

Cap. 8 – Gli assiomi di Wightman e le proprietà delle funzioni \mathcal{W}

Sommario dei primi due assiomi

Dopo aver discusso, nella prima parte di questo corso, i due primi assiomi della teoria di Wightman, con particolare riguardo per le questioni connesse con l'invarianza relativistica, in questa seconda parte riprendiamo l'assiomatica alla Wightman più da vicino, richiamando in primo luogo gli assiomi già enunciati nel Cap. 1:

Primo assioma:

Ad ogni stato fisico è associato un raggio unitario in uno spazio di Hilbert separabile.

Secondo assioma:

Sullo spazio di Hilbert è definita una rappresentazione unitaria e continua del gruppo $\tilde{\mathcal{P}}^{(1)}$

$$(a, \Lambda) \mapsto U(a, \Lambda).$$

Rispetto all'enunciato di pag. 3–1, si è aggiunta la richiesta che la rappresentazione sia continua, cioè che la rappresentazione sia anche un omomorfismo topologico.

Condizione spettrale

Introduciamo a questo punto il terzo assioma, che formuliamo in un primo momento in maniera non completamente rigorosa. Sia $U(a, 1)$ la rappresentazione unitaria del sottogruppo delle traslazioni: l'unitarietà implica che un generico operatore $U(a, 1)$ si possa porre in forma esponenziale: $U(a, 1) = \exp(ia_\mu P^\mu)$, con P^μ operatori autoaggiunti.

Terzo assioma (versione imprecisa):

Gli autovalori p^μ di P^μ appartengono alla chiusura del cono di luce positivo:

$$p^\mu \in \bar{V}^+; \quad \bar{V}^+ = \{p^\mu : p^\mu p_\mu \geq 0, p^0 \geq 0\}.$$

Tale enunciato non è rigoroso poiché i p^μ non sono propriamente degli autovalori, dal momento che gli "autostati" di P^μ non sono normalizzabili (tranne il vuoto).

Se infatti ai p^μ corrispondessero degli stati normalizzabili, applicando a uno di tali stati una trasformazione di $\tilde{\mathcal{P}}$ si potrebbe costruire un altro stato ortogonale, e poiché le trasformazioni di Lorentz dipendono da parametri continui,

⁽¹⁾ La notazione è impropria, poiché $U(a, \Lambda)$ parametrizza il gruppo \mathcal{P} e non $\tilde{\mathcal{P}}$, ma ciò è qui inessenziale.

si otterrebbero un'infinità continua di stati indipendenti, in contrasto con l'assioma della separabilità dello spazio di Hilbert.

Per una formulazione rigorosa del terzo assioma ricordiamo che, essendo U unitario, si può scrivere la decomposizione spettrale:

$$U(a, 1) = \int \exp(i a_\mu p^\mu) dE(p) \quad (8-1)$$

dove $E(S)$ è la famiglia di operatori di proiezione associata a $U(a, 1)$; oppure, secondo l'usuale terminologia matematica, è una misura a valori operatori di proiezione. $E(S)$ soddisfa le proprietà degli operatori di proiezione, e cioè :

$$E^2 = E$$

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B) \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$E(A \cap B) = E(A) E(B)$$

data una famiglia $\{A_i\}$ d'insiemi che invadono \mathbb{R}^4 : $E(\cup_i A_i) = 1$.

(La precedente decomposizione spettrale, nella notazione di Dirac, si scriverebbe:

$$U(a, 1) = \int \exp(i a_\mu p^\mu) |p^\mu\rangle dp \langle p^\mu|$$

dove è però necessario precisare che i $|p^\mu\rangle$ non sono normalizzabili.)

A partire dalla (8-1) il terzo assioma si formula:

Terzo assioma (versione finale):

$$E(S) = 0 \quad \text{se} \quad S \cap \bar{V}^+ = \emptyset.$$

Il vuoto

Introduciamo ora un ulteriore assioma:

Quarto assioma:

Esiste un vettore Ω tale che:

$$\forall a \forall \Lambda : U(a, \Lambda) \Omega = \Omega$$

e tale vettore è unico.

