CAPITOLO 16

E finalmente torniamo alla fisica

Riprendiamo il filo del discorso dal Cap. 1, dove abbiamo visto che in un RIL la fisica è (localmente) lorentziana. Dunque possiamo trovare coordinate $\{x^\alpha\}$ tali che il tensore metrico si riduce alla forma della relatività ristretta:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}.$$

Inoltre vale il principio d'inerzia, il che vuol dire che le geodetiche per l'origine sono rette in queste coordinate, ossia $\Gamma = 0$ (le $\{x^\alpha\}$ sono una scelta particolare di coordinate normali di Riemann). Anzi: dato che il RIL rimane tale a tutti i tempi, ci aspettiamo $\Gamma = 0$ lungo tutta la geodetica (temporale) di equazioni $x^i = 0$. In effetti abbiamo mostrato al cap. 12 che si possono scegliere le coordinate in modo che ciò accada. Si noti che il trasporto parallelo conserva il prodotto scalare: questo ci assicura che la base associata al sistema di coordinate scelto non è ortonormale solo in un punto, ma lungo tutta la geodetica.

Dunque in queste coordinate la derivata covariante si riduce a derivata ordinaria, e perciò l'equazione (12–11) della deviazione delle geodetiche si riduce a

$$u^\alpha u^\beta v^\gamma{}_{,\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta{}_{,\alpha}\, v^\gamma{}_{,\beta} + u^\alpha u^\beta \Gamma^\gamma{}_{\alpha\mu,\beta}\, v^\mu = R^\gamma{}_{\alpha\beta\nu}\, v^\nu\, u^\alpha u^\beta.$$

Poiché lungo la nostra geodetica è sempre $u^0 = 1$, $u^i = 0$, il terzo termine a primo membro si annulla, perché $\Gamma^\gamma{}_{0\mu,0} = 0$. Quanto a $\mathbf{u}$, l'equazione delle geodetiche $\nabla_\mathbf{u}\mathbf{u} = 0$ si semplifica in $u^\alpha\, u^\beta{}_{,\alpha} = 0$, per cui anche il secondo termine si cancella, e si arriva a

$$v^\gamma{}_{,00} = R^\gamma{}_{00\nu}\, v^\nu. \tag{16–1}$$

Consideriamo, nel nostro RIL, oltre al punto materiale inizialmente ($x^0 = 0$) fermo nell'origine ($x^i = 0$) un altro, anch'esso inizialmente fermo ma nel punto $x^i = \xi^i$. Il moto successivo dei due punti seguirà due geodetiche vicine, i cui vettori tangenti (quadrivelocità) hanno entrambi inizialmente le componenti $(1, 0, 0, 0)$. Il campo $\mathbf{v}$ ha dunque inizialmente le componenti $(0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ e la (16–1) si scrive

$$\xi^i{}_{,00} = R^i{}_{00k}\, \xi^k = -R^i{}_{0k0}\, \xi^k \tag{16–2}$$

(nella (16–2) gli indici i, k a secondo membro non possono essere 0 causa l'antisimmetria di $\mathbf{R}$).

La (16–2) è esattamente l'equazione che avevamo scritto nel Cap. 1 per l'accelerazione di marea; allora il simbolo R a secondo membro non aveva un significato preciso, ma ora sappiamo che si tratta veramente del tensore di Riemann. Allora abbiamo anche mostrato che in un pozzo scavato dentro la Terra si trova

$$R^i{}_{0k0} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\,\delta^i_k \tag{16–3}$$

e ne segue

$$\tilde{R}_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha0} = 4\pi\varrho. \tag{16–4}$$

L'idea di base della RG è che la materia determina la curvatura dello spazio-tempo: dunque il tensore di Riemann dev'essere determinato dalla distribuzione di materia. Il solo oggetto che esprima la distribuzione di materia è il *tensore energia-impulso* $\mathbf{T}$, che in un RIL ha il solito significato della relatività ristretta. Le proprietà di $\mathbf{T}$ di cui abbiamo bisogno sono:

– è un tensore simmetrico
– la sua divergenza è nulla (come espressione delle leggi di conservazione di energia e impulso)

(rimandiamo al cap. seguente per una discussione più approfondita). Dunque in un RIL avremo $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$; la stessa equazione vale in generale, se la si esprime in termini di derivate covarianti.

