CAPITOLO 9

Introduzione alla geometria differenziale

Lo sviluppo teorico della RG richiede particolari strumenti matematici: geometria differenziale e analisi tensoriale. La geometria differenziale nasce con lo studio della geometria sulle superfici, iniziato da Gauss, e si sviluppa con l'estensione, fatta da Riemann, a spazi a più dimensioni. Lo studio dei campi tensoriali (derivazione covariante, ecc.) è dovuta a Ricci Curbastro e a Levi-Civita (tra la fine del 19-mo secolo e gli inizi del 20-mo).

Tradizionalmente, per molto tempo, la RG è stata presentata secondo le linee tracciate da questi autori, seguendo in ciò lo stesso Einstein. È tuttavia disponibile ormai da decenni un approccio diverso, dovuto a Cartan, che mette meglio in evidenza le idee geometriche e al tempo stesso alleggerisce le notazioni, liberando dalla necessità di far costante ricorso a un sistema di coordinate. Seguiremo perciò questa via, dedicando qualche tempo all'introduzione delle idee matematiche essenziali, senza eccessive pretese di rigore. Un'ulteriore motivazione sta nel fatto che la moderna fisica teorica ha ormai scoperto l'utilità di questa parte della matematica anche in campi molto lontani dalla RG.

Vettori tangenti

Il concetto di vettore in uno spazio euclideo non presenta difficoltà, in quanto può essere identificato con quello di *spostamento*. Tale via è però preclusa in una generica varietà (ad es. una superficie curva di $\mathbb{R}^3$). L'idea di Cartan, espressa in parole, è la seguente. In uno spazio euclideo si parla di "vettore tangente a una curva," e ha senso la "derivata direzionale" di una funzione scalare: in termini imprecisi, la derivata direzionale è la componente del gradiente della funzione nella direzione indicata dal vettore tangente. Ebbene, si può usare questa corrispondenza, fra vettore tangente e derivata direzionale, come strada per definire un vettore tangente anche in una varietà non euclidea. Si vede anzi che non occorre neppure che nella varietà sia definita una metrica.

Sia data nella varietà $\mathcal{M}$ una curva, ossia un'applicazione

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}, \quad \lambda \mapsto P = \gamma(\lambda), \quad \gamma(0) = A.$$

Sia data poi una funzione scalare f su M:

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto x = f(P).$$

Allora è definita $g = f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (e g, nelle nostre solite ipotesi, è C^∞); possiamo dunque calcolare $dg/d\lambda$ in ogni punto della curva. Definiamo (provvisoriamente)

$$\partial_\gamma f \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{dg}{d\lambda}\right|_0$$

(in seguito accadrà spesso, con abuso di notazione, di scrivere f in luogo di g).

Diremo che due curve γ_1 e γ_2 sono *tangenti* in A se

$$\forall f : \partial_{\gamma_1} f = \partial_{\gamma_2} f$$

e non è difficile dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza. Infine definiamo *vettore* $\mathbf{u}$ *tangente a* γ *la classe di equivalenza delle curve tangenti a* γ *in* A. Questa definizione porta immediatamente a interpretare $\mathbf{u}$ come un *operatore differenziale sulle funzioni scalari*:

$$\mathbf{u}f \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mathbf{u}} f \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\gamma f$$

per una $\gamma \in \mathbf{u}$.

È importante notare che la definizione data di tangenza, e perciò di vettore tangente, non dipende solo dal sostegno di γ, ma anche dalla sua parametrizzazione: data $\gamma(\lambda)$, se definiamo $\gamma'(\lambda) = \gamma(2\lambda)$ le curve γ e γ' danno gli stessi punti in $\mathcal{M}$, ma la prima per valori di λ doppi della seconda. Ne segue che le due curve *non sono tangenti* e per i vettori tangenti si ha $\mathbf{u}' = 2\mathbf{u}$. Un'immagine intuitiva si ottiene pensando alla curva come legge oraria, al sostegno come traiettoria, e al vettore tangente come velocità.

