CAPITOLO 6

Il paradosso di Einstein–Podolski–Rosen

Nel 1935 usciva un articolo degli autori sopra indicati, dal titolo "Si può ritenere completa la descrizione quantistica della realtà fisica?" L'articolo avrebbe seguito la storia di tutta la discussione sui fondamenti (della quale costituì e costituisce ancora un punto centrale): ampiamente discusso agli inizi, poi conosciuto e studiato solo da pochi interessati, in tempi più recenti ha rivisto accendersi un interesse più ampio, che ha portato anche a una quantità di esperimenti.

Daremo qui una descrizione del problema posto da quel lavoro e delle sue implicazioni per la questione dei fondamenti della m.q. Ma occorre prima di tutto chiarire alcuni termini e fare alcune premesse. Che cosa intendono EPR per "teoria completa" è scritto con chiarezza nell'articolo: *ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.* Il problema è così rinviato a definire che cosa s'intenda per "elemento della realtà fisica." EPR danno questa definizione:

> *Se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo prevedere con certezza* (*cioè con probabilità unitaria*) *il valore di una grandezza fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa grandezza.*

Nella discussione moderna questo enunciato viene definito "principio di realtà" o "ipotesi di realismo." Invece di dire "esiste un elemento di realtà" si dice spesso "il sistema possiede oggettivamente" la proprietà in questione. Va tenuto presente che "possedere oggettivamente" significa "indipendentemente da qualsiasi osservatore," e anche "indip. dal fatto che la misura venga o no eseguita."

Occorre anche aggiungere che l'analisi del lavoro di EPR ha mostrato la necessità di esplicitare un'altra ipotesi lasciata sottintesa dagli autori:

> *Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.*

O più precisamente:

> *Se due sistemi fisici sono spazialmente localizzati in regioni separate, nessuna proprietà oggettiva dell'uno può dipendere da operazioni eseguite sull'altro, prima che sia trascorso il tempo necessario per la propagazione di un'interazione.*

Questo enunciato prende usualmente il nome di "località einsteiniana," o anche di "separabilità" dei sistemi.

Ciò posto, EPR riescono a mostrare che i tre requisiti: completezza, realismo e località non possono essere soddisfatti insieme dalla m.q. La conclusione del loro lavoro è che la m.q. è incompleta, ed esprimono la speranza che in un futuro potrà essere rimpiazzata da una teoria completa.

Com'è ormai tradizionale, presenteremo il "paradosso" non nella forma originaria, ma in una versione equivalente più semplice, inizialmente proposta da Bohm–Aharonov nel 1957.

Un esperimento con stati intrecciati

Possiamo ragionare in modo del tutto equivalente sullo stato di singoletto di due elettroni, o sullo stato $|0\rangle$ di due fotoni, entrambi discussi nel cap. precedente. Bohm–Aharonov scelsero gli spin, mentre qui sceglieremo il sistema di due fotoni, per la sola ragione che molti degli esperimenti di cui parleremo in seguito sono appunto stati fatti con due fotoni. In effetti gran parte della discussione è già stata fatta nel cap. precedente; dobbiamo solo richiamarne qualche punto, e reinterpretarne i risultati secondo le idee di EPR.

Abbiamo dunque due fotoni, emessi da un atomo sulla stessa retta ma in versi opposti. I due fotoni sono nello stato

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(|xx\rangle + |yy\rangle\bigr).$$

Eseguiamo sul fotone 1 una misura di polar. secondo x (con un polaroid). Se il fotone passa, sappiamo che esso è nello stato $|x\rangle$, e anche il fotone 2 si trova nello stato $|x\rangle$, perché lo stato del sistema di due fotoni è divenuto $|xx\rangle$.

Siamo perciò sicuri che se eseguissimo una misura di polar. sul fotone 2 lo troveremmo nello stato $|x\rangle$, e questo *senza bisogno di eseguire davvero la misura*, quindi senza disturbarlo. Possiamo dunque dire che il fotone 2 *possiede oggettivamente la polar. x*. Ma secondo l'ipotesi di località einsteiniana, la misura da noi eseguita non può aver influenzato istantaneamente le proprietà oggettivamente possedute dal fotone 2: quindi esso possedeva oggettivamente la polar. x *anche prima della misura*.

Ricordiamo però che lo stato $|0\rangle$ del sistema di due fotoni è invariante per rotazioni, e che quindi non contiene alcuna informazione che possa farci privilegiare una qualsiasi direzione. Invece il fotone 2 ha una proprietà oggettiva che privilegia l'asse x: ne segue che *la descrizione quantistica*, sintetizzata nel vettore di stato $|0\rangle$, *è incompleta*.