La richiesta connessione fra $\mathbf{R}$ e $\mathbf{T}$ può dunque essere fatta solo attraverso il tensore di Einstein, postulando

$$\mathbf{G} = \kappa\,\mathbf{T}, \tag{16–5}$$

dove l'unica arbitrarietà rimasta è la costante κ, che dobbiamo ora determinare.

Dalla definizione di $\mathbf{G}$ si vede che $G^{\alpha}{}_{\alpha} = R - 2R = -R$, e perciò la (16–5) richiede $-R = \kappa\,T$ (avendo indicato con T la traccia di $\mathbf{T}$). Allora la stessa (16–5), tenendo conto della definizione (14–9) di $\mathbf{G}$, si scrive

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\,\kappa\,T = \kappa\,T_{\alpha\beta}.$$

In particolare:

$$\tilde{R}_{00} = \kappa\,T_{00} - \tfrac{1}{2}\kappa\,T. \tag{16–6}$$

Per materia non relativistica (piccole velocità, pressioni trascurabili) si ha $T_{00} = \varrho$ e anche $T = \varrho$; sostituendo nella (16–6), e usando la (16–4):

$$4\pi\varrho = \tfrac{1}{2}\kappa\varrho \quad \Rightarrow \quad \kappa = 8\pi.$$

Otteniamo quindi la forma finale dell'equazione di Einstein:

$$\mathbf{G} = 8\pi\,\mathbf{T}. \tag{16–7}$$

Commenti

Le (16–7) sono 10 equazioni nelle 10 incognite $g_{\alpha\beta}$, ma non indipendenti: grazie all'annullarsi della divergenza esistono 4 identità, e perciò le equazioni indipendenti sono soltanto 6. Questo è giusto, perché non si può pretendere che tutte le 10 incognite siano determinate: infatti da una certa soluzione possiamo sempre ottenerne un'altra — avente lo stesso significato fisico —con un'arbitraria trasformazione di coordinate. Poiché le coordinate sono 4, nella soluzione dobbiamo avere 4 funzioni arbitrarie, e questo è proprio quanto accade, grazie alle identità.

Osserviamo che la condizione $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ determina (almeno in parte) la dinamica della materia. Poiché $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ segue dalle (16–7), vediamo che queste implicano anche condizioni sulla dinamica della materia, e non solo sulla geometria dello spazio-tempo.

Se si scrivono esplicitamente le (16–7) calcolando il tensore di Einstein in funzione del tensore metrico, si ottengono per le $g_{\alpha\beta}$ equazioni a derivate parziali di secondo ordine, ma fortemente non lineari: questa è la ragione fondamentale per cui la matematica della relatività generale è complicata, e soluzioni esatte sono note solo in pochi casi (in genere con grande simmetria). Si tratta poi di equazioni *iperboliche*: in questo senso analoghe a quelle dell'elettrodinamica. Una soluzione determinata si ottiene (detto in termini piuttosto imprecisi) fissando la metrica di un'ipersuperficie spaziale e la sua variazione in direzione normale. Si rimanda ad es. a *Gravitation* per un formulazione rigorosa.

Visto che la (16–7) ha anche contenuto dinamico per la materia, non è corretto leggerla come un'equazione in cui $\mathbf{T}$ è dato, e la metrica $\mathbf{g}$ incognita. In generale sono incognite entrambe; è solo nota l'espressione di $\mathbf{T}$ in funzione di grandezze caratteristiche della materia: densità, pressione, eventuali campi… Ne segue che le 10 equazioni (16–7) determinano tanto la metrica (con l'arbitrarietà già detta) quanto l'evoluzione della materia. La questione apparirà più chiara discutendo qualche esempio (stelle, cosmologia …).

Teoria linearizzata

Per diverse ragioni conviene studiare l'approssimazione lineare della (16–7):

– perché aiuta a comprendere la natura matematica e il significato fisico delle equazioni
– perché è necessaria per dare significato ad alcuni concetti (energia, impulso, momento angolare)
– perché ha importanza pratica in alcune situazioni importanti, fra cui le onde gravitazionali.