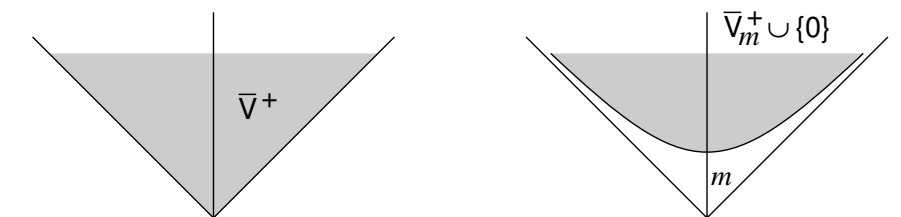
Ω è dunque un vettore che si trasforma secondo la rappresentazione banale del gruppo di Poincaré; esso corrisponde al "vuoto" delle teorie di campo. Per la caratterizzazione di Ω è sufficiente richiedere

$$P^\mu \Omega = 0, \quad \text{per } \mu \text{ fissato.} \quad (8-2)$$

Ci si può rendere conto che ciò è plausibile se ad esempio prendiamo $\mu = 0$; Ω è così caratterizzato da $P^0\Omega = 0$, cioè dall'aver energia nulla. Se ci limitiamo a considerare particelle di massa non nulla, è allora immediato convincersi che il vettore Ω così caratterizzato corrisponde a uno stato in cui non ci sono particelle, cioè lo stato di “vuoto.”

Se prendiamo in considerazione anche particelle di massa nulla, la $P^0\Omega = 0$ può far supporre l'esistenza di stati a energia piccola ad arbitrio; i soli stati normalizzabili sono però in ogni caso pacchetti d'onda a impulso ed energia non definiti, e in particolare l'energia media di tali pacchetti è sempre diversa da zero. Anche in questo caso allora Ω , caratterizzato da $P^0\Omega = 0$, va identificato con lo stato di vuoto.

A proposito delle particelle a massa nulla, è bene tener presente fin d'ora che in certe trattazioni esse vengono escluse (ipotesi di “mass gap”); il terzo assioma (sulla condizione spettrale) viene allora rafforzato, poiché a \bar{V}^+ si sostituisce il suo sottoinsieme $\bar{V}_m^+ \cup \{0\}$ costituito dall'origine (che corrisponde al vuoto) e da un iperboloido interno a \bar{V}^+ .



I campi come distribuzioni

Introduciamo ora i campi: nella trattazione ordinaria delle teorie di campo sono definiti come operatori funzioni del punto. Per una giustificazione soddisfacente dal punto di vista matematico di certe proprietà dei campi, come la proprietà che il commutatore di due campi possa essere una funzione singolare, conviene definire i campi come *distribuzioni* (temperate):

$$A(f) = \int A(x) f(x) dx$$

dove f è una “funzione di prova,” appartenente cioè all'insieme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$:

$$\mathcal{S} = \{f(x) \in C^\infty; x \in \mathbb{R}^4; f(x) \text{ a decrescenza rapida}\}.$$

Con $f(x)$ a decrescenza rapida s'intende che per $|x| \rightarrow \infty$, $f(x)$ e le sue derivate vanno a zero più rapidamente di ogni potenza inversa di $|x|$.

Per le $A(f)$ vengono richieste le seguenti proprietà:

- I. $A(f)$ è definito su $D \subseteq \mathcal{H}$, $\bar{D} = \mathcal{H}$.
- II. Esiste $A^+(f)$.

III. Se $\Psi \in D$, $A(f)\Psi \in D$.

IV. $U(a, \Lambda)D = D$.

V. $\Omega \in D$.

VI. $(\Phi, A(f)\Psi)$, $\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ è un funzionale lineare continuo su \mathcal{S} , o come si dice secondo la corrente terminologia, è una distribuzione temperata.

Nella I si tiene conto del fatto che $A(f)$ non è in generale limitato, e quindi non è definito sull'intero spazio \mathcal{H} ; basta però che sia definito su un insieme D denso in \mathcal{H} . La III è necessaria per definire il prodotto di operatori di campo; la IV è necessaria per l'invarianza relativistica della teoria; la V postula che i campi siano definiti sul vuoto (il suo significato sarà chiaro più innanzi.)

Proprietà di trasformazione dei campi

Con l'introduzione dei campi l'assioma dell'invarianza relativistica necessita di un'ulteriore precisazione, riguardo alla legge di trasformazione dei campi. Per campi dipendenti dal punto la legge di trasformazione è

$$U(a, \Lambda) A(x) U^+(a, \Lambda) = A(\Lambda x + a).$$

Per i campi che useremo nella nostra trattazione, postuliamo:

$$U(a, \Lambda) A(f) U^+(a, \Lambda) = A(f_{a, \Lambda}); \quad f_{a, \Lambda}(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$$

(per i campi scalari).

Per campi non scalari, dove cioè possiamo distinguere diverse "componenti" A_j , postuliamo:

$$U(a, \Lambda) A_i(f) U^+(a, \Lambda) = S_{ij} A_j(f_{a, \Lambda}),$$

con S_{ij} matrice appartenente a una rappresentazione di $SL(2, \mathbb{C})$, cioè della parte omogenea di $\tilde{\mathcal{P}}$.

