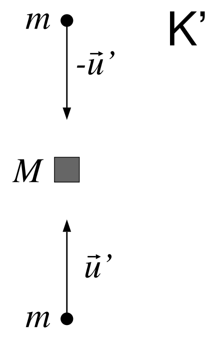

fig. 13–1

L'idea in tutti e due i casi è quella di studiare un urto anelastico. Anticipando il risultato, il punto centrale è che un urto anelastico implica automaticamente una variazione di massa. Nel primo esperimento si ha questa situazione: su un oggetto di data massa M vengono sparate due masserelle m. Si analizza l'esperimento in due diversi rif.: uno, che diremo K$'$, è quello nel quale M è fermo e le masserelle m hanno velocità di modulo u', dirette verticalmente e opposte fra loro (fig. 13–1); il secondo è un rif. K, rispetto al quale K$'$ si muove in direzione orizzontale, verso destra (fig. 13–2). Nel rif. K la situazione si presenta così: M ha una velocità v, mentre i due proiettili hanno velocità oblique, di modulo u, la cui componente verticale è $\pm u'$ e quella orizzontale v (siamo in meccanica newtoniana).

Vediamo ora che cosa succede dopo l'urto, in ciascuno dei due rif. Anche nella meccanica newtoniana vale il PR: quindi tutte le leggi della meccanica valgono in entrambi i rif., e noi potremo prevedere l'esito dell'esperimento sia in K, sia in K$'$.

Ragioniamo in K$'$. I proiettili arrivano nel blocco M e ci restano incastrati: urto anelastico. All'inizio il blocco è fermo, mentre i due proiettili hanno la stessa massa e velocità opposte: dunque la q. di moto totale prima dell'urto è nulla. Il sistema complessivo (blocco più proiettili che ci sono dentro) dopo l'urto ha una q. di moto totale uguale a quella iniziale (conservazione della q. di moto). Conclusione: il blocco resterà dov'era. Alla fine avremo dunque un unico oggetto fermo, la cui massa è $M + 2m$.

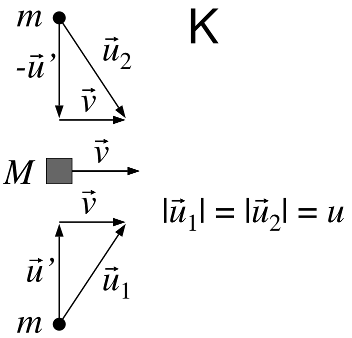

fig. 13–2

Passiamo ora al rif. K. In questo rif. M si muove verso destra, e quindi inizialmente ha una q. di moto Mv, diretta orizzontalmente. I due proiettili hanno velocità oblique, le cui componenti orizzontali sono entrambe v, mentre quelle verticali sono opposte. Ne segue che la componente verticale della q. di moto totale è zero, mentre la componente orizzontale vale $Mv + 2mv = (M + 2m)\,v$. Ora i proiettili colpiscono M e ci rimangono incastrati dentro: che succede?

Il motivo per discutere in dettaglio un fenomeno che si spiega bene con la meccanica newtoniana è di far vedere con chiarezza qual è la logica del ragionamento, in un caso in cui si può stare tranquilli sulle conclusioni. Fra poco faremo esattamente gli stessi ragionamenti, ma in una situazione nuova. Un tal modo di procedere ha un valore didattico, perché quando il nuovo ragionamento ci porterà a un risultato strano potremmo dubitare di aver sbagliato in qualche punto; ma se abbiamo la guida di un caso in cui il ragionamento ha funzionato, questo ci rassicura.

Il nocciolo del discorso è che noi abbiamo due modi per prevedere quello che deve succedere in K. Il ragionamento A usa direttamente la conservazione della q. di moto nel rif. K, che è anch'esso inerziale: la q. di moto dopo che i proiettili sono arrivati nel corpo M è la stessa di prima, cioè $(M + 2m)\,v$. La massa complessiva del blocco coi proiettili dentro è ora $M + 2m$: la sua velocità v_{f} dev'essere tale che la q. di moto resti la stessa, quindi $v_{\mathrm{f}} = v$. Concludo che in questo esperimento *la velocità del blocco non cambia.*

Il ragionamento B usa la trasf. dal rif. K$'$ a K. L'analisi fatta in K$'$ ci ha portati a concludere che dopo l'urto il blocco rimane fermo. Allora anche in K la velocità dopo l'urto non deve cambiare: sarà sempre quella di un oggetto fermo rispetto a K$'$, cioè v.

Due commenti sono qui opportuni. Il primo è che nell'esperimento secondo la meccanica newtoniana l'energia (meccanica) non si conserva. Non abbiamo dovuto tener conto di questo fatto, ma è bene averlo presente per il resto della discussione.