Supporremo dunque che nel nostro spazio-tempo si possa trovare un sistema di coordinate $\{x^\alpha\}$ nel quale il tensore metrico differisca poco da quello della relatività ristretta:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \tag{16–8}$$

Per fare un unico esempio, in tutto il sistema solare la (16–8) è soddisfatta con $|h_{\alpha\beta}| \lesssim 10^{-6}$.

Possiamo ora calcolare i coefficienti di connessione, il tensore di Riemann e quello di Einstein, conservando in ogni caso soltanto i termini di primo ordine in $h_{\alpha\beta}$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}) && \text{(16–9)}\\
R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(h_{\beta\gamma,\delta\mu} + h_{\delta\mu,\beta\gamma} - h_{\beta\delta,\gamma\mu} - h_{\gamma\mu,\beta\delta})\\
G_{\beta\delta} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\gamma\mu}(h_{\beta\gamma,\delta\mu} + h_{\delta\mu,\beta\gamma} - h_{\beta\delta,\gamma\mu} - h_{\gamma\mu,\beta\delta})\\
&\quad - \tfrac{1}{2}\eta_{\beta\delta}\,\eta^{\gamma\mu}\,\eta^{\lambda\nu}(h_{\gamma\lambda,\mu\nu} - h_{\lambda\nu,\gamma\mu}) && \text{(16–10)}
\end{aligned}
$$

Nota: In tutte queste equazioni gli indici sono stati alzati o abbassati usando come tensore metrico $\eta_{\alpha\beta}$; lo stesso faremo sempre nel seguito.

Dalla (16–10) si ricavano le equazioni di Einstein, che però assumono forma decisamente più semplice usando, in luogo di $h_{\alpha\beta}$,

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}h\,\eta_{\alpha\beta},$$

dove ovviamente $h = h^{\alpha}{}_{\alpha}$. Si verifica facilmente

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\bar{h}\,\eta_{\alpha\beta}.$$

Ciò posto, le equazioni di Einstein sono:

$$
\begin{aligned}
&-\eta^{\mu\nu}\,\bar{h}_{\alpha\beta,\mu\nu} - \eta_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\varrho\sigma}\,\bar{h}_{\mu\varrho,\nu\sigma} +\\
&\qquad\qquad \eta^{\mu\nu}\,\bar{h}_{\alpha\mu,\beta\nu} + \eta^{\mu\nu}\,\bar{h}_{\beta\mu,\alpha\nu} = 16\pi\,T_{\alpha\beta}. \qquad \text{(16–11)}
\end{aligned}
$$

Il primo termine a primo membro della (16–11) è $\Box\bar{h}_{\alpha\beta}$; gli altri sono necessari per rendere l'equazione "gauge invariante." Spieghiamo il significato di questa affermazione.

Restando nella teoria linearizzata, ci sono due diversi tipi di trasformazioni di coordinate che possono essere usate:

– Una trasformazione di Lorentz: questa lascia invariante $\eta_{\alpha\beta}$ e trasforma $h_{\alpha\beta}$ come un normale tensore lorentziano.
– Una trasformazione (infinitesima) arbitraria: questa altera il tensore metrico, il che vuol dire che manda $h_{\alpha\beta}$ in un nuovo $h'_{\alpha\beta}$, che però non differisce, quanto a interpretazione fisica, dal vecchio.

Ragionando sulla seconda trasformazione, vediamo che essa appare come una trasformazione del "campo" $h_{\alpha\beta}$, che deve lasciare invarianti le equazioni; esattamente come accade con le trasformazioni di gauge dei potenziali elettromagnetici.

