

CAPITOLO 3

Sistemi a due stati

I sistemi a due stati (più esattamente, a due stati indipendenti) hanno importanza per il nostro argomento, per più ragioni. Si tratta di sistemi in cui lo spazio \mathcal{H} ha solo due dimensioni. Ci sono numerose situazioni fisiche in cui uno spazio a due sole dimensioni è significativo: o perché si trascurano parte dei gradi di libertà del sistema (è questo il caso degli stati di spin di un elettrone, o degli stati di polarizzazione di un fotone) o perché per ragioni energetiche altri stati, che non appartengono a \mathcal{H} , sono esclusi dalle condizioni sperimentali (può essere questo il caso per certi stati atomici).

In un sistema a due stati una base di \mathcal{H} è formata da due soli vettori, che a seconda dei casi potremo indicare con $|1\rangle$ e $|2\rangle$, oppure con $|+\rangle$ e $|-\rangle$, o anche con $|x\rangle$ e $|y\rangle$, ecc. Il vettore generico potrà sempre essere scritto come

$$|v\rangle = v_1 |1\rangle + v_2 |2\rangle$$

e se vogliamo che $|v\rangle$ sia unitario, dovremo imporre $|v_1|^2 + |v_2|^2 = 1$. Inoltre un fattore di fase è sempre arbitrario, e possiamo disporne in vario modo: ad es. scegliendo v_1 sempre reale ≥ 0 . Si vede che restano liberi due soli parametri, e possiamo prendere

$$v_1 = \cos \vartheta, \quad v_2 = \sin \vartheta e^{i\varphi} \quad \vartheta \in [0, \pi/2], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

È anche possibile una rappresentazione geometrica, ponendo

$$x = \sin 2\vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin 2\vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos 2\vartheta. \quad (3-1)$$

Si verifica che $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sì che ogni punto della sfera unitaria S^2 corrisponde a uno stato. Nel caso degli stati di polarizzazione dei fotoni questa rappresentazione si chiama *sfera di Poincaré*.

Le osservabili

Non solo la rappresentazione degli stati è semplice, ma anche quella delle osservabili. Si vede infatti facilmente che esistono soltanto 4 op. hermitiani (quindi a.a.) linearmente indipendenti. È tradizionale prendere i seguenti:

- 1: l'identità I
- 2: l'oss. che ha autovalori 1 e -1 sulla base scelta: la chiameremo σ_z
- 3: l'oss. σ_x definita da $\sigma_x|1\rangle = |2\rangle$, $\sigma_x|2\rangle = |1\rangle$
- 4: l'oss. σ_y definita da $\sigma_y|1\rangle = i|2\rangle$, $\sigma_y|2\rangle = -i|1\rangle$.

Gli elementi di matrice delle oss. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sono risp.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e si dimostra facilmente dalle definizioni che valgono le seguenti identità algebriche:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I \\ \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z & \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x & \sigma_z \sigma_x &= -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y \\ [\sigma_x, \sigma_y] &= 2i\sigma_z & [\sigma_y, \sigma_z] &= 2i\sigma_x & [\sigma_z, \sigma_x] &= 2i\sigma_y. \end{aligned} \quad (3-2)$$

Si può verificare in più modi che ciascuna delle σ ha un autovalore 1 e un autovalore -1 .

Ogni altra oss. si potrà scrivere nella forma

$$A = a_0 I + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z \quad (a_0, a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}). \quad (3-3)$$

Ci si può chiedere: esistono oss. compatibili (a parte l'identità)? Basta usare la (3-3), e

$$B = b_0 I + b_x \sigma_x + b_y \sigma_y + b_z \sigma_z$$

per trovare

$$[A, B] = 2i \{(a_y b_z - a_z b_y) \sigma_x + \text{cycl.}\}$$

dove "cycl." indica le permutazioni cicliche di x, y, z . Dato che le σ sono indipendenti, debbono essere nulle tutte le espressioni $a_y b_z - a_z b_y$ ecc., il che vuol dire che i vettori (a_x, a_y, a_z) e (b_x, b_y, b_z) sono paralleli. Allora B ha la forma $pI + qA$ con p, q reali: *le sole oss. compatibili con A sono le combinazioni lineari di A e di I .*

È anche interessante che lo stesso insieme di oss. si ottiene costruendo l'algebra generata da I e da A , ossia, oltre alle combinazioni lineari, anche i prodotti.

