CAPITOLO 9

Carattere di una rappresentazione

Per una r. finita D di un gruppo finito, si chiama *carattere* la funzione

$$\chi : \ \mathcal{G} \to \mathbb{C}, \ \chi(g) = \mathrm{Tr}\ D(g)$$

dove Tr indica la traccia della matrice.

Dalla definizione è facile mostrare che χ è *una funzione di classe*, nel senso *che assume lo stesso valore per tutti i g di una stessa classe di coniugazione.*
Dim.: Basta calcolare

$$\begin{aligned}\chi(h^{-1}gh) &= \mathrm{Tr}\ D(h^{-1}gh) = \mathrm{Tr}\,[D(h^{-1})D(g)D(h)] \\ &= \mathrm{Tr}\,[D(h)D(h^{-1})D(g)] = \mathrm{Tr}\ D(g) = \chi(g). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Inoltre *r. equivalenti hanno lo stesso carattere*: la dimostrazione procede nello stesso modo.

Poiché il gruppo è finito, lo è anche il numero m delle classi: le indicheremo con l'indice $_c$ e con n_c ne denoteremo la cardinalità, per cui, se n è l'ordine del gruppo, $\sum_c n_c = n$. In particolare, ricordiamo che l'elemento neutro e del gruppo fa classe a sé: allora χ_e è la dimensione d della r., perché $D(e)$ è sempre la matrice unità.

Sussiste il seguente teorema, che diamo senza dimostrazione:
Teorema 1: Se indichiamo con $\chi^{(r)}$ il carattere della r.i. r, valgono le *relazioni di ortogonalità*:

$$\sum_c n_c\, \chi_c^{(r)} \chi_c^{(r')^*} = n\, \delta^{rr'} \tag{9–1}$$

$$n_c \sum_r \chi_c^{(r)} \chi_{c'}^{(r)^*} = n\, \delta_{cc'} \tag{9–2}$$

In particolare, per $c = c' = e$ dalla (9–2) segue

$$\sum_r {d^{(r)}}^2 = n. \tag{9–3}$$

Si possono mettere le (9–1), (9–2) in una forma più espressiva introducendo i *caratteri ridotti*:

$$\bar{\chi}_c^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{n_c}{n}}\, \chi_c^{(r)}.$$

Si ottiene infatti

$$\sum_c \bar{\chi}_c^{(r)} \bar{\chi}_c^{(r')^*} = \delta^{rr'} \qquad \sum_r \bar{\chi}_c^{(r)} \bar{\chi}_{c'}^{(r)^*} = \delta_{cc'} \tag{9–4}$$

ossia *i caratteri ridotti formano una base ortonormale* in $\mathbb{C}^m$.

Corollario 1: Il numero delle r.i. (sottinteso: non equivalenti) di un gruppo finito è uguale al numero delle sue classi.

Avvertenza: La coincidenza dei due numeri non deve portare a credere che vi sia una qualche forma di corrispondenza fra le classi e le r.i.: infatti dare una r. (in particolare irriducibile) significa definire un automorfismo (matrice) per *ciascun* elemento del gruppo.

Osserviamo che il carattere è definito per qualunque r., anche riducibile; in proposito abbiamo i seguenti teoremi, piuttosto ovvi:

Teorema 2: Il carattere della somma diretta di due r. è la somma dei caratteri.

Corollario 2: La decomposizione di una r.r. in somma diretta di r.i. è unica.

Dim.: Basta usare il teorema 2 e le relazioni di ortogonalità. ∎

Corollario 3: Due r. (anche riducibili) sono equivalenti sse hanno lo stesso carattere.

Teorema 3: Il carattere del prodotto diretto di due r. è il prodotto dei caratteri.

Questi due teoremi sono di grande aiuto nella soluzione del problema di Clebsch–Gordan.

La definizione di carattere data per un gruppo finito si estende senza alcuna modifica anche a gruppi infiniti; in particolare, per gruppi compatti valgono ancora i teoremi di ortogonalità e completezza dei caratteri delle r.i. Solo che alle somme nelle (9–1), (9–2), (9–4) occorre sostituire integrali sulla misura invariante (v. Cap. 6). Più esattamente si dimostra che

a) *Le r.i. finite sono un'infinità numerabile.*

b) *I caratteri di due r.i. non equivalenti sono tra loro ortogonali.*

c) *I caratteri di tutte le r.i. non equivalenti formano un insieme completo* (nel senso della norma L^2) *nello spazio delle funzioni di classe.*

d) *L'insieme dei caratteri delle r.i. è caratteristico: scelti due elementi* g_1 e g_2 *del gruppo tra loro non coniugati, si trova sempre una r.i. per la quale* $\chi^{(r)}(g_1) \neq \chi^{(r)}(g_2)$.