È noto che le equazioni dei potenziali elettromagnetici assumono in generale la forma

$$\Box A^{\mu} + A^{\nu}{}_{,\nu}{}^{\mu} = -4\pi\,j^{\mu} \qquad \text{(16–12)}$$

che è gauge invariante; si sfrutta poi l'arbitrarietà della gauge per semplificare l'equazione. Ad es. scegliendo la *gauge di Lorentz*: $A^\nu{}_{,\nu} = 0$, che riduce la (16–12) a

$$\Box A^\mu = -4\pi\, j^\mu.$$

La stessa cosa si può fare con le equazioni di Einstein (16–11): si verifica facilmente che esse sono invarianti sotto la trasformazione

$$h_{\alpha\beta} \mapsto h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} \tag{16–13}$$

dove ξ_α è un arbitrario campo vettoriale. Si può sfruttare la (16–13) per imporre la "condizione di Lorentz"

$$\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\beta} = 0$$

che riduce la (16–11) a

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = 16\pi\, T_{\alpha\beta}. \tag{16–14}$$

Lasciamo al lettore di verificare che la (16–13) è proprio la trasformazione prodotta su $h_{\alpha\beta}$ dalla trasformazione di coordinate

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha$$

(a meno di termini di secondo ordine nelle ξ^α). Dunque l'arbitrarietà introdotta dalle trasformazioni di gauge nella teoria linearizzata non è che il riflesso dell'arbitrarietà presente nella teoria esatta, discussa in precedenza.

Il campo gravitazionale del Sole

A titolo di esercizio, applichiamo la (16–14) al caso particolare del campo statico prodotto da una massa a simmetria sferica. Abbiamo dunque $T_{00} = \varrho$ e tutte le altre componenti sono nulle. Il campo esterno alla materia si ottiene immediatamente (ad es. per analogia col caso elettrostatico):

$$\bar{h}_{00} = -\frac{4M}{r}$$

(con ovvio significato di M ed r) e tutte le altre $\bar{h}$ sono nulle. Ne segue:

$$h_{\alpha\alpha} = -\frac{2M}{r}, \qquad h_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{se} \quad \alpha \neq \beta.$$

$$\begin{gathered} g_{00} = 1 - \frac{2M}{r}, \qquad g_{ii} = -1 - \frac{2M}{r} \\ g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{se} \quad \alpha \neq \beta. \end{gathered} \tag{16–15}$$

Abbiamo visto al Cap. 4 la soluzione esatta di questo problema; dovremmo aspettarci di ritrovare la stessa soluzione, a meno di termini di secondo ordine in M/r. Tuttavia le cose non stanno così: le due metriche appaiono diverse.

Esercizio: Dimostrare che la metrica (16–15) si riporta alla metrica di Schwarzschild linearizzata con una trasformazione di gauge del tipo (16–13).

Possiamo usare la (16–15) per ritrovare in altro modo la deflessione gravitazionale della luce. Partiamo dall'equazione delle geodetiche (11–4), che ci conviene riscrivere in termini del vettore tangente $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$:

$$\frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\, u^\beta\, u^\gamma = 0. \tag{16–16}$$

Ci occuperemo di luce che si propaga nel piano (x, y), con direzione iniziale parallela all'asse x (in verso positivo), a distanza b dall'origine; poiché la deflessione è piccola, sappiamo già che non solo $u^z = 0$, ma anche $|u^y| \ll u^x$, e che u^x è praticamente costante. Inoltre, trattandosi di luce, sarà $u^t \simeq u^x$.

Ne segue che delle (16–16) ci basta considerare la componente y, e nella somma a secondo termine contano solo $\Gamma^y{}_{tt}\,(u^t)^2$ e $\Gamma^y{}_{xx}\,(u^x)^2$. Calcolando i Γ con le (16–9) arriviamo all'equazione

$$\frac{du^y}{d\lambda} = -\frac{2My}{r^3}\,(u^x)^2,$$

che conviene riscrivere

$$\frac{du^y}{d\lambda} = -\frac{2My}{r^3}\,u^x\,\frac{dx}{d\lambda}.$$

Si può allora eliminare λ:

$$\frac{du^y}{dx} = -\frac{2My}{r^3}\,u^x.$$

Poniamo in questa $y = b$ e trattiamo u^x come costante: possiamo integrare senza difficoltà, ottenendo

$$\Delta u^y = -\frac{4M}{b}\,u^x,$$

da cui l'angolo di deflessione $4M/b$.