L'insieme dei vettori tangenti a $\mathcal{M}$ *in* A *è uno spazio vettoriale con la stessa dimensione della varietà*, che chiameremo *spazio tangente* in A e indicheremo con $\mathcal{T}_A$.
Dim.: Assunto in $\mathcal{M}$ un sistema di coordinate $\{x^\alpha\}$ consideriamo i vettori $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ tangenti alle linee coordinate passanti per A, ciascuna parametrizzata con x^α. Per definizione sarà $\mathbf{e}_\alpha f = \partial f / \partial x^\alpha$. Per una generica curva γ, di equazioni parametriche $x^\alpha(\lambda)$, e per il suo vettore tangente $\mathbf{u}$, avremo:

$$\mathbf{u}f = \partial_\gamma f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \mathbf{e}_\alpha f = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha f$$

(qui e in tutto il seguito si sottintende una somma sugli indici ripetuti in alto e in basso).

L'ultimo risultato mostra che $\mathbf{u}$ è combinazione lineare degli $\mathbf{e}_\alpha$, con coefficienti $u^\alpha = dx^\alpha / d\lambda$. Si noti che le u^α così definite *non dipendono* dalla particolare curva, ma solo dalla classe di equivalenza, ossia da $\mathbf{u}$. Abbiamo dunque dimostrato che $\mathcal{T}_A$ ha la struttura di spazio vettoriale.

Per completare la dimostrazione, occorre provare che i vettori $\mathbf{e}_\alpha$ sono indipendenti. Consideriamo una combinazione lineare $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha = 0$, e dimostriamo che tutti gli u^α sono nulli. Calcolando $\mathbf{u}\,x^1$ si trova:

$$0 = \mathbf{u}\,x^1 = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha\, x^1 = u^\alpha \frac{\partial x^1}{\partial x^\alpha} = u^1$$

e lo stesso per tutte le altre componenti. ■

Con le notazioni usate nella precedente dimostrazione, $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ è una base di $\mathcal{T}_A$, che si chiama la *base associata al sistema di coordinate* $\{x^\alpha\}$; ogni base associata a un sistema di coordinate si chiama *base coordinata.* Ovviamente sarà sempre possibile scegliere in $\mathcal{T}_A$ infinite basi diverse: più avanti ci porremo il problema se una base comunque scelta sia sempre associata a un sistema di coordinate.

Sia ora $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ una qualunque base in $\mathcal{T}_A$: avremo

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

e poi

$$\mathbf{u}f = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha f = u^\alpha \partial_\alpha f$$

dove abbiamo posto

$$\partial_\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\alpha f.$$

Se in particolare $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ è una base coordinata:

$$\partial_\alpha x^\beta = \mathbf{e}_\alpha x^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} = \delta^\beta_\alpha.$$

Forme differenziali

Lo spazio vettoriale $\mathcal{T}_A$ ha un duale $\mathcal{T}^*_A$, che in base alla definizione generale di duale è lo spazio vettoriale dei funzionali lineari su $\mathcal{T}_A$:

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{T}^*_A \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{T}_A \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \quad \text{dipende lin. da } \mathbf{u}.$$

Gli elementi di $\mathcal{T}^*_A$ si chiamano *forme differenziali* (sottinteso lineari) e $\mathcal{T}^*_A$ prende il nome di *spazio cotangente* a $\mathcal{M}$ in A.

Anche in $\mathcal{T}^*_A$ si può introdurre una base $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$, e avremo $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\alpha \boldsymbol{\omega}^\alpha$. Tuttavia $\boldsymbol{\sigma}$ può anche essere individuata dai valori $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle$ che assume sulla base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ di $\mathcal{T}_A$. È particolarmente utile scegliere $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ in modo che sia sempre $\sigma_\alpha = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle$, e questo accade sse (se e solo se)

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta.$$

Diremo allora che $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ ed $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ sono *basi duali.* Nel seguito l'uso di basi duali sarà sempre sottinteso, a meno di avviso contrario.

Poiché $\mathbf{u}f$ dipende linearmente da $\mathbf{u}$, può essere visto come effetto dell'azione su $\mathbf{u}$ di una particolare forma differenziale (che naturalmente è caratterizzata assegnando f). Indichiamo questa forma con $\mathbf{d}f$ e le diamo il nome di *differenziale* o *gradiente* della funzione f. Abbiamo dunque per definizione:

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{u} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}f, \qquad \mathbf{d}f \in \mathcal{T}^*_A.$$

Per le componenti di $\mathbf{d}f$ si scrive

$$\mathbf{d}f = f_{,\alpha}\, \boldsymbol{\omega}^\alpha$$

mentre

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \mathbf{e}_\alpha f = \partial_\alpha f.$$

Attenzione:

– sse $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ e $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ sono basi duali, sarà $f_{,\alpha} = \partial_\alpha f$
– il simbolo $f_{,\alpha}$ non denota in generale una derivata: questo accade sse $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ è una base coordinata, e $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ è la base duale.

