

CAPITOLO 5

Sistemi di due particelle

I sistemi di due particelle hanno un posto importante nella discussione sui fondamenti della m.q., almeno a partire dal famoso “paradosso di Einstein–Podolski–Rosen,” di cui parleremo in seguito. Dal punto di vista generale si tratta di definire stati e oss. di un sistema fisico composto appunto di due particelle, per ciascuna delle quali, prese separatamente, stati e oss. siano già ben identificati.

Seguendo la traccia percorsa fin qui, ci limiteremo agli stati di spin (o di polar.). Cominciamo perciò a riferirci, per concretezza, a un sistema formato da due elettroni. Per ciascuno dei due lo spazio degli stati è bidimensionale: li indicheremo con \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Come si costruisce lo spazio degli stati del sistema complessivo?

Prendiamo in ciascuno dei due spazi una base; per es. quella degli autovettori di s_z . Li indicheremo risp. con $|1+\rangle$, $|1-\rangle$ e con $|2+\rangle$, $|2-\rangle$. È allora chiaro che l'insieme delle coppie ordinate

$$|1+\rangle|2+\rangle \quad |1+\rangle|2-\rangle \quad |1-\rangle|2+\rangle \quad |1-\rangle|2-\rangle \quad (5-1)$$

forma una base per lo spazio \mathcal{H} degli stati del sistema complessivo. Indicheremo questo scrivendo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. In parole, \mathcal{H} è il *prodotto tensoriale* di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 .

Nota 1: Il prodotto tensoriale ha dimensione 4: però non si tratta di $2 + 2$, ma di 2×2 , come si vede ripetendo il ragionamento per spazi con un numero diverso di dimensioni.

Nota 2: Può sembrare a prima vista che la definizione di \mathcal{H} come prodotto tensoriale dipenda dalle basi scelte in \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , ma non è così. Si dimostra che ogni vettore di \mathcal{H} può essere espresso come combinazione lineare dei 4 vettori corrispondenti ai (5-1) in un'altra base qualsiasi di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 .

Conviene semplificare la notazione, indicando i vettori scritti in (5-1) come segue:

$$|++\rangle \quad |+-\rangle \quad |-+\rangle \quad |--\rangle \quad (5-2)$$

sottintendendo che il primo simbolo si riferisce sempre all'elettrone 1, l'altro all'elettrone 2.

I 4 vettori della (5-2) (appartenenti per definizione a \mathcal{H}) hanno un'interpretazione fisica immediata: sono autovettori simultanei delle due oss. s_{1z} e s_{2z} . Si noti che in partenza queste due oss. sono definite (come operatori) risp. in \mathcal{H}_1 e in \mathcal{H}_2 , ma si estendono in modo ovvio a \mathcal{H} , proprio attraverso la loro azione sui vettori (5-2). Fatto questo, è anche facile verificare che $[s_{1z}, s_{2z}] = 0$. Lo stesso discorso si può ripetere per tutte le oss. di spin, e in ogni caso un'oss.

relativa all'elettrone 1 commuta con una relativa all'elettrone 2. Ciò significa che le misure di oss. relative ai due elettroni sono sempre tra loro compatibili.

Spin totale: singoletto e tripletto

Le oss. del sistema composto non sono soltanto quelle dei due sistemi componenti, come s_{1z} , s_{2z} . Per esempio è un'oss. in \mathcal{H} la somma $s_{1z} + s_{2z}$ e le altre analoghe; ma anche il prodotto $s_{1z}s_{2z}$ e simili. In particolare, è importante considerare lo *spin totale* \vec{S} , definito da

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2.$$

Ci servirà conoscere il comportamento di \vec{S} sui 4 vettori della base (5-2); cominciamo con $S_z = s_{1z} + s_{2z}$. Dalla definizione di S_z è facile ricavare che i (5-2) sono tutti autovettori di S_z , risp. con gli autovalori 1, 0, 0, -1 (qui e in seguito esprimeremo gli spin in unità \hbar). Come si vede, gli autovalori 1 e -1 non sono degeneri, mentre l'autovalore 0 è due volte degenero: tutto il sottospazio

$$|w\rangle = \alpha |+-\rangle + \beta |-+\rangle$$

appartiene a questo autovalore.