Commutatività locale

Introduciamo ora un altro assioma, detto della commutatività locale. In analogia con i campi dipendenti dal punto, dove $[A_i(x), A_j(y)] = 0$ se $(x - y)^2 < 0$, richiediamo:

Quinto assioma:

$$\begin{aligned} [A_i(f), A_j(g)]_{\pm} &= 0 \\ [A_i(f), A_j^{\pm}(g)]_{\pm} &= 0 \end{aligned} \quad \text{se} \quad \text{supp } f \not\propto \text{supp } g.$$

La notazione $B \not\propto B'$, con B e B' sottospazi dello spazio-tempo, che si esprime anche dicendo che B e B' sono causalmente disgiunti, significa che ogni punto

di B è esterno ai coni di luce relativi a ciascun punto di B' (e viceversa). Nella formulazione dell'assioma abbiamo imposto delle condizioni sul commutatore oppure sull'anticommutatore di due campi; la scelta tra il commutatore e l'anticommutatore è stabilita dal teorema di connessione tra spin e statistica [14].

Ciclicità del vuoto

Arriviamo così all'ultimo assioma, o assioma della ciclicità del vuoto:

Sesto assioma:

I polinomi nei campi applicati al vuoto generano un insieme denso in \mathcal{H} . Cioè:

$$\{P(A_1(f_1), \dots, A_n(f_n)) \Omega\} = D_0, \quad \bar{D}_0 = \mathcal{H}.$$

Esiste una relazione tra unicità del vuoto, sua ciclicità e irriducibilità della teoria; si può cioè dimostrare che:

$$\text{ciclicità del vuoto} \wedge \text{unicità del vuoto} \Rightarrow \text{irriducibilità della teoria.}$$

Irriducibilità della teoria significa che un operatore limitato che commuta con tutti gli operatori di campo è un c-numero.

Il significato dell'irriducibilità è quello di assicurare che ogni operatore fisicamente importante sia esprimibile mediante gli operatori di campo.

Nella teoria ordinaria dei campi la conoscenza dei campi a un tempo qualsiasi è ottenuta a partire dalle equazioni del moto e dalle relazioni di commutazione a tempi uguali (che fungono da condizioni iniziali). Compito dell'assiomatica di Wightman è quello di stabilire fino a quale punto e con quali limitazioni l'ordinaria teoria dei campi si può generalizzare sostituendo alle equazioni del moto e ai commutatori a tempi uguali gli assiomi che abbiamo formulato.

Prima di proseguire nella trattazione osserviamo che andrebbe dimostrata la compatibilità degli assiomi; come esercizio si lascia da dimostrare che i campi liberi dell'ordinaria teoria quantistica soddisfano gli assiomi enunciati sopra.

Le funzioni di Wightman e le loro proprietà

Passiamo ora alla definizione delle funzioni \mathcal{W} di Wightman:

$$\mathcal{W}_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = (\Omega, A_{i_1}(x_1) \cdots A_{i_n}(x_n) \Omega).$$

Si tratta cioè dei valori medi sul vuoto di un prodotto di operatori di campo. Poiché tali operatori A_i sono distribuzioni nelle funzioni di prova f_i , le \mathcal{W} risultano essere distribuzioni multiple in f_1, \dots, f_n . Dal teorema nucleare di Schwartz segue in che le \mathcal{W} si possono considerare come distribuzioni in un'unica funzione di prova dipendente dagli n 4-vettori x_1, \dots, x_n .

Enunciamo ora, senza darne dimostrazione rigorosa, le proprietà delle funzioni di Wightman.

a) Legge di trasformazione relativistica.

Limitandoci a campi scalari, consideriamo una \mathcal{W} dipendente solo dai campi A_1, A_2 . Poiché $UA(x)U^+ = A(\Lambda x + a)$, e il vuoto Ω è invariante per trasformazioni di Lorentz, segue che

$$\begin{aligned} (\Omega, A_1(x_1)A_2(x_2)\Omega) &= (\Omega, U^+U A_1(x_1) U^+U A_2(x_2) U^+U \Omega) \\ &= (\Omega, A_1(\Lambda x_1 + a)A_2(\Lambda x_2 + a)\Omega) \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{W}_{12}(x_1, x_2) = \mathcal{W}_{12}(\Lambda x_1 + a, \Lambda x_2 + a). \quad (8-3)$$

In particolare per $\Lambda = 1$ si ha

$$\mathcal{W}_{12}(x_1, x_2) = \mathcal{W}_{12}(x_1 + a, x_2 + a)$$

e vale in generale che le \mathcal{W} sono funzioni soltanto delle differenze degli argomenti, ad es. di $x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots$. Tale fatto, evidente per delle semplici funzioni, non è però altrettanto facilmente dimostrabile per le distribuzioni. Si veda in proposito [14].