Si può anche presentare la situazione in un altro modo. Se la m.q. è completa, lo stato iniziale del sistema fornisce tutte le informazioni possibili su tutte le misure che potremo eseguire. Invece di misurare la polar. x del fotone 1, possiamo misurare la polar. a un angolo α qualsiasi: nel discorso non cambia niente. Perciò, come poco fa avevamo concluso che il fotone 2 possedeva oggettivamente — anche prima della misura sul fotone 1 — la polar. x, possiamo con lo stesso diritto asserire che esso possiede la polar. α, per qualsiasi α.

Questo già suona paradossale di per sé, ma si può vedere che implica una contraddizione, osservando che i proiettori P_α, P_β per $\alpha \neq \beta$ non commutano e non hanno autovettori comuni, a meno che α e β non differiscano per un angolo retto (la verifica è immediata). Si tratta dunque di oss. non compatibili, e dai postulati interpretativi segue che non può esistere nessuno stato del sistema in cui entrambe hanno un valore ben definito.

EPR argomentano: dato che l'ipotesi di completezza ci ha portati a una contraddizione, *essa deve essere falsa.* Alla luce di quanto già detto si vede che in realtà l'argomento di EPR dimostra solo che è falsa la congiunzione di tre ipotesi: completezza, realismo, località; ma non possiamo dire quale debba cadere.

Commento sull'incompatibilità

A proposito di oss. incompatibili, fin dalla nascita della m.q. si è spesso insistito (ad es. Heisenberg) che l'incompatibilità nasce dal disturbo che la misura dell'oss. A produce sullo stato, alterando quindi i possibili risultati della misura dell'oss. B. Si usa di solito la formula "influenza dell'osservatore sulla misura," che evidenzia un'interpretazione soggettivistica della teoria. È utile esaminare questo punto nella situazione del paradosso EPR, che ci mostrerà come sia necessario un diverso modo d'intendere l'incompatibilità.

Come già detto, se si misura la polar. x del fotone 1 ne segue che il risultato della polar. x per 2 è certo, mentre è incerto il risultato della misura di un'altra generica polar. α. Tutto va come se avessimo misurato direttamente la polar. x del fotone 2, con la differenza che la misura sul fotone 1 *non può influenzare lo stato del fotone* 2 (località).

Dunque non si può restare nel quadro di un'interpretazione realistica e locale, e attribuire l'incompatibilità alla perturbazione fra le diverse operazioni di misura: *l'incompatibilità è un effetto genuinamente quantistico*, non riconducibile solo all'influenza fra le misure. Allo stesso modo, il fatto che su certi stati i valori di certe oss. non siano determinati è una proprietà intrinseca dei sistemi quantistici, indipendente dalle operazioni di misura che si eseguono.

Va da sé che l'incompatibilità di due oss. deve implicare che non sia possibile eseguire insieme le rispettive misure, altrimenti si cadrebbe in una contraddizione. Per comprendere come e perché ciò accada occorre però affrontare il problema della misura quantistica, ossia formulare — nel quadro della m.q. — una teoria delle operazioni di misura. Si vedrà allora che *l'incompatibilità di due oss. si riflette in precise limitazioni circa le corrispondenti operazioni di misura, e non viceversa.*

Il problema del completamento

Seguendo la linea di EPR, che porta a ritenere la m.q. incompleta, era naturale che si sviluppassero dei tentativi di completamento. Detto in breve, ciò significa assumere che la conoscenza dello stato come è fornita dalla m.q. sia incompleta a causa del fatto che lo stato non determina i valori di certi parametri (le cosiddette “variabili nascoste”) che sarebbe necessario conoscere per poter prevedere esattamente i risultati delle misure di tutte le oss.

In questo spirito, il programma di completamento mira a costruire una teoria alternativa, completamente deterministica, nella quale s’introducono queste variabili nascoste; la teoria dovrà essere così fatta che facendo l’ipotesi di non conoscere esattamente le variabili nascoste, ma solo le loro distribuzioni di probabilità, ne segua il comportamento indeterministico dell’usuale m.q., e si ritrovino intatte le previsioni (probabilistiche o no) che la m.q. sa fare in ogni circostanza.

Si noterà che in una teoria a variabili nascoste l’incompleta conoscenza di tali variabili non è di principio: potrebbe anche essere superata in futuro, e comunque dipende solo da insufficienti conoscenze dell’osservatore. Si tratta quindi di un indeterminismo *epistemico*, a differenza di quello della m.q.