Per capire che cosa ciò significhi, proviamo ad applicare S_x a $|w\rangle$: otteniamo

$$S_x |w\rangle = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) (|++\rangle + |--\rangle)$$

(ci si arriva ricordando che $s_x = \frac{1}{2}\sigma_x$, e usando le definizioni delle matrici di Pauli). Se in particolare $\alpha + \beta = 0$, troviamo

$$S_x (|+-\rangle - |-+\rangle) = 0$$

e allo stesso modo anche

$$S_y (|+-\rangle - |-+\rangle) = 0.$$

Dunque il vettore

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$$

è autovettore simultaneo di S_x , S_y , S_z , tutti con autovalore 0 (il fattore $1/\sqrt{2}$ serve per normalizzare). È quindi ragionevole dire che lo stato $|0\rangle$ rappresenta uno *stato di spin totale* 0 del sistema di due elettroni.

Procedendo in maniera analoga, anche se un po' più complicata, si dimostra che con i tre vettori

$$|1, 1\rangle = |++\rangle \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \quad |1, -1\rangle = |--\rangle$$

che sono per costruzione autovettori di S_z , con autovalori 1, 0, -1 , si riesce anche a costruire, per sovrapposizione, autovettori di S_x e di S_y con gli stessi autovalori. Perciò diciamo che essi rappresentano *tre stati di spin totale 1*.

Poiché lo stato di spin 0 è unico, lo si chiama spesso stato di *singoletto*, mentre quelli di spin 1 si chiamano stati di *tripletto*.

In realtà questi nomi derivano dall'effetto dello spin sui livelli atomici, sul quale non possiamo soffermarci. Ci limitiamo a dire che negli atomi con *due elettroni ottici* (ossia atomi in cui due soli elettroni sono responsabili delle transizioni associate a righe spettrali nel visibile: l'esempio più semplice è l'Elio) la classificazione degli stati in singoletto e tripletto corrisponde a caratteristiche osservabili, che erano note ben prima della m.q.

Osservazione: Nei sistemi di due particelle identiche (ad es. due elettroni, due fotoni) occorre tener conto di questa identità, che dà luogo a una restrizione sugli stati possibili del sistema. Qui non ci preoccuperemo di ciò, e occorre dare un minimo di giustificazione. Il fatto è che nei casi che potranno interessarci le due particelle, anche se identiche, restano però *distinguibili*: di solito perché si trovano in regioni di spazio separate. In tali condizioni la restrizione dovuta all'identità non ha alcun effetto e possiamo trascurarla.

Stati intrecciati

Degli stati di due particelle finora introdotti, sono particolarmente interessanti

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

e

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle).$$

Entrambi sono autostati di S_z per l'autovalore 0, e hanno anche in comune di essere costruiti con combinazioni lineari dei due stati $|+-\rangle$ e $|-+\rangle$.

Ma la cosa interessante è questa: mentre $|+-\rangle$ e $|-+\rangle$ sono autostati di s_{1z} (e anche di s_{2z}), $|0\rangle$ e $|1,0\rangle$ *non lo sono*: se si esegue una misura di s_{1z} sul sistema preparato nello stato di singoletto, si potrà trovare tanto il risultato $+1/2$ quanto $-1/2$ (con la stessa probabilità). Lo stesso è vero per s_{2z} , e uguale discorso si può fare per $|1,0\rangle$. Tra l'altro, questo mostra che *la misura di s_{1z} o di s_{2z} non basta a distinguere singoletto da tripletto*.

Non solo: da quanto precede si vede che se si ripete la preparazione dello stato $|0\rangle$ e si misura soltanto s_{1z} , la statistica dei risultati è la stessa che si avrebbe con un fascio *non polarizzato*. E si può dimostrare che ciò accade con qualsiasi oss.

Ma c'è di più: applicando il postulato 5'' si vede che se si parte con $|0\rangle$ e si misura s_{1z} , quando il risultato è per es. $+1/2$ si cade nello stato $|+-\rangle$; perciò

una successiva misura di s_{2z} dà con certezza il risultato $-1/2$. Viceversa: se si misura prima s_{2z} tutto va in maniera simmetrica, e lo stato dopo la misura è autostato anche di s_{1z} . Quindi se si misura s_{1z} *non c'è bisogno di misurare s_{2z}* , perché *il risultato è prevedibile*; e viceversa.

Si vede dunque che le operazioni di misura di s_{1z} e s_{2z} sono *intrecciate*, nel senso che il risultato dell'una determina il risultato dell'altra, sebbene in partenza nessuno dei due sia determinato. In un certo senso la cosa è ovvia: lo stato di singoletto è autostato di S_z , quindi il valore della somma di s_{1z} e di s_{2z} è perfettamente noto. Nessuna meraviglia che se si conosce il valore di una delle due oss. ne segua il valore dell'altra. Tuttavia questa situazione coesiste con l'iniziale indeterminazione di ciascuna delle due oss.