Il secondo commento riguarda la logica generale del discorso. Noi abbiamo usato i seguenti fatti: che tutti e due i rif. sono inerziali, che la trasf. da un rif. all'altro si sa fare (basta aggiungere $\vec{v}$ a tutte le velocità), che la q. di moto si conserva in entrambi. Nella meccanica newtoniana tutte queste cose sono coerenti tra loro: si capisce perciò che i due ragionamenti dovessero dare lo stesso risultato. Adesso faremo però un esperimento — sempre ideale — in cui accade qualcosa di nuovo.

Un esperimento con la radiazione

Il nuovo esperimento è esattamente lo stesso di prima, salvo che invece di sparare dei proiettili di massa m facciamo arrivare su M due pacchetti di radiazione e.m., di energia ε'. Supponiamo che M sia "nero," ossia completamente assorbente, e ci domandiamo che cosa succede. Anche in questo caso esamineremo l'esperimento nei due rif.

Naturalmente è essenziale per il seguito sapere che una radiazione e.m. trasporta q. di moto, e più esattamente che a un'energia ε' della radiazione è associata una q. di moto ε'/c. Sul piano didattico, ci sono diverse strade possibili per arrivare a quest'idea. La prima è la pressione di radiazione, che può essere introdotta per es. prendendo spunto dalla formazione della coda di una cometa; ma un conto è parlarne, un conto è dimostrarla.

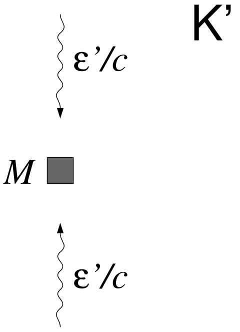

fig. 13–3

Provvisoriamente si potrebbero esibire anche in questo caso alcuni fatti sperimentali, e non pretendere di più. Solo per completezza, darò alla fine della lezione una dimostrazione non del tutto generale, ma forse accessibile.

Nel rif. K$'$ i due pacchetti di radiazione portano dunque q. di moto ε'/c, ma in versi opposti (fig. 13–3); quando vengono assorbiti la q. di moto di M, che era nulla, resta nulla. Fin qui non è cambiato assolutamente niente. Inoltre il blocco, che aveva una massa M prima di assorbire la radiazione... Noi sappiamo già dove andremo a parare, ma se vogliamo far vedere come nasce il problema dobbiamo supporre che la massa resti la stessa. Si può anche non dire niente, e la conservazione della massa verrà data per scontata. In ogni caso il blocco resterà fermo in K$'$, perché la sua q. di moto è nulla anche dopo aver assorbito la radiazione.

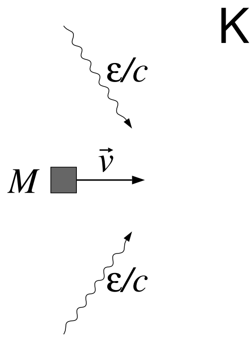

fig. 13–4

Passiamo a discutere la cosa nel rif. K. La massa M si muove verso destra, come prima, con velocità v; al posto dei cannoncini abbiamo ora due laser (fig. 13–4) che sparano la radiazione in una direzione obliqua. Perché obliqua? Basta pensare all'orologio a luce, che abbiamo studiato nella lezione 8: anche in quel caso, nel rif. in cui l'orologio si muove la radiazione viaggia obliquamente, dalla sorgente L allo specchio S e poi indietro al rivelatore R (fig. 13–5). Anzi, fra un momento ci serviremo proprio dell'analogia per calcolare l'angolo a cui viaggia la luce.

Indico l'energia con ε e non più con ε', perché cambiando rif. l'energia della radiazione potrà apparire diversa (chi sentisse la necessità di rendere plausibile questo fatto, potrà ricordare l'effetto Doppler, la connessione dell'energia con la frequenza nel caso dei fotoni, ecc.; ma non è indispensabile). In realtà non avremo bisogno della relazione tra ε ed ε': è meglio usare un nuovo simbolo perché sappiamo che è diversa, ma agli effetti del ragionamento la cosa non ha importanza.

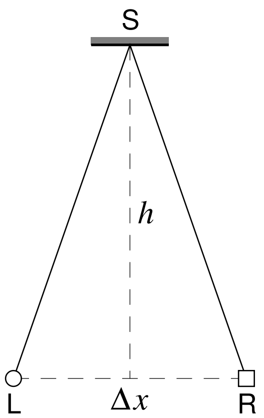

fig. 13–5

Questa radiazione viaggia in una direzione obliqua, a un angolo con la verticale che per il momento chiamo α, e che poi calcoleremo. La q. di moto orizzontale della radiazione è $(\varepsilon/c)\sin\alpha$; quindi la q. di moto totale è

$$M\gamma v + 2\,\frac{\varepsilon}{c}\,\sin\alpha.$$

Mi pongo ora la stessa domanda di prima: come si muoverà il blocco dopo che la radiazione è stata assorbita? con che velocità? Di nuovo, ragioniamo per due strade.