Con $a = 0$ la (8-3) implica:

$$\mathcal{W}_{12}(x_1, x_2) = \mathcal{W}_{12}(\Lambda x_1, \Lambda x_2),$$

cioè le \mathcal{W} sono funzioni costruite con gli invarianti relativistici di $x_1 - x_2$:

$$(x_1 - x_2)^2 \quad \text{e per } (x_1 - x_2)^2 \geq 0, \quad \text{sgn}(x_1^0 - x_2^0).$$

Ciò significa che le \mathcal{W} sono costanti su ciascuno degli iperboloidi 1, 2 e 3 in figura.

Per le generiche proprietà di trasformazione delle funzioni (cioè per campi non necessariamente scalari) si veda ancora [14] pag. 107.

b) Condizione spettrale.

Poiché l'insieme delle distribuzioni temperate è chiuso rispetto alla trasformata di Fourier, sono sempre definite le $\widetilde{\mathcal{W}}(p_1, \dots, p_n)$. La condizione spettrale si esprime:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad \text{se non tutti i } p_i \text{ appartengono allo spettro } S_p \text{ di } P^\mu: S_p \subseteq \bar{V}^+.$$

c) Hermiticità delle \mathcal{W} .

$$(\Omega, A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)\Omega) = (\Omega, A_n^+(x_n) \cdots A_1(x_1)\Omega)^*$$

d) Commutatività locale.

Se x_j e x_{j+1} sono separati spazialmente:

$$\mathcal{W}(\dots, x_j, x_{j+1}, \dots) = \mathcal{W}(\dots, x_{j+1}, x_j, \dots).$$

e) Condizione di “positive definiteness”.

Per ogni successione di funzioni $\{f_j\}$ ($f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$) con $f_j = 0$ tranne che per un numero finito di indici j , vale la

$$\sum_{jk} \int f_j^*(x_1, \dots, x_n) \mathcal{W}_{jk}(x_j, \dots, x_1, y_1, \dots, y_k) f_k(y_1, \dots, y_n) \geq 0 \quad (8-4)$$

con

$$\mathcal{W}_{jk} = (\Omega, A_{jj}^+(x_j) \cdots A_{j1}^+(x_1) A_{k1}(y_1) \cdots A_{kk}(y_k) \Omega)$$

(qui A_{ji} , A_{ki} indicano una qualsiasi scelta di campi della teoria).

Inoltre, se per qualche successione di funzioni di prova $\{f_i\}$ vale nella (8-4) il segno di uguaglianza, allora la (8-4) vale con il segno di uguaglianza anche per ogni successione $\{g_i\}$ definita da

$$g_0 = 0, \quad g_1 = g(x_1)f_0, \quad g_2 = g(x_1)f_1(x_2), \quad \dots \quad g_n = g(x_1)f_{n-1}(x_2, \dots, x_{n-1}).$$

f) Decomposizione asintotica.

Dato un 4-vettore a : $a^2 < 0$, si ha:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{W}(x_i, \dots, x_j, x_{j+1} + \lambda a, \dots, x_n + \lambda a) = \mathcal{W}(x_i, \dots, x_j) \mathcal{W}(x_{j+1}, \dots, x_n).$$

La condizione che a sia un 4-vettore spaziale è essenziale, e fa intuire l'analogia tra la decomposizione asintotica e la proprietà che tra due osservabili spazialmente separate non c'è correlazione in senso quantistico.

A proposito della convergenza dell'espressione

$$|\mathcal{W}(x_i, \dots, x_j, x_{j+1} + \lambda a, \dots, x_n + \lambda a) - \mathcal{W}(x_i, \dots, x_j) \mathcal{W}(x_{j+1}, \dots, x_n)|$$

si può dimostrare che in una teoria con mass gap M la convergenza è di tipo esponenziale, cioè l'espressione sopra scritta è maggiorata da $C \exp(-\lambda M|a|)$; per una teoria senza mass gap l'espressione di cui sopra converge come $1/\lambda^2$, ha cioè un comportamento del tipo della forza coulombiana.

Questo richiamo alla forza coulombiana non è casuale; anche in tal caso infatti l'interazione si può pensare mediata da particelle a massa nulla.