Per questo motivo stati come $|0\rangle$ o $|1, 0\rangle$ vengono chiamati *intrecciati* (inglese *entangled*). Più in generale, chiameremo intrecciato qualsiasi stato del sistema che non possa essere scritto come prodotto $|1, u\rangle|2, v\rangle$, con $|1, u\rangle$, $|2, v\rangle$ stati arbitrari per le particelle 1, 2 risp.

Problema: Come si caratterizza il più generale stato intrecciato? Posto che qualunque stato $|w\rangle$ del sistema potrà sempre essere scritto come combinazione lineare della base (5-2)

$$|w\rangle = \alpha_{++} |++\rangle + \alpha_{+-} |+-\rangle + \alpha_{-+} |-+\rangle + \alpha_{--} |--\rangle$$

trovare la condizione sui coefficienti perché $|w\rangle$ sia intrecciato.

Mostriamo ora una proprietà di uno stato intrecciato, che ne illustra ancor meglio il carattere particolare: *non esiste alcuna oss. di una particella di cui uno stato intrecciato sia autostato* (a parte quelle banali: i multipli dell'identità).

Dim.: Ci limiteremo a dimostrare il teorema per lo stato di singoletto, ma la dimostrazione si estende facilmente a qualsiasi stato intrecciato. Sia $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}_1$ l'oss. di cui $|0\rangle$ dovrebbe essere autostato. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_1 |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (n_x \sigma_{1x} + n_y \sigma_{1y} + n_z \sigma_{1z}) (|+-\rangle - |-+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (n_x - in_y) |++\rangle + n_z |+-\rangle + n_z |-+\rangle + (n_x + in_y) |--\rangle \}. \end{aligned}$$

Affinché $|0\rangle$ sia autovettore, l'ultima espressione dev'essere un multiplo scalare di $|0\rangle$, il che richiede

$$n_x \pm in_y = 0, \quad n_z = -n_z.$$

Dunque $n_x = n_y = n_z = 0$ e l'oss. si riduce a 0. ■

Sistemi di due fotoni

Anche in questo caso ci occupiamo solo degli stati di polar. Supporremo che i due fotoni siano stati emessi (per es. da un atomo) e viaggino lungo l'asse z , in versi opposti. Potremo allora costruire lo spazio \mathcal{H} come per gli spin, prendendo come base i 4 vettori

$$|xx\rangle \quad |xy\rangle \quad |yx\rangle \quad |yy\rangle$$

di ovvio significato.

Tra gli infiniti stati intrecciati, è interessante il seguente

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|xx\rangle + |yy\rangle) \quad (5-3)$$

del quale vogliamo studiare le proprietà. Per cominciare, invece della base $|x\rangle, |y\rangle$ per un fotone possiamo prendere

$$|\alpha\rangle, \quad |\alpha'\rangle = |\alpha + \pi/2\rangle$$

(la notazione è quella della (3-5)). Si tratta sempre di due stati polarizzati ortogonalmente tra loro, ma ad angolo α rispetto agli assi. Possiamo esprimere $|x\rangle, |y\rangle$ nella nuova base, come segue

$$\begin{aligned} |x\rangle &= |\alpha\rangle \cos \alpha - |\alpha'\rangle \sin \alpha \\ |y\rangle &= |\alpha\rangle \sin \alpha + |\alpha'\rangle \cos \alpha \end{aligned}$$

e sostituire in (5-3), ottenendo

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\alpha\rangle + |\alpha'\alpha'\rangle).$$

Si vede che l'espressione è rimasta la stessa anche nella nuova base: possiamo dire che lo stato $|0\rangle$ è *invariante per rotazioni*.

Analogamente a quanto abbiamo fatto con gli stati di spin, possiamo pensare di eseguire misure di polar. di un fotone sul sistema nello stato $|0\rangle$. I risultati sono del tutto simili. Se per es. si dispone un polaroid con asse x per il fotone 1, avremo probabilità $1/2$ che il fotone passi; ma in caso favorevole è certo che anche il fotone 2 attraverserà un secondo polaroid parallelo al primo.

Più esattamente, se il primo fotone attraversa il polaroid, il secondo fotone si trova nello stato $|x\rangle$ e mostrerà il comportamento prevedibile per questo stato rispetto a qualsiasi misura si pensi di eseguire.

Possiamo anche vedere la cosa in un altro modo. Prepariamo un esperimento di *coincidenza*, intendendo con questo che si registreranno come positivi solo

i casi in cui entrambi i fotoni hanno attraversato il rispettivo polaroid. Ci chiediamo con quale probabilità ciò accade, a seconda dell'angolo fra gli assi dei polaroid.