Ragionamento A: conservazione della q. di moto. Se la velocità è v_{f} la q. di moto sarà $M\gamma_{\mathrm{f}}v_{\mathrm{f}}$, e si ottiene così la relazione:

$$M\gamma_{\mathrm{f}}v_{\mathrm{f}} = M\gamma v + 2\,\frac{\varepsilon}{c}\,\sin\alpha. \qquad (13\text{–}1)$$

Per ora lasciamo la formula così com'è, senza calcolare v_{f}.

Il ragionamento B è lo stesso di prima: se nel rif. K$'$ il blocco resta fermo, nel rif. K si muoverà con la velocità v di K$'$ rispetto a K. (Se la sua velocità non cambia in K$'$ non deve cambiare nemmeno in K.) Quindi la previsione del ragionamento B è: $v_{\mathrm{f}} = v$.

Nel primo esperimento i due ragionamenti andavano d'accordo; vediamo dunque se vanno d'accordo anche ora: sostituiamo $v_{\mathrm{f}} = v$ nella (13–1) e troviamo una contraddizione.

La massa non si conserva negli urti anelastici

A questo punto bisogna chiedersi: dove abbiamo sbagliato? La sola possibile via d'uscita (ma ci voleva Einstein per pensarci!) sta nell'aver dato per scontato che la massa resti la stessa; proviamo a lasciar cadere quest'ipotesi, e vediamo che cosa succede. Scriviamo dunque M_f al posto di M dopo l'assorbimento. Poiché non ho motivi per non credere al risultato del ragionamento B, mantengo $v_\mathrm{f} = v$; sostituisco ancora nella (13–1) e ricavo

$$M_\mathrm{f} = M + 2\,\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\sin\alpha}{\gamma v}.$$

Ormai resta solo da calcolare α; basta pensare all'orologio a luce (fig. 13–5) per capire che $\sin\alpha = v/c$, e ne risulta

$$M_\mathrm{f} = M + \frac{2\varepsilon}{\gamma c^2}.$$

Osservate però che il nostro blocco, che aveva inizialmente una certa energia, ha assorbito due pacchetti di energia ε. Se l'energia in generale si conserva, l'energia del blocco dev'essere cambiata di 2ε, e quindi al posto di 2ε sono autorizzato a scrivere ΔE. Abbiamo così dimostrato:

a) che la massa è aumentata

b) che la variazione è

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{\gamma c^2}. \qquad (13\text{–}2)$$

Rivediamo il ragionamento fatto. Abbiamo seguito la stessa strada del primo esempio, dove avevamo visto come si potesse prevedere la velocità finale del nostro blocco per due vie: o imponendo che la q. di moto in K si deve conservare, oppure dicendo che la velocità deve rimanere la stessa perché rimane la stessa nel rif. K′. Abbiamo provato a ripetere il discorso nel nuovo caso e abbiamo trovato che le due strade non portavano allo stesso risultato. La contraddizione non ci dev'essere (ecco perché è servito il primo esempio: per far vedere che in quel caso le cose funzionano, e che quindi la linea del ragionamento è giusta) dunque abbiamo sbagliato qualcosa.

Noi abbiamo ammesso tacitamente che la massa resti costante nel processo; se ci liberiamo di quest'ipotesi, se cioè ammettiamo che la massa possa variare, abbiamo il parametro libero M_f in più; allora le due deduzioni non sono più in contraddizione e ci permettono di calcolare M_f. Conclusione: quando un corpo che si muove con velocità v assorbe della radiazione *senza cambiare velocità* (badate bene a questa condizione) allora la sua massa aumenta di $\Delta E/(\gamma c^2)$. In particolare, se $\gamma = 1$, cioè se $v = 0$, allora $\Delta M = \Delta E/c^2$: notate che è questa la situazione in K′, il che mostra che *un corpo fermo accresce la sua massa quando assorbe energia restando fermo.*

Questo è il solo significato reale dell'inerzia dell'energia (o se preferite dell'equivalenza massa-energia): se in qualunque modo fate sì che l'energia di un oggetto cambi, senza che cambi la sua velocità — per esempio se resta fermo — necessariamente anche la sua massa cambia; *non potete cambiare l'energia senza cambiare anche la massa e viceversa.*

È chiaro che questo risultato si può tradurre poi nella ben nota relazione $E = Mc^2$: se una variazione di energia è sempre accompagnata da una variazione di massa, si potrà dire che noi misuriamo l'energia di un corpo misurandone la massa, e viceversa. Scritta così la relazione è vera però solo se $v = 0$, altrimenti si avrà $E = M\gamma c^2$.