Ci riuscirà utile il seguente teorema: *ogni stato del sistema è autostato di un'oss. del tipo $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$, dove \vec{n} è un vettore unitario, e viceversa: percorrendo tutti gli stati, si ottengono tutti i possibili \vec{n} .*

Dim.: Sia P il proiettore dello stato: per quanto visto sopra, sarà certo $P = a_0 I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$. Lo stato assegnato è autostato di P con l'autovalore 1; quindi è anche autostato di $\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = P - a_0 I$ (con autovalore $1 - a_0$) perché tutti i vettori sono autovettori di I con autovalore 1. Basta ora dividere per $|\vec{a}|$.

D'altra parte, comunque scelto \vec{n} , l'oss. $A = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ ha autovalori ± 1 : infatti si verifica che $A^2 = I$ e perciò un autovalore di A ha quadrato 1. Quindi $\frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$ ha autovalori 0 e 1 ed è un proiettore puro. ■

Le oss. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ si chiamano *matrici di Pauli*.

Esercizio: Verificare che le componenti di \vec{n} coincidono con le x, y, z definite dalla (3-1).

Polarizzazione dei fotoni

In questo capitolo ci occuperemo dei fotoni solo per quanto riguarda la polarizzazione, ossia trascurando altre caratteristiche, quali impulso, energia, posizione. Possiamo supporre, più esattamente, di aver a che fare con fotoni il cui *impulso* (e quindi anche l'energia) sia *esattamente determinato* in grandezza e direzione: in termini ondulatori questo vorrebbe dire che consideriamo *onde piane monocromatiche*. Assumeremo l'asse z nella direzione e verso in cui il fotone si propaga.

Con queste restrizioni lo spazio \mathcal{H} degli stati è bidimensionale: esistono *due soli stati* di polar. indipendenti. Possiamo prendere come base le due polar. rettilinee lungo gli assi x e y , e indicarle con $|x\rangle$ e $|y\rangle$ rispettivamente.

Occorre ora discutere gli strumenti di misura della polar. Ne prenderemo in considerazione due: i *polaroid* e i *cristalli birifrangenti* (ad es. calcite).

Una lastra polaroid (brevemente "polaroid") è un foglio di plastica nel quale sono inseriti microcristalli di materiale *dicroico*, ossia un materiale che lascia passare indisturbati i fotoni con un certo stato di polar. (per es. $|x\rangle$) mentre assorbe quelli ortogonali. Un polaroid ha un suo *asse*, che nell'esempio abbiamo fatto coincidere con l'asse x , ma può ovviamente essere ruotato a piacere.

Chiediamoci che cosa accade se si manda in un polaroid x un fascio di fotoni con stato di polar. generico

$$|w\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle. \quad (3-4)$$

L'esperienza mostra due cose:

- a) solo una frazione dei fotoni passa, e il resto vengono assorbiti
- b) i fotoni che passano sono *tutti* nello stato $|x\rangle$.

Più esattamente, la frazione che passa è proprio $|a|^2$ (è inteso che il vettore $|w\rangle$ sia normalizzato: $|a|^2 + |b|^2 = 1$). Inoltre è imprevedibile quali fotoni vengano trasmessi: la selezione è del tutto casuale.