Sappiamo già che se gli assi sono entrambi x , la probabilità in questione è $1/2$: esattamente quella che il primo fotone venga trasmesso (se questo accade, il secondo passa certamente). L'invarianza per rotazioni dello stato ci assicura che lo stesso accadrà *tutte le volte che i polaroid sono paralleli*, non importa come orientati rispetto agli assi cartesiani. Se l'angolo fra i polaroid è un generico α , la risposta è contenuta in quanto già detto, ma si può ricavare direttamente proiettando lo stato $|0\rangle$ su $|x\alpha\rangle$: si ottiene un prodotto scalare $\cos\alpha/\sqrt{2}$ e quindi una probabilità $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$.

Non località e segnali superluminali

Gli stati intrecciati hanno un tipico comportamento *non locale*: intendiamo con questo che in uno stato intrecciato formato da due particelle separate spazialmente, una misura di un'oss. della particella 1 modifica *istantaneamente a distanza* lo stato della particella 2. Questo è mostrato dalla discussione fatta a proposito dello stato di singoletto per due particelle di spin $1/2$, che può essere ripetuta tale e quale anche per lo stato (5-3) di due fotoni.

Sembra quasi ovvio che tale non località vada contro l'idea relativistica di una velocità limite per le interazioni causali; in altre parole, che si potrebbe concepire un apparato che sfruttando stati intrecciati di due particelle, permetta di trasmettere informazioni con velocità $> c$ (addirittura infinita) fra due punti distanti. L'apparato potrebbe essere costruito come segue.

Disponiamo di una sorgente S (atomi) di coppie di fotoni nello stato $|0\rangle$ e di due rivelatori, A e B, in posizioni opposte rispetto a S. Supponiamo che la distanza di B da S sia maggiore della distanza di A, così che il fotone 1 arrivi in A prima che il fotone 2 arrivi in B. Davanti ai rivelatori si possono disporre i soliti polaroid, orientati a piacere, che vengono manovrati da due sperimentatori che chiameremo anch'essi A e B.

Se B dispone il suo polaroid secondo x , e lo stesso fa A, sappiamo che il fotone 2 arriverà a B se e solo se il fotone 1 è arrivato ad A; mentre se il polaroid in A è orientato come y le coincidenze sono impossibili. Dunque appena B riceve un fotone sa che il polaroid in A è orientato come x , e questo prima che qualunque segnale, anche alla velocità della luce, abbia avuto il tempo di arrivare da A a B. Non è questa una trasmissione superluminale d'informazioni?

In realtà il ragionamento è sbagliato nella seconda parte: quando B riceve un fotone, dal lato A possono essere accadute due cose. O il polaroid era orientato come x , e A ha rivelato il fotone, oppure il polaroid era orientato come y e A non ha rivelato il fotone. Le due eventualità sono ugualmente probabili, quindi B non ha modo di sapere quale scelta avesse fatta lo sperimentatore A.

Si possono anche escogitare altre disposizioni, ma il risultato è sempre lo stesso: *il peculiare carattere della non-località quantistica, associato all'indeterminismo nei risultati delle misure, esclude la trasmissione d'informazioni a velocità superluminali.*

Realtà e limiti degli stati intrecciati

Anche se la propagazione di segnali superluminali è fuori questione, l'esistenza di stati intrecciati sembra porre alcuni problemi, o almeno sembra richiedere un radicale revisione di alcuni criteri fondamentali della ricerca scientifica: per es. quello della *separabilità* dei sistemi fisici. S'intende con questo che è possibile non tener conto, nello studio di un certo sistema, di tutto ciò che è sufficientemente lontano (pur di prendere precauzioni ovvie, come quella di schermare il sistema da radiazioni, ecc.). Si può esprimere il concetto con una battuta: “qui sulla Terra possiamo disinteressarci di ciò che accade sull'altra faccia della Luna.”

Che sia possibile realizzare stati intrecciati, per es. di due fotoni separati spazialmente, è ormai confermato sperimentalmente al di là di ogni dubbio; sembra che si possa estrapolare il risultato degli esperimenti al modo che ora vogliamo descrivere.