Di passaggio osserviamo che se in K abbiamo $\Delta E = 2\varepsilon$, anche in K′ abbiamo $\Delta E' = 2\varepsilon'$. Dato che $\Delta E = c^2\gamma\,\Delta M$, mentre $\Delta E' = c^2\Delta M$, (ΔM *è invariante*), ne segue $\varepsilon = \gamma\varepsilon'$, ossia la legge di trasf. per l'energia del pacchetto di radiazione, che finora non conoscevamo. Si noti però che questa relazione vale solo nel caso particolare in cui in uno dei due rif. il pacchetto viaggia *trasversalmente* al moto relativo dei rif.

Qualche obiezione

A questo punto potrei aspettarmi qualche obiezione: ne discuterò tre. La prima è che il nostro esperimento ideale non dimostra in generale ciò che ho asserito, ossia che se cambia l'energia di un corpo (a parità di velocità) deve cambiare la massa: questo è stato dimostrato solo per il caso particolare in cui l'energia cambia per assorbimento di radiazione e.m. Ma riflettiamo: una volta che la radiazione è stata assorbita, quale effetto ha sul corpo? quello di scaldarlo. Nello stato finale non c'è più traccia di come l'energia è arrivata; perciò se supponiamo che tutte le grandezze fisiche del corpo dipendano solo dal suo stato presente, e non dalla sua storia, questo dovrà essere vero in particolare per la massa.

Dunque se la massa è aumentata nel nostro esperimento, lo stesso accadrà tutte le volte che il corpo arriverà allo stesso stato finale, anche per altra via: ad es. perché lo riscaldiamo cedendogli calore. Ciò che davvero conta per determinare la massa del corpo è la sua energia, e non il modo come è stata ottenuta.

La seconda obiezione è più delicata, tanto che dovremo ampiamente riprenderla nella prossima lezione. In sostanza si tratta di questo. Nel ragionamento coi proiettili, la massa del corpo urtato cambia, perché esso dopo l'urto ingloba i proiettili: è questo che ci permette di salvare la conservazione della q. di moto. Viceversa, nel caso della radiazione noi troviamo una difficoltà quando pretendiamo che la massa M resti inalterata dopo l'urto.

Ma allora la risposta sembra ovvia: anche i pacchetti di radiazione hanno massa, e dobbiamo tenerne conto nei calcoli. Se assumiamo che la loro massa sia $m_\mathrm{r} = \varepsilon/c^2$, e se usiamo nell'espressione della q. di moto la massa relativistica $M' = M\gamma$, al posto della (13–1) dovremo scrivere

$$(M'_\mathrm{f} + 2m_\mathrm{r})\, v_\mathrm{f} = M'v + 2\, m_\mathrm{r} c \sin\alpha = M'v + 2\, m_\mathrm{r} v$$

che è ovviamente soddisfatta con $v_\mathrm{f} = v$. Dunque non c'è nessun problema: la massa relativistica sistema tutto!

Rispondo: certo, e se non fosse così, la massa relativistica non avrebbe avuto vita lunga e validi difensori. Come ho già detto, rimando alla prossima lezione la spiegazione del perché secondo me la massa relativistica sia più dannosa che utile. Ma nell'obiezione appena illustrata c'è un'altra idea che va discussa, e può essere riformulata a parte, come terza obiezione: vediamola.

Significato di $E = Mc^2$

Abbiamo dimostrato che se cambia l'energia del corpo senza che cambi la velocità, allora deve cambiare la massa (notate che il nostro esperimento ideale è servito solo a far vedere come si può cambiare l'energia di un corpo senza cambiarne la velocità). Ma non potevamo arrivare a questo risultato direttamente, visto che la relazione

$$E = M\gamma c^2 \tag{13–3}$$

ci era già nota? Se la velocità non cambia, γ è costante; allora perché cambi E deve cambiare M.

La risposta è che la (13–3) è stata introdotta, come definizione di energia, relativamente a tutt'altro tipo di situazione; ma questa risposta ha bisogno di essere spiegata meglio.