Tutto questo mostra che siamo proprio di fronte a un processo di misura di un'oss.: possiamo assumere che si tratti dell'oss. P_x , proiettore dello stato $|x\rangle$, se interpretiamo come risultato 1 il fatto che il fotone è passato, come risultato 0 il fatto che è stato assorbito. È anche giustificato ciò che avevamo tacitamente supposto, ossia che gli stati $|x\rangle$ e $|y\rangle$ sono ortogonali. (Si noti che l'ortogonalità degli stati non ha niente a che fare con l'ortogonalità delle direzioni x e y , ma col prodotto scalare definito in \mathcal{H} .)

In realtà tutti i ragionamenti sugli stati di polar. dei fotoni hanno un preciso analogo classico nel modello ondulatorio, dove la polar. della luce è descritta dalla direzione del campo elettrico dell'onda. Possiamo lasciarci guidare dal

modello classico per costruire altre situazioni. Per es. possiamo impiegare luce polarizzata a 45° rispetto agli assi (bisettrice del primo quadrante). Il vettore di stato corrispondente sarà

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle)$$

dove il fattore $1/\sqrt{2}$ è necessario per la normalizzazione. Più in generale, il vettore

$$|\alpha\rangle = |x\rangle \cos \alpha + |y\rangle \sin \alpha \quad (3-5)$$

rappresenterà un fotone polarizzato ad angolo α rispetto all'asse x . Se mandiamo fotoni nello stato $|\alpha\rangle$ su un polaroid con asse x , passeranno con probabilità $\cos^2 \alpha$.

Nota: Non bisogna dimenticare che oltre alle polar. rettilinee impiegate fin qui esistono anche le polar. ellittiche (in particolare circolari): le si ottengono prendendo coefficienti complessi (almeno uno dei due) nella (3-4).

Abbiamo ragionato finora su fotoni inizialmente polarizzati: ma come li si può ottenere? In altre parole, come si prepara lo stato? La risposta è implicita in quanto detto: possiamo usare un polaroid per preparare un fascio di fotoni tutti nello stesso stato di polarizzazione (rettilinea): basterà orientare l'asse del polaroid nella direzione di polar. desiderata. È questo un fenomeno comune: uno strumento di misura può spesso essere usato anche come strumento di preparazione. Almeno ciò è vero quando lo strumento effettua una *selezione spaziale* dei sistemi nei diversi stati, oppure quando (è il caso dei polaroid) elimina tutti i sistemi (in questo caso i singoli fotoni) tranne quelli nello stato desiderato.

I cristalli birifrangenti

Passiamo ora ai cristalli birifrangenti, il cui prototipo è la calcite. Senza dare troppi dettagli, limitiamoci a dire che tali cristalli presentano il fenomeno della *doppia rifrazione*: un raggio di luce che entra nel cristallo viene generalmente diviso in due, che si rifrangono secondo angoli diversi. Se il cristallo ha due facce parallele, i due raggi escono, come nella rifrazione normale, paralleli al raggio entrante; però sono separati tra loro. Ne segue che se si guarda attraverso un cristallo del genere, si vede tutto sdoppiato.

Se si taglia il cristallo in maniera opportuna, ma sempre con due facce parallele, si può fare in modo che un raggio che incide perpendicolarmente a una faccia si divida in due, come sopra, ma che uno dei raggi (detto *raggio ordinario*) proceda perpendicolare (come farebbe in un materiale isotropo, ad es. vetro) mentre l'altro (raggio *straordinario*) viene deviato. Anche in questo caso, i due raggi escono dal cristallo perpendicolari, ma separati.

Ciò che conta per noi è che *i due raggi uscenti sono sempre polarizzati*, con polar. tra loro ortogonali, che assumiamo come x e y risp. Le direzioni di polar. sono caratteristiche del cristallo. Ne segue che un cristallo birifrangente può essere usato per separare fotoni in diversi stati di polar.: se nel fascio incidente

sono presenti tanto fotoni polarizzati x quanto fotoni polarizzati y , i fotoni x andranno tutti nel raggio ordinario, e quelli y nel raggio straordinario.