Il tentativo più completo e interessante è quello di Bohm (1952) che non possiamo qui descrivere in dettaglio. Diciamo solo che Bohm assume come variabili nascoste le *posizioni* delle particelle, e riesce a dimostrare che se si assume che le posizioni non siano conosciute, ma siano solo note le loro distribuzioni di probabilità (coincidenti con quelle date dalla m.q.) la sua teoria equivale in tutto e per tutto alla m.q. quanto a potere predittivo e dettagli delle previsioni.

Una peculiarità spiacevole della teoria di Bohm è di essere *non locale*, nel senso in cui il termine è stato usato a proposito del paradosso EPR. Nasce quindi la domanda: sarebbe possibile una teoria migliore, ossia un completamento *locale* della m.q.? Come vedremo, in seguito al lavoro di Bell la risposta è negativa.

Il teorema di von Neumann

Il programma di completamento della m.q., che era iniziato da subito, appena si era affermata la m.q. e la sua intepretazione “ortodossa” (per es. ad opera di de Broglie) subì in realtà un arresto ben prima degli anni ’50, a causa della comparsa di un fondamentale libro di von Neumann (1932) nel quale era studiata a fondo la struttura matematica della m.q. e tra gli altri risultati veniva dimostrato un teorema, da allora noto come “teorema di von Neumann.” Enunciare correttamente il teorema richiederebbe qui una lunga deviazione matematica, che non è il caso di fare; limitiamoci quindi a darne una descrizione semidivulgativa (da prendere quindi con tutte le cautele del caso).

In sostanza il teorema di von Neumann asserisce che non è possibile un’interpretazione deterministica della m.q. (del tipo di quelle con variabili nascoste) a causa della presenza di oss. incompatibili, ossia non commutanti. Poiché la necessità d’introdurre oss. incompatibili è fuori discussione (basta pensare alle variabili canoniche, anche per un punto materiale con un solo grado di libertà) sembra seguirne che il programma di completamento sia irrealizzabile.

Per molti anni il teorema di von Neumann fu visto come la prova decisiva che occorreva abbandonare la pretesa di un'interpretazione deterministica della m.q., e provocò una significativa riduzione dell'attività di ricerca in questo campo. Solo negli anni '50 cominciò a divenire chiaro che il teorema di von Neumann, sebbene corretto come teorema, era irrilevante per il problema di cui stiamo parlando: questo a causa delle ipotesi troppo restrittive del teorema stesso.

Detto in breve: un completamento deterministico significa che esistono stati del sistema in cui *tutte* le oss. hanno valori determinati. In sostanza si sostituisce al valor medio di un'oss. come lo abbiamo definito nell'ambito dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ degli stati, un valor medio da calcolare con una prescrizione non specificata (tecnicamente, un funzionale sull'algebra delle oss.) e si assume che esistano "funzionali senza dispersione," ossia con la proprietà che per ogni oss. valga

$$\varphi(A^2) = (\varphi(A))^2.$$

Von Neumann fa anche l'ipotesi che i funzionali siano lineari sull'algebra:

$$\varphi(aA + bB) = a\,\varphi(A) + b\,\varphi(B) \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{6–1}$$

e con queste ipotesi dimostra che l'algebra è necessariamente commutativa, ossia che tutte le oss. sono compatibili.

L'obiezione riguarda proprio l'ipotesi di linearità. Se due oss. non sono compatibili, la condizione (6–1) coinvolge i valori, nello stesso stato φ, di tre oss. A, B, $A + B$ che *non possono essere misurate insieme.*

Che l'ipotesi di von Neumann non possa essere pacifica lo si vede anche in altro modo, già riflettendo a un esempio semplicissimo: quello di una particella di spin 1/2. Consideriamo il vettore unitario $\vec{n}$ della bisettrice del primo quadrante, di componenti

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0$$

e l'oss.

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(s_x + s_y).$$

Questa con la (6–1) implica

$$\varphi(\vec{n} \cdot \vec{s}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bigl(\varphi(s_x) + \varphi(s_y)\bigr). \tag{6–2}$$

D'altra parte sappiamo che non solo s_x e s_y, ma anche $\vec{n} \cdot \vec{s}$ hanno autovalori $\pm 1/2$: questi saranno perciò i soli valori che dette oss. possono assumere in uno stato senza dispersione. Ma allora la (6–2) non può essere soddisfatta.

Se si tiene conto di questa critica, e si fa cadere la (6–1), il teorema di von Neumann non è più vero, e resta aperta la porta a un completamento. Solo che il completamento in questione avrà necessariamente una caratteristica, che viene usualmente denominata *contestualità*. Vediamo di che si tratta.