Noi abbiamo ricavato la (13–3) per coerenza col teorema delle forze vive. Abbiamo detto: è lecito chiamare energia quest'espressione, dal momento che quando si applica una forza — e quindi si cambia la velocità — allora l'energia cinetica cambia esattamente come cambia E. Perciò fino a questo punto sapevamo solo che la (13–3) è valida, *per un oggetto di massa assegnata*, quando consideriamo variabile la velocità. In questo contesto, non solo la massa non cambiava, ma essa era anzi una caratteristica invariabile del corpo. Adesso abbiamo fatto un passo avanti: abbiamo dimostrato che la massa di un corpo *può cambiare* grazie a scambi di energia, e che la stessa relazione (13–3) connette le variazioni della massa a quelle dell'energia, *a velocità fissata*.

Abbiamo quindi scoperto che la (13–3) ha validità incondizionata: qualunque sia il modo con cui cambiamo i parametri che vi figurano, l'energia del sistema è sempre legata alla massa e alla velocità da questa formula. La sola cosa che non possiamo cambiare è c^2: cambierà M se il corpo assorbe o emette radiazione, o anche se gli si cede (o gli si sottrae) calore; cambierà v se gli si applica una forza. Sono due modi diversi di cambiare l'energia: si può fare lavoro meccanico sul corpo applicando una forza, e allora cambia la velocità e non la massa; oppure si può costruire un congegno come il nostro, in cui si cede energia senza alterare la velocità: in tal caso cambierà la massa.

Ecco perché quando si dice che la massa dipende dalla velocità si crea confusione, mentre presentando le cose come abbiamo visto, si capisce bene che ci sono due situazioni del tutto differenti. Nella prima, cambiare la velocità comporta cambiare γ, e quindi l'energia cambia, nello stesso senso della fisica newtoniana: varia l'energia cinetica. Nella seconda il corpo può addirittura restare fermo; la sua massa cambia perché lo abbiamo "caricato" o "scaricato" di energia. Il legame dell'energia con la massa, e la conseguente variazione della massa nel secondo tipo di fenomeni, è di gran lunga più significativo di quel che potrebbe apparire dal piccolo espediente formale di scrivere $m' = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Una volta capito questo, si capisce anche che in ultima analisi *la massa di un corpo non è altro che una misura della sua energia quando è fermo.* C'è il fattore c^2, ma questo è un accidente derivato dalle unità di misura: è la stessa seccatura che abbiamo sempre incontrato in tutte le formule relativistiche. Purtroppo agli inizi della fisica (fino a tutto il secolo scorso) non si sapeva che ci fosse una relazione tra spazio e tempo, e così sono state introdotte unità indipendenti per le lunghezze e per i tempi: di qui la comparsa di una *costante universale.* Se invece come unità di lunghezza si usasse il secondo-luce, avremmo $c = 1$ ed $E = m$.

Ma c'è di più: mentre nella meccanica newtoniana l'energia si conserva solo negli urti elastici (o in generale quando sono in gioco soltanto forze conservative) vediamo ora che la variazione della massa tiene conto anche delle interazioni non conservative, e perciò che nella massa sono incluse tutte le possibili forme di energia, *anche non meccanica.* È questa grande unificazione che costituisce la vera importanza di $E = Mc^2$: quando si tenga conto sia dell'energia cinetica, sia di tutte le altre possibili forme di energia riassunte nella massa dei corpi, l'energia relativistica *si conserva sempre.*

La pressione di radiazione

Supporremo noti i seguenti fatti:

- nel vuoto le onde e.m. si propagano con velocità c
- scelta una terna (x, y, z), se un'onda piana monocromatica si propaga in direzione z, e se è polarizzata in modo che il campo $\vec{E}$ sia diretto secondo x, il campo $\vec{B}$ è diretto secondo y e ha grandezza $B = E/c$
- la forza che il campo e.m. esercita su di una carica q ha l'espressione (forza di Lorentz)

$$\vec{F}^{\,\mathrm{em}} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

da cui

$$F_x^{\rm em} = qE_x, \quad F_y^{\rm em} = 0, \quad F_z^{\rm em} = \frac{q}{c}\,E\,v_x.$$

Consideriamo una particella carica investita dall'onda e che sia libera di muoversi in un mezzo viscoso, che la frena con una resistenza $\vec{F}^{\,\rm r} = -k\vec{v}$. Abbiamo

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\,\rm em} + \vec{F}^{\,\rm r}$$

e supporremo che la frequenza dell'onda sia $\omega \ll k/m$: allora l'accelerazione della particella è dell'ordine di ωv, e ne segue $ma \ll F^{\,\rm r}$. Si può dunque scrivere

$$\vec{F}^{\,\rm em} = k\vec{v}.$$

La potenza assorbita dalla carica (e dissipata dalla resistenza del mezzo) è

$$W = \vec{F}^{\,\rm em} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = qE\,v_x.$$