La situazione descritta nella seconda nota è frequente e importante; studiamola meglio. Se facciamo $f = x^\alpha$ avremo

$$\langle \mathbf{d}x^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

e questa mostra che $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$ è la base duale a $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Allora

$$\mathbf{d}f = f_{,\alpha}\,\mathbf{d}x^\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\,\mathbf{d}x^\alpha,$$

che riproduce, nel linguaggio attuale, la ben nota proprietà dell'analisi elementare.

Osserviamo che *qualunque forma in un punto di $\mathcal{M}$ può essere intesa come differenziale di un'opportuna funzione* (si noti che si sta parlando solo di ciò che accade *in un punto*). Infatti, scelto un sistema di coordinate, se $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\alpha \mathbf{d}x^\alpha$, basta prendere $f = \sigma_\alpha x^\alpha$. Ne segue un'interpretazione intuitiva di $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle$: questa è la variazione di f lungo una curva tangente a $\mathbf{u}$, per unità di variazione del parametro, e a meno di termini di secondo ordine. In sostanza f è un "integrale approssimato" di $\boldsymbol{\sigma}$. (L'integrazione delle forme differenziali è un argomento che qui non possiamo toccare.)

Campi vettoriali

Dato che in ogni punto A di $\mathcal{M}$ si definisce lo spazio tangente $\mathcal{T}_A$, è naturale considerarne l'unione

$$\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{A \in \mathcal{M}} \mathcal{T}_A$$

che si chiama il *fibrato tangente a $\mathcal{M}$*. Si definisce poi *campo vettoriale* un'applicazione $\mathbf{u}$ da $\mathcal{M}$ in $\mathcal{T}$:

$$\mathbf{u} : \mathcal{M} \to \mathcal{T}, \quad A \mapsto \mathbf{u}(A) \in \mathcal{T}_A$$

tale che $\mathbf{u}f$ sia C^∞ (a rigore la notazione è impropria, in quanto non distingue un campo vettoriale da un vettore tangente in un punto). Nel seguito indicheremo con $\mathcal{V}$ l'insieme dei campi vettoriali su $\mathcal{M}$.

In maniera perfettamente analoga si definiscono il *fibrato cotangente* e un *campo di forme*. Il termine è poco usato: talvolta si dice campo vettoriale *covariante*, mentre quello definito sopra si chiama *controvariante*; l'origine di questa terminologia sta nelle proprietà di trasformazione delle componenti per cambiamenti di base, ma non avremo bisogno di occuparcene. L'esempio più immediato di un campo di forme è il differenziale di una funzione, che è definito in ogni punto di $\mathcal{M}$. È ben noto che un generico campo di forme $\boldsymbol{\sigma}$ non è il differenziale di una funzione: quando ciò accade si parla di *differenziale esatto*, o di *forma chiusa*. Non discutiamo qui le condizioni di chiusura di una forma.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{u}$, si chiama *curva integrale* di $\mathbf{u}$ ogni curva γ che in ogni suo punto ha $\mathbf{u}$ come vettore tangente. In un sistema di coordinate $\{x^\alpha\}$ *le curve integrali sono le soluzioni del sistema di equazioni differenziali*

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = u^\alpha.$$

Dim.: se γ è una curva integrale di equazioni $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$, per una f qualsiasi avremo

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\,\frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

mentre

$$\mathbf{u}f = u^\alpha\,\partial_\alpha f.$$

Sarà dunque $\mathbf{u}f = df/d\lambda$ per ogni f sse $dx^\alpha/d\lambda = u^\alpha$ in ogni punto di γ. ∎

Dal fatto che le equazioni differenziali sono di primo ordine, segue che *per ogni punto di $\mathcal{M}$ passa una e una sola curva integrale*. Si noti che se esiste qualche punto A in cui $\mathbf{u}(A) = 0$ (*punto critico* del campo), la curva $\gamma(\lambda) = A$ è una curva integrale.