I caratteri del gruppo del cubo

Applichiamo quanto precede al gruppo O. Osserviamo in primo luogo che la (9–3) già basta a determinare le dimensioni delle r.i.: infatti c'è un solo modo di ottenere 24 come somma di 5 quadrati:

$$24 = 1 + 1 + 4 + 9 + 9$$

da cui

$$d^{(1)} = 1,\ d^{(2)} = 1,\ d^{(3)} = 2,\ d^{(4)} = 3,\ d^{(5)} = 3.$$

La teoria sviluppata fin qui non è sufficiente per determinare i caratteri delle r.i. di O; per brevità ci limitiamo perciò a dare il risultato, nella seguente tabella, dove abbiamo usato per le classi la stessa notazione del Cap. 4:

	classe				
rappr.	a	b	c	d	e
$D_{\mathrm{O}}^{(1)}$	1	1	1	1	1
$D_{\mathrm{O}}^{(2)}$	1	1	-1	-1	1
$D_{\mathrm{O}}^{(3)}$	2	2	0	0	-1
$D_{\mathrm{O}}^{(4)}$	3	-1	1	-1	0
$D_{\mathrm{O}}^{(5)}$	3	-1	-1	1	0

Come esercizio, risolviamo il problema di Clebsch–Gordan per $D_{\mathrm{O}}^{(3)} \otimes D_{\mathrm{O}}^{(3)}$. Il carattere di questa r. è (teorema 3) $(4\,4\,0\,0\,1)$ e la semplice ispezione della tabella basta a verificare che c'è una sola decomposizione possibile:

$$D_{\mathrm{O}}^{(3)} \otimes D_{\mathrm{O}}^{(3)} = D_{\mathrm{O}}^{(1)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(2)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(3)}.$$

Ovviamente un procedimento rigoroso sfrutterebbe l'ortogonalità (teorema 1).

I caratteri di SO(3)

Per SO(3) faremo uso di un risultato noto dalla m.q., ossia che le r.i., numerate del numero quantico l, hanno dimensione $2l+1$ e che gli autovalori di L_z in una r.i. vanno da $-l$ a l per interi. Ciò vuol dire che una rotazione di angolo α attorno a z è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} e^{il\alpha} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-il\alpha} \end{pmatrix}$$

e di conseguenza il carattere della r. l è

$$\chi^{(l)}(\alpha) = \sum_{m=-l}^{l} e^{im\alpha} = -1 + 2\sum_{m=0}^{l} \cos m\alpha \tag{9–5}$$

(si ricordi che le rotazioni di uno stesso angolo formano una classe).

Lasciamo come esercizio la verifica dell'ortogonalità e completezza: occorre solo sapere che l'integrazione di una funzione di classe sulla misura invariante in SO(3) si esprime come segue:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\,(1-\cos\alpha)\,d\alpha.$$

O come sottogruppo di SO(3)

Possiamo ora riprendere e generalizzare la questione discussa alla fine del Cap. 5: decomporre una r.i. di SO(3) in r.i. del suo s.g. O.

Per il problema del momento d'inerzia si richiedeva la decomposizione di $D^{(2)}$: il carattere è, per la (9–5)

$$\chi^{(2)}(\alpha) = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha.$$

Le 5 classi di O hanno angoli risp. $0, \pi, \pi/2, \pi, \pi/3$ che danno per $\chi^{(2)}$ i valori $5, 1, -1, 1, -1$. Sempre dalla tabella, è facile scoprire che

$$D^{(2)} = D_{\mathrm{O}}^{(3)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(5)}.$$

Esercizio: Verificare che

$$\begin{aligned} D^{(3)} &= D_{\mathrm{O}}^{(2)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(4)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(5)} \\ D^{(4)} &= D_{\mathrm{O}}^{(1)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(3)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(4)} \oplus D_{\mathrm{O}}^{(5)}. \end{aligned}$$

Ortogonalità e completezza delle r.i.

Le proprietà che abbiamo visto fin qui per i caratteri si estendono anche agli elementi di matrice delle r.i., nel senso seguente. Consideriamo tutte le r.i. unitarie (non equivalenti) di un gruppo $\mathcal{G}$ finito o compatto, limitandosi, nel secondo caso, a quelle finite. Per ciascuna r. e per ciascun elemento del gruppo avremo degli elementi di matrice $[D^{(r)}(g)]^i{}_k$, che possiamo pensare come un insieme $\mathcal{F}$ (numerabile) di funzioni definite su $\mathcal{G}$. Allora:

a) $\mathcal{F}$ è ortonormale e completo

b) $\mathcal{F}$ è caratteristico.

Scriviamo esplicitamente la condizione di ortonormalità, di cui avremo bisogno nel seguito:

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} ([D^{(r)}(g)]^i{}_k)^* \, [D^{(r')}(g)]^{i'}{}_{k'} = \delta^{rr'} \delta^{ii'} \delta_{kk'}. \qquad (9\text{–}6)$$

La (9–6) è ovviamente scritta per un gruppo finito; per un gruppo compatto avremo una relazione analoga, dove al posto della somma figura un integrale.