La componente z di $\vec{F}^{\,\rm em}$ causa una variazione della q. di moto della particella:

$$\dot{p}_z = F_z^{\rm em} = \frac{q}{c}\,E\,v_x = \frac{W}{c}.$$

Si noti che $\vec{F}^{\,\rm em}$ e $\vec{v}$ oscillano in fase: quindi tanto W quanto $\dot{p}_z$ hanno valor medio positivo. Abbiamo così il risultato: una carica assorbe da un'onda e.m. piana un impulso pari all'energia assorbita, divisa per c. Siamo perciò autorizzati a concludere che *un'onda piana che trasporti un'energia ε trasporta anche un impulso ε/c.*

Problemi

1. Calcolare la frazione di massa perduta dal Sole in un miliardo di anni, assumendo che questa perdita sia dovuta solo all'emissione di radiazione e che la luminosità del Sole si mantenga costante al valore attuale: $4 \cdot 10^{33}$ erg/s. (La massa del Sole è $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ g.)

2. Spiegare perché un elettrone libero non può assorbire un fotone.

3. Una particella ne urta un'altra ferma, di ugual massa. L'urto è anelastico, e dà luogo a un'unica particella finale.
   a) Calcolare la massa di questa.
   b) Studiare lo stesso fenomeno nel rif. del centro di massa, in cui le due particelle iniziali hanno velocità opposte.
   c) Spiegare perché il processo proposto è estremamente improbabile.

4. Un atomo inizialmente fermo, che si trova in uno stato eccitato, emette un fotone.
   a) Calcolare la relazione tra l'energia del fotone e la variazione di massa dell'atomo.
   b) Considerare in particolare il caso di un atomo d'idrogeno nel livello $n = 2$.

5. La tecnica del raffreddamento laser di fasci atomici (Nobel per la fisica nel 1997) si basa su quest'idea: un atomo capace di una transizione con salto di energia ΔE dal livello fondamentale a uno eccitato, e che sia in moto con una certa velocità v, può assorbire fotoni che nel rif. del laboratorio hanno energia $\varepsilon < \Delta E$ solo se se li vede arrivare incontro.

   In queste condizioni dopo l'assorbimento la sua velocità sarà minore, il che corrisponde appunto a un raffreddamento.

a) Considerando una sola dimensione spaziale, scrivere la relazione tra ε, v, ΔE e la massa M dell'atomo.
b) Calcolare la velocità v' dopo l'assorbimento del fotone.
c) Se gli atomi sono di rubidio ($A = 85$) quanto vale v, intesa come velocità quadratica media a 500 K? Quanto vale $v - v'$?
d) Il fotone assorbito verrà poi riemesso: che effetto ha questo fatto sul raffreddamento?

Risposte

Problema 1. (Massa perduta dal Sole):

Se $L_\odot$ è la luminosità del Sole (potenza elettromagnetica irraggiata su tutto lo spettro) la massa perduta nel tempo t è

$$\delta M_\odot = L_\odot\, t/c^2$$

e la frazione richiesta è

$$\frac{\delta M_\odot}{M_\odot} = \frac{L_\odot\, t}{M_\odot\, c^2}.$$

Usando i dati:

$$\frac{\delta M_\odot}{M_\odot} = 7 \cdot 10^{-5}.$$

Problema 2. (Elettrone e fotone):

L'esperimento ideale descritto nella lezione mostra perché un elettrone non può assorbire *due* fotoni opposti: alla fine dovrebbe avere una massa maggiore. Ma può sembrare che la stessa limitazione non ci sia per un singolo fotone, perché dopo averlo assorbito l'elettrone sarà in moto; avrà quindi un'energia cinetica che potrebbe salvare il bilancio dell'energia.

Supponiamo l'elettrone inizialmente fermo. Questa non è una restrizione, perché esiste sempre un RI in cui ciò accade, e d'altra parte che l'assorbimento sia possibile o no non dipende dal rif. scelto per il calcolo: si tratta di un fatto *invariante*.

Sia ε l'energia del fotone; E, p energia e impulso dell'elettrone dopo aver assorbito il fotone: la conservazione di energia e impulso dice

$$mc^2 + \varepsilon = E \qquad \varepsilon/c = p.$$

Basta moltiplicare la seconda per c, quadrare e sottrarre: dopo le semplificazioni si trova

$$2\, mc^2 \varepsilon = 0$$

che è falsa. Dunque il processo è impossibile.

Si può anche fare il calcolo in un RI qualsiasi, nel quale l'elettrone non è fermo. È un po' più complicato, ma è istruttivo vedere come porta allo stesso risultato.