Le curve integrali di un campo vettoriale non sono altro che le *linee di forza*. Più esattamente, se per linee di forza intendiamo le curve *non parametrizzate*, ossia i sostegni, si vede che $f\mathbf{u}$ ha le stesse linee di forza di $\mathbf{u}$: dunque le linee di forza individuano il campo a meno di un fattore scalare (anche non costante). La classe di equivalenza che così si ottiene da un campo vettoriale è detta *campo di direzioni*; intuitivamente, le linee di forza danno solo la direzione di $\mathbf{u}$, non la lunghezza.

Commutatori

Dati due campi vettoriali $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, si definisce il loro *commutatore*:

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]f \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}\,(\mathbf{v}f) - \mathbf{v}\,(\mathbf{u}f).$$

La definizione è ben posta, ma a prima vista il commutatore appare un operatore differenziale di secondo ordine. Usando una base coordinata si verifica subito che non è così: grazie all'invertibilità dell'ordine di derivazione, il termine con le derivate seconde di f si cancella, e risulta

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]^\alpha = u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta}. \tag{9–1}$$

Il commutatore di due campi vettoriali ha una diretta interpretazione geometrica. Preso un punto A, sia $\gamma(\lambda)$ $(\gamma(0) = A)$ la curva integrale di $\mathbf{u}$ passante per A, e $B = \gamma(\bar\lambda)$. Analogamente definiamo (per $\mathbf{v}$) $\delta(\mu)$ e $C = \delta(\bar\mu)$. Ancora: indichiamo con $\gamma_1(\lambda)$ $(\gamma_1(0) = C)$ la curva integrale di $\mathbf{u}$ che parte da C, e su di essa sia $D = \gamma_1(\bar\lambda)$; infine $\delta_1(\mu)$ $(\delta_1(0) = B)$ ed $E = \delta_1(\bar\mu)$ (fig. 9–1). Si noti che la figura non può rappresentare esattamente la situazione generale, in quanto in più di due dimensioni non è neppure detto che i sostegni delle curve γ_1 e δ_1 abbiano punti in comune.

Vogliamo mostrare che *D ed E coincidono* (a meno di termini di terzo ordine in $\bar\lambda$, $\bar\mu$) *sse* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$ *in* A.

Dim.: Osserviamo anzitutto che quando nella tesi del teorema parliamo di "punti che coincidono a meno di ..." non dobbiamo pensare a una qualche distanza, che in $\mathcal{M}$ non è stata definita. L'interpretazione è la seguente: "per una qualsiasi funzione f definita in $\mathcal{M}$, $f(D)$ e $f(E)$ differiscono solo per termini ..."

Per la dimostrazione basta calcolare la variazione di f lungo le curve integrali, fino al secondo ordine nel parametro:

$$\begin{aligned}
f(B) &= f(A) + \bar\lambda\,(\mathbf{u}f)(A) + \tfrac{1}{2}\bar\lambda^2\left(\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{u}f)\right)(A) + O(\bar\lambda^3)\\
f(C) &= f(A) + \bar\mu\,(\mathbf{v}f)(A) + \tfrac{1}{2}\bar\mu^2\left(\frac{d}{d\mu}(\mathbf{v}f)\right)(A) + O(\bar\mu^3)\\
f(E) &= f(B) + \bar\mu\,(\mathbf{v}f)(B) + \tfrac{1}{2}\bar\mu^2\left(\frac{d}{d\mu}(\mathbf{v}f)\right)(B) + O(\bar\mu^3)\\
f(D) &= f(C) + \bar\lambda\,(\mathbf{u}f)(C) + \tfrac{1}{2}\bar\lambda^2\left(\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{u}f)\right)(C) + O(\bar\lambda^3).
\end{aligned}$$

Combinando queste:

$$\begin{aligned}
&f(E) - f(D) =\\
&\qquad \bar\lambda\,(\mathbf{u}f)(A) + \tfrac{1}{2}\bar\lambda^2\left(\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{u}f)\right)(A) + \bar\mu\,(\mathbf{v}f)(B) + \tfrac{1}{2}\bar\mu^2\left(\frac{d}{d\mu}(\mathbf{v}f)\right)(B)\\
&\qquad -\bar\mu\,(\mathbf{v}f)(A) - \tfrac{1}{2}\bar\mu^2\left(\frac{d}{d\mu}(\mathbf{v}f)\right)(A) - \bar\lambda\,(\mathbf{u}f)(C) - \tfrac{1}{2}\bar\lambda^2\left(\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{u}f)\right)(C)
\end{aligned}$$