In sostanza, l'idea degli stati intrecciati è che secondo la m.q. un sistema composto di due parti non può essere descritto come due sistemi distinti: lo spazio di Hilbert \mathcal{H} è uno (il prodotto tensoriale dei due spazi \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2) e occorre usare questo, perché sono possibili stati (appunto gli stati intrecciati) che appartengono a \mathcal{H} e non sono rappresentabili come prodotto di una coppia di stati rispettivamente di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Di più: anche se inizialmente lo stato è della forma $|1\rangle|2\rangle$, un'interazione fra le due parti componenti lo trasforma inevitabilmente in uno stato intrecciato; e anche se le due parti si separano spazialmente, come due fotoni emessi da uno stesso atomo in direzioni opposte, rimangono comunque in uno stato intrecciato, *a qualsiasi tempo successivo.*

Se questo è vero, si comprende che ogni particella, atomo, fotone, che abbia interagito con un'altra, forma con questa uno stato intrecciato; ma ciascuna delle due si troverà poi a interagire con altre, e perciò dovremo mettere tutte queste in un unico stato intrecciato. Proseguendo nel tempo, l'ambito delle interazioni, e quindi il numero di particelle in stato intrecciato, si allargherà sempre più, forse fino a comprendere l'intero Universo.

Ma abbiamo visto che in uno stato intrecciato ogni componente risente *istantaneamente* di ciò che accade all'altro; ne seguirebbe che non sia possibile una descrizione separata di sistemi parziali: si potrebbe solo parlare di un unico spazio di Hilbert degli stati dell'intero Universo... È evidente che se così fosse, qualsiasi indagine scientifica sarebbe viziata alla base dal fatto che noi non possiamo conoscere lo stato quantistico dell'intero Universo, mentre esso sarebbe necessario anche per studiare una parte comunque piccola.

D'altra parte l'esperienza della ricerca sta a indicare che le cose non stanno così; dunque nel ragionamento che abbiamo fatto deve esserci qualche errore, o meglio dev'essere stato trascurato qualche elemento essenziale della situazione. Vogliamo ora mostrare, sul più semplice esempio possibile, dove si nasconde la difficoltà.

Propagazione dei fotoni in un mezzo

Riprendiamo in esame lo stato (5-3) di due fotoni, e studiamone l'evoluzione nel tempo. Se i fotoni sono separati spazialmente, ciascuno si propaga come una particella libera e il suo vettore di stato varia per il fattore di fase $\exp(-iE_1t/\hbar)$ per il fotone 1, e analogo per il fotone 2. Osserviamo che

$$\frac{E_1t}{\hbar} = 2\pi\nu_1t = \frac{2\pi ct}{\lambda_1} = \frac{2\pi x}{\lambda_1}. \quad (5-4)$$

Abbiamo supposto che il fotone si propaghi nel vuoto; λ_1 è la lunghezza d'onda. La (5-4) mostra che la fase del vettore è proporzionale a x , ossia allo spazio percorso.

Lo sfasamento (5-4) è lo stesso per lo stato $|x\rangle$ e per lo stato $|y\rangle$; quindi il fattore di fase si raccoglie a fattore comune nella (5-3), e non influisce sullo stato. In queste condizioni dunque lo stato di due fotoni rimane intrecciato come all'inizio, *quale che sia la distanza percorsa*. Si noti però l'ipotesi essenziale: che la propagazione avvenga nel vuoto, il che equivale a dire che i nostri fotoni *non subiscono alcuna interazione*. Questa è la situazione che si cerca di approssimare il meglio possibile negli esperimenti.

Dobbiamo ora vedere che cosa cambia se supponiamo che i fotoni si propaghino in un mezzo. Non possiamo qui discutere in dettaglio la propagazione della luce a livello quantistico, che richiede l'esame microscopico delle interazioni di un fotone con ciascun singolo atomo o molecola. Ci accontentiamo di asserire che *a livello macroscopico* tutto va come se il fotone viaggiasse a velocità $v = c/n$ (n indice di rifrazione), esattamente come un'onda e.m. classica.

Al posto della (5-4) avremo dunque:

$$\frac{E_1t}{\hbar} = 2\pi\nu_1t = \frac{2\pi ct}{\lambda_1} = \frac{2\pi n_1 v_1 t}{\lambda_1} = \frac{2\pi n_1 x_1}{\lambda_1} \quad (5-5)$$

dove λ_1 è ancora la lunghezza d'onda nel vuoto. La (5-5) mostra che la fase del vettore è ora proporzionale al prodotto $n_1 x_1$, che è il *cammino ottico del fotone 1*.

Non possiamo ora dare per scontato che lo sfasamento sia lo stesso per lo stato $|x\rangle$ e per lo stato $|y\rangle$: questo accade se e solo se il mezzo non è birifrangente. In questa ipotesi il fattore di fase si raccoglie a fattore come prima, e non cambia niente al discorso fatto per il vuoto. A prima vista sembra dunque che

si possano avere problemi solo se il mezzo è birfrangente, ma in realtà a questo punto non possiamo più accontentarci della descrizione macroscopica: dobbiamo guardare più da vicino alle interazioni che il fotone subisce, anche in un mezzo macroscopicamente isotropo.