Siano ora E, $\vec{P}$ energia e impulso *iniziali* dell'elettrone; $\vec{p}$ l'impulso del fotone. L'energia del fotone sarà cp. Indicherò poi con E', $\vec{P}'$ energia e impulso *finali* dell'elettrone. Usando sempre le leggi di conservazione:

$$E + cp = E' \qquad \vec{P} + \vec{p} = \vec{P}'.$$

Prendendo il quadrato del modulo dei due membri della seconda si ha

$$P^2 + p^2 + 2\, \vec{P} \cdot \vec{p} = {P'}^2 \tag{13–4}$$

mentre quadrando la prima:

$$E^2 + c^2p^2 + 2\,c\,E\,p = E'^2. \tag{13–5}$$

Moltiplicando la (13–4) per c^2 e sottraendo dalla (13–5) abbiamo

$$E\,p = c\,\vec{P} \cdot \vec{p}.$$

Ma questa è impossibile, perché $\vec{P} \cdot \vec{p} \le Pp$ mentre $E > cP$.

Problema 3. (Urto anelastico):
a) Il procedimento è sempre il solito: indico con E, p energia e impulso della particella urtante; con E', p' quelli della particella finale; con m' la massa richiesta. Allora:

$$E + m\,c^2 = E' \qquad p = p'.$$

Con la tecnica già usata (quadrare e sottrarre) si trova

$$m' = 2\,m\,\sqrt{1 + \frac{E - m\,c^2}{2\,m\,c^2}}. \tag{13–6}$$

La forma in cui ho scritto m' serve a mostrare che quando E è vicina a mc^2, m' è circa $2m$, ma è sempre $m' > 2m$, com'era prevedibile.

b) Nel rif. del centro di massa le due particelle hanno uguali energie $\bar{E}$ e impulsi opposti: $\bar{p}$ e $-\bar{p}$. La particella finale è ferma. Dunque c'è solo da imporre la conservazione dell'energia, che fornisce banalmente

$$m' = 2\bar{E}/c^2. \tag{13–7}$$

Che interesse può avere questo risultato? Il fatto è che m', essendo invariante, deve rimanere la stessa nei due rif. Perciò il confronto tra la (13–6) e la (13–7) ci permette di connettere E con $\bar{E}$:

$$2\left(\frac{\bar{E}}{mc^2}\right)^2 = 1 + \frac{E}{mc^2}.$$

Da qui si vede che quando le energie sono grandi ($\gg mc^2$) E cresce come il quadrato di $\bar{E}$.

Questo spiega il vantaggio di usare, negli esperimenti d'urto, fasci di particelle "contropropaganti" invece di mandare un fascio contro un bersaglio fermo. Per es. due fasci di protoni con $\bar{E} = 100\,\mathrm{GeV}$ equivalgono a un fascio di $2 \cdot 10^4\,\mathrm{GeV}$ contro bersaglio fisso.

c) Perché il processo avvenga, l'energia della particella incidente deve essere esattamente quella che si ricava dalla (13–6) risolvendola rispetto a E.

In realtà in un esperimento reale si avrà un fascio di particelle, non tutte delle stessa precisa energia; ma solo quelle che soddisfano la (13–6) possono reagire. La questione dovrebbe essere approfondita, ma ci porterebbe troppo lontano. . .

Problema 4. (Emissione di un fotone):

Indichiamo con M_1 la massa dell'atomo nello stato fondamentale; quella nello stato eccitato sarà maggiore, e la indichiamo con M_2. Siano poi: E_1 l'energia dell'atomo dopo emesso il fotone; ε l'energia del fotone, $p = \varepsilon/c$ il suo impulso. L'impulso dell'atomo sarà opposto a quello del fotone, ma di uguale modulo.

a) La conservazione dell'energia ci dice

$$M_2\,c^2 = E_1 + \varepsilon$$

e al solito

$$E_1^2 = M_1^2c^4 + c^2p^2 = M_1^2c^4 + \varepsilon^2.$$

Eliminando E_1:

$$\varepsilon = \frac{\left(M_2^2 - M_1^2\right)c^2}{2\,M_2}$$

che è minore di $\Delta = (M_2 - M_1)\,c^2$.

La ragione è che parte dell'energia Δ si ritrova come energia cinetica dell'atomo. Infatti

$$E_1 - M_1\,c^2 = \Delta - \varepsilon = \frac{\Delta^2}{2\,M_2\,c^2}.$$

Si vede che $\Delta - \varepsilon$ è di secondo ordine in Δ.

b) I dati per un atomo d'idrogeno sono: $M_1\,c^2 = 0.94\,\mathrm{GeV}$, $\Delta = 10.2\,\mathrm{eV}$. Perciò la differenza relativa $(\Delta - \varepsilon)/\Delta$ vale circa 10^{-8} e per atomi più pesanti è ancora minore. Tuttavia non è priva di applicazioni pratiche: v. problema 5.