Che cosa dobbiamo aspettarci se mandiamo sul cristallo luce polarizzata a un angolo α rispetto all'asse x ? La risposta è già contenuta in tutto quanto precede: una frazione $\cos^2\alpha$ dei fotoni uscirà nel raggio ordinario, e una frazione $\sin^2\alpha$ in quello straordinario. Si può dire che anche il cristallo birifrangente effettua una misura di polarizzazione, ma più completa di quella del polaroid: infatti non elimina una parte dei sistemi (fotoni) ma semplicemente li separa spazialmente a seconda della polar. Potremo quindi contare i fotoni di entrambi i fasci, ad es. per verificare che nessuno sia andato perduto.

Nota: In realtà, dato che nessun cristallo è perfettamente trasparente, una frazione più o meno piccola andrà necessariamente perduta, venendo assorbita dal cristallo.

Che cos'è la luce non polarizzata?

Una prima risposta è semplice, ed è già contenuta in quanto appena detto. Se un insieme di fotoni consiste per metà di fotoni x e per metà di fotoni y , solo metà passeranno un polaroid con asse x , e lo stesso con asse y . Ma che cosa accade se il polaroid ha il suo asse ad angolo α con l'asse x ? È facile dedurre da quanto precede che dei fotoni polarizzati secondo x ne passerà la frazione $\cos^2\alpha$, e di quelli polarizzati secondo y la frazione $\sin^2\alpha$. Poiché i primi sono la metà del totale, e lo stesso i secondi, la frazione trasmessa in totale sarà $\frac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$: il numero di fotoni trasmessi *non varia ruotando il polaroid*.

Possiamo prendere questa come definizione di fascio non polarizzato? No, perché lo stesso risultato si ottiene se tutti i fotoni sono nello stato

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) \quad (3-6)$$

che rappresenta fotoni con polar. *circolare destra*.

Esercizio: Verificare questa affermazione.

Per completare la definizione "operativa" di fascio non polarizzato occorre disporre almeno di un altro strumento: la *lamina a 1/4 d'onda*. Si tratta di una lastrina di materiale birifrangente, che ha la proprietà di sfasare in modo diverso gli stati $|x\rangle$ e $|y\rangle$. Possiamo supporre per es. che il vettore $|x\rangle$ resti inalterato, e il vettore $|y\rangle$ venga moltiplicato per $-i$. Allora lo stato $|+\rangle$ della (3-6) diventa

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + |y\rangle) = |45^\circ\rangle$$

e se facciamo passare un fascio di questi fotoni attraverso un polaroid, ruotando quest'ultimo troveremo una variazione nel numero di fotoni trasmessi.

Un fascio non polarizzato non darà invece nessuna anisotropia osservabile, anche se viene fatto passare attraverso una lamina a $1/4$ d'onda, o in generale a un qualsiasi mezzo, anche birifrangente, che non assorba i fotoni. Questo accade se il fascio contiene metà fotoni nello stato $|x\rangle$ e metà nello stato $|y\rangle$, ma accade anche se metà sono nello stato $|\alpha\rangle$ e metà nello stato $|\alpha + \pi/2\rangle$ (qualunque sia α). Non solo: anche una miscela (sempre in parti uguali) di fotoni nello stato $|+\rangle$ e nello stato

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle - i|y\rangle) \quad (3-7)$$

(polar. circolare sinistra) si comporta allo stesso modo, e ci sono altre possibilità.

Questo è un risultato che suona paradossale, ma è solo una delle “stranezze” della m.q.: tutte queste miscele, che a prima vista sembrerebbero diverse, sono *fisicamente indistinguibili* e debbono essere perciò considerate la stessa cosa. Sarebbe quindi auspicabile trovare un formalismo che usi un singolo oggetto matematico per descrivere un fascio non polarizzato. Ciò è possibile, ma ora non possiamo approfondire la questione.