dove abbiamo tralasciato di scrivere i termini $O(\bar\lambda^3)$ e $O(\bar\mu^3)$. I termini in $\bar\lambda^2$ si cancellano a meno di $O(\bar\lambda^2\bar\mu)$, e analogamente per quelli in $\bar\mu^2$: si arriva così a

$$\begin{aligned}
f(E) - f(D) &= \bar\mu\,\{(\mathbf{v}f)(B) - (\mathbf{v}f)(A)\} - \bar\lambda\,\{(\mathbf{u}f)(C) - (\mathbf{u}f)(A)\}\\
&= \bar\mu\bar\lambda\,(\mathbf{uv}f)(A) + O(\bar\lambda\bar\mu^2) - \bar\lambda\bar\mu\,(\mathbf{vu}f)(A) + O(\bar\lambda^2\bar\mu)\\
&= \bar\lambda\bar\mu\,[\mathbf{u}, \mathbf{v}]f
\end{aligned}$$

a meno di termini di terzo ordine. Questo dimostra la tesi, e fa vedere inoltre che *la curva integrale di* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *passante per* D *passa per* E (a meno di termini del terzo ordine) *al valore* $\bar{\lambda}\bar{\mu}$ *del parametro.* ■

Vale inoltre il seguente teorema: *se* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$ *in tutto un intorno di* A, *i punti* D *ed* E *coincidono esattamente in quell'intorno.*

Dim.: La tesi del teorema equivale alla seguente: partendo da A seguiamo la curva γ fino a un certo λ, poi la curva δ_1 fino a μ; otterremo un punto $P(\lambda, \mu)$. L'insieme dei punti P è una sottovarietà $\mathcal{M}'$ di $\mathcal{M}$, bidimensionale (fig. 9–2). Dico che le curve descritte da P al variare di λ, per μ fissato, sono curve integrali di $\mathbf{u}$.

Scelto un sistema di coordinate, la sottovarietà $\mathcal{M}'$ avrà equazioni parametriche $x^\alpha = \xi^\alpha(\lambda, \mu)$. Sappiamo per costruzione che $\partial\xi^\alpha/\partial\mu = v^\alpha$, e che $\partial\xi^\alpha/\partial\lambda = u^\alpha$ su γ, ossia per $\mu = 0$; vogliamo dimostrare che la stessa relazione vale in tutti i punti di $\mathcal{M}'$.

Poniamo per brevità $w^\alpha = u^\alpha - \partial\xi^\alpha/\partial\lambda$, e calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^\alpha}{\partial\mu} &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial\mu} - \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\lambda} = u^\alpha{}_{,\beta}\, v^\beta - \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\mu} = u^\alpha{}_{,\beta}\, v^\beta - \frac{\partial v^\alpha}{\partial\lambda} \\ &= u^\alpha{}_{,\beta}\, v^\beta - v^\alpha{}_{,\beta}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\lambda} = v^\alpha{}_{,\beta}\left(u^\beta - \frac{\partial\xi^\beta}{\partial\lambda}\right) = v^\alpha{}_{,\beta}\, w^\beta\end{aligned}$$

(nella seconda riga abbiamo usato la (9–1), con $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$). Dunque le w^α soddisfano un sistema di equazioni differenziali (lineari omogenee) del primo ordine, con le condizioni iniziali $w^\alpha = 0$ per $\mu = 0$: pertanto sono sempre nulle. ■

Sia dato ora un insieme di n campi $\{\mathbf{e}_\alpha\}$: dal teorema precedente segue il corollario: $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ *è una base coordinata sse* $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 0$.

Dim.: La condizione è necessaria, come si vede dal fatto che $\mathbf{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ e le derivate commutano. Per la sufficienza, basta osservare che in un intorno di A si può definire un sistema di coordinate associato alla base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, prendendo come linee coordinate le curve integrali degli $\mathbf{e}_\alpha$. Si ripete la costruzione del teorema che precede, usando gli n campi $\mathbf{e}_\alpha$ al posto dei due campi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Come nella dimostrazione del teorema i parametri λ, μ sono coordinate sulla sottovarietà $\mathcal{M}'$, così ora avremo n parametri che funzionano da coordinate per l'intera varietà, o almeno per un certo intorno di A. ■