Problema 5. (Raffreddamento laser):

Indichiamo, al solito, con M_1, M_2 la massa dell'atomo prima e dopo l'assorbimento ($M_1 = M$); con E_1, E_2 le energie; con p_1, p_2 gli impulsi; con ε l'energia del fotone. Le leggi di conservazione danno:

$$E_2 = E_1 + \varepsilon \qquad p_2 = p_1 - \varepsilon/c. \tag{13–8}$$

La novità ora è che l'atomo è in moto sia prima che dopo l'assorbimento; nella conservazione dell'impulso abbiamo tenuto conto coi segni del fatto che il fotone viaggia incontro all'atomo.

Con la tecnica di quadrare e sottrarre troviamo:

$$M_2^2c^4 = M_1^2c^4 + 2\varepsilon\,(E_1 + c\,p_1). \tag{13–9}$$

a) Dobbiamo ora introdurre ΔE e v. Le relazioni sono:

$$M_2\,c^2 = M_1\,c^2 + \Delta E \qquad p_1 = \frac{v}{c^2}\,E_1.$$

La prima esprime il fatto che ΔE è la differenza tra le energie di un atomo *fermo* nello stato fondamentale e in quello eccitato. La seconda non è che la (12–7).

Sostituendo queste nella (13–9) e usando $E_1 = M_1c^2\gamma$, dopo qualche semplificazione si arriva a

$$\varepsilon\,\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \Delta E\left(1 + \frac{\Delta E}{2\,M\,c^2}\right). \tag{13–10}$$

La (13–10) può essere ancora semplificata tenendo conto che $\Delta E \ll M\,c^2$ (almeno 10 ordini di grandezza) e che anche $v \ll c$ (almeno 6 ordini di grandezza). Si può quindi buttar via il secondo termine in parentesi a destra, e a primo membro tenere solo i termini di prim'ordine in v/c: si ottiene allora

$$\varepsilon\left(1+\frac{v}{c}\right) = \Delta E. \tag{13–11}$$

b) Il modo più semplice per arrivare al risultato è di osservare che dalle (13–8) segue

$$E_1 + c\,p_1 = E_2 + c\,p_2.$$

Esprimendo E_1, p_1, E_2, p_2 in funzione di v, v' si ha

$$M_1\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = M_2\sqrt{\frac{c+v'}{c-v'}} \tag{13–12}$$

che permette di ricavare v'. Ma conviene fare subito le approssimazioni già viste: la (13–12) diventa

$$1+\frac{v'}{c} = \left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{\Delta E}{Mc^2}\right)$$

da cui

$$v' = v - \frac{\Delta E}{Mc}. \tag{13–13}$$

Va detto che alla (13–13) si può arrivare, assai più semplicemente e senza scomodare la relatività, dalla semplice conservazione della quantità di moto newtoniana:

$$Mv' = Mv - \varepsilon/c \qquad \text{con} \qquad \varepsilon = \Delta E.$$

Ciò è lecito perché nel moto dell'atomo gli effetti relativistici sono del tutto trascurabili, e perché anche la differenza tra ε e ΔE è molto piccola, come mostra la (13–11).

c) Per $A = 85$ avremo $M \simeq 85\,m_{\rm p} = 1.4\cdot 10^{-25}\,$kg (la differenza di massa tra protone e neutrone, il difetto di massa del nucleo e le masse degli elettroni hano effetto solo sulla terza cifra). Perciò

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{M}} = 1.2\cdot 10^2\,\mathrm{m/s}.$$

Per il rubidio, da stato fondamentale a primo livello eccitato, $\Delta E \simeq 1.6\,$eV. Dalla (13–13) si ha

$$|\Delta v| = v - v' = \frac{\Delta E}{Mc} = 6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s}.$$

d) Il fotone verrà riemesso in direzione casuale; se fosse riemesso nella stessa direzione (e verso) di quello incidente, alla fine l'atomo riprenderebbe la velocità iniziale. Se invece venisse emesso in verso opposto, si avrebbe un'ulteriore riduzione della velocità, circa uguale a quella in assorbimento. Per le altre direzioni si avrebbe un effetto intermedio, e sembra potersi concludere che in media l'emissione non cambierà la velocità dell'atomo.

In realtà ciò è vero *solo in media*, per cui su un insieme di atomi la riemissione produce un effetto che limita il raffreddamento che si può ottenere. Ma la discussione accurata di questo aspetto, come pure di tutta la vera tecnica di raffreddamento, va molto al di là dei nostri scopi…