Consideriamo tre osservabili A, B, C tali che $[A, B] = 0$, $[A, C] = 0$, $[B, C] \neq 0$. Allora A e B sono compatibili, e possiamo aspettarci che esista una teoria deterministica che assegna valori precisi a entrambe. Lo stesso per A e C, ma non per tutte e tre. Ne segue che per quanto riguarda A fa differenza se supponiamo nota con certezza B, oppure C: anche in uno schema con variabili nascoste (che deve riprodurre puntualmente le previsioni della m.q.) le conoscenze su A saranno diverse a seconda che si misuri B oppure C. Appunto: la conoscenza su A *dipende dal contesto.*

Inutile dire che la teoria di Bohm manifesta questo carattere contestuale. Nell'esempio di EPR, le oss. A, B, C possono essere ad es. P_{2x}, P_{1x}, $P_{1\alpha}$.

Un esempio: lo spin 1/2

Una particella di spin 1/2 è un sistema per il quale è facile mostrare un completamento della m.q. nel senso appena detto. Ricordiamo per cominciare che tutte le oss. del sistema sono del tipo $aI + b\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, e che oss. con $\vec{n}$ non paralleli (e $b \neq 0$) sono incompatibili. Quanto agli stati, sappiamo che sono caratterizzati anch'essi da un vettore unitario $\vec{u}$, nel senso che per ogni $\vec{u}$ esiste uno e un solo stato appartenente all'autovalore 1 di $\vec{u}\cdot\vec{\sigma}$. Per brevità parleremo di "stato $\vec{u}$" per intendere questo stato.

D'altra parte la probabilità di ottenere il valore 1 di $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ sullo stato $\vec{u}$ è

$$P_{\vec{u}}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = 1) \,=\, \tfrac{1}{2}(1 + \vec{n}\cdot\vec{u}). \qquad (6\text{–}3)$$

È facile verificarlo quando $\vec{u} = \vec{e}_z$: infatti lo stato è autostato di σ_z con autovalore 1, ossia è $|+\rangle$. La probabilità cercata non è che il valor medio su $|+\rangle$ del proiettore associato all'autovalore 1 di $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, che è $\frac{1}{2}(1 + \vec{n}\cdot\vec{\sigma})$: basta allora ricordare che $\langle +|\sigma_x|+\rangle = \langle +|\sigma_y|+\rangle = 0$. Per uno stato generico la verifica sarebbe semplice appoggiandosi all'invarianza per rotazioni di tutto il formalismo sviluppato, che però non è stata discussa. Si può anche darne una verifica diretta, ma è piuttosto macchinosa e perciò la tralasciamo. Ovviamente la probabilità di ottenere il valore -1 è

$$P_{\vec{u}}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = -1) \,=\, \tfrac{1}{2}(1 - \vec{n}\cdot\vec{u}). \qquad (6\text{–}4)$$

Per dare un'interpretazione a variabili nascoste, ragioniamo come segue. L'oss. $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ non ha un valore certo sullo stato $\vec{u}$ perché non conosciamo i valori della variabili nascoste: lo stato quantistico ci permette solo di assegnare a queste variabili una distribuzione di probabilità. Dato che le $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ con $\vec{n}$ diversi sono incompatibili, possiamo comunque specificare il valore di solo una oss. per volta, anche assegnate le variabili nascoste.

Proviamo a prendere come variabile nascosta ancora un vettore unitario $\vec{v}$; dovremo allora decidere due cose:

1) per ciascun $\vec{v}$, quale delle oss. $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ ha valore definito, e se vale $+1$ oppure -1
2) la distribuzione di probabilità di $\vec{v}$ sullo stato $\vec{u}$.

Fatto questo, la probabilità dei valori di $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ sullo stato $\vec{u}$ si calcola immediatamente, e dovremo imporre che risulti uguale a quella data dalle (6–3), (6–4).

Quanto al punto 1, è naturale associare alla variabile $\vec{v}$ l'oss. $\vec{v}\cdot\vec{\sigma}$ col valore $+1$. Basterà allora (punto 2) dare come distribuzione di probabilità delle $\vec{v}$ sullo stato $\vec{u}$

$$\tfrac{1}{2}(1+\vec{u}\cdot\vec{v})$$

per ritrovare le (6–3), (6–4).

Si noterà come la contestualità si presenti, in questo esempio particolare, in una forma estrema: solo una delle oss. $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ ha valore definito.