Cap. 12 – Rappresentazioni inequivalenti delle regole di commutazione

Campo scalare in interazione con sorgenti puntiformi fisse

In questo capitolo tratteremo alcuni esempi riguardanti le rappresentazioni inequivalenti delle regole di commutazione (o di anticommutazione). Questioni di questo tipo sorgono, nel modello fisico che considereremo, quando si supponga di poter scomporre l'Hamiltoniana relativa all'intero sistema in Hamiltoniana libera e Hamiltoniana d'interazione.

Tali questioni sono d'altra parte peculiari delle teorie di campo, poiché, come avremo occasione di mostrare più innanzi, sono in stretta relazione con proprietà tipiche di tali teorie, come la presenza d'infiniti gradi di libertà e di volumi di estensione infinita.

Si consideri come primo esempio un campo scalare $\psi(x)$ in interazione con delle sorgenti fisse: l'Hamiltoniana si supponga consistente di una parte libera e di una parte d'interazione: $H = H_0 + H_1$ con

$$H_0 = \tfrac{1}{2}\int \left(\pi^2 + |\vec{\nabla}\psi|^2 + m^2\psi^2\right) d^3x,$$

dove π è il campo canonicamente coniugato a ψ, e il campo libero soddisfa

$$(\Box - m^2)\psi(x) = 0.$$

Per H_1 prendiamo

$$H_1 = g \sum_i \int d^3x\, f(\vec{x} - \vec{x}_i)\, \psi(x).$$

L'equazione del moto è allora:

$$(\Box - m^2)\psi(x) = g \sum_i f(\vec{x} - \vec{x}_i).$$

La costante g si chiama usualmente costante di accoppiamento; la funzione reale $f(\vec{x} - \vec{x}_i)$ è caratteristica delle sorgenti: in generale la supporremo funzione di $|\vec{x} - \vec{x}_i|$.

Indichiamo con a_k^+, a_k gli operatori di creazione e distruzione relativi al k-mo modo di vibrazione per il sistema libero:

$$H_0 = \sum H_{0k} \qquad H_{0k} = \omega_k\, a_k^+ a_k.$$

È possibile definire [17] degli operatori b_k^+, b_k in modo che

$$H = \sum H_k \qquad H_k = b_k^+ b_k + c_k$$

con c_k numero complesso; e i b_k differiscono dagli a_k per delle costanti:

$$b_k = a_k + \alpha_k. \tag{12–1}$$

Dal calcolo esplicito si deduce

$$\alpha_k = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{u(\omega_k)}{\sqrt{2\,\omega_k^3}} \sum_i e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}_i}$$
$$c_k = -\frac{g^2}{V} \frac{u^2(\omega_k)}{2\,\omega_k^2} \sum_{ij} e^{-i\,\vec{k}\cdot(\vec{x}_i-\vec{x}_j)}$$

dove V è il volume di quantizzazione, $\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$ e u è la trasformata di Fourier di f:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^{\,3}k\; u(\vec{k})\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Grazie alla (12–1) si vede che i b_k soddisfano le stesse regole di commutazione degli a_k, e quindi esiste per ogni k una trasformazione unitaria U_k tale che $b_k = U_k a_k U_k^{-1}$. Poiché inoltre i b_k e b_k^+ relativi a diversi modi di vibrazione risultano commutare, ci si attende che tutti gli addendi H_k possano venire diagonalizzati simultaneamente dalla trasformazione $U = \prod_k U_k$, cioè:

$$U^{-1} H\, U = H_0 + W \quad \text{con} \quad W = \sum_k c_k. \tag{12–2}$$

W contiene sia l'interazione tra le sorgenti che l'autoenergia delle sorgenti stesse. Dalla (12–2) si vede poi che U riduce l'Hamiltoniana H all'Hamiltoniana libera (a meno della costante W); dunque le particelle "fisiche," relative cioè all'Hamiltoniana H, non interagiscono tra loro né con le sorgenti.

Si potrà allora definire, data la natura degli operatori b e b^+, uno stato di vuoto "fisico" $|0\,\mathrm{f}\rangle$, tale cioè che $b_k|0\,\mathrm{f}\rangle = 0$. Naturalmente è anche possibile definire un vuoto "nudo" $|0\,\mathrm{n}\rangle$ relativo al campo libero, e precisamente: $a_k\,|0\,\mathrm{n}\rangle = 0$.

È però necessario notare che i due vuoti non coincidono, dal momento che $|0\,\mathrm{f}\rangle$ non è ad esempio annichilato dagli a_k: ci troviamo così di fronte a una teoria nella quale compaiono due vuoti. La teoria che abbiamo sviluppato è d'altra parte irriducibile, ed entrambi i vuoti sono stati trattati come vettori ciclici (ciò essenzialmente perché abbiamo fatto uso di operatori di creazione).

In base a quanto accennato a pag. 8–5 ci si attende che la presenza di due vuoti porti a delle conclusioni assurde. Ciò accade in effetti se le sorgenti sono locali, caratterizzate cioè da $f(\vec{x}-\vec{x}_i) = \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$ (e quindi $u = 1$), il che equivale a non imporre un cut-off sugli impulsi: sul significato di ciò avremo occasione di tornare più avanti.

Eseguendo il calcolo esplicito per U_k, e successivamente per $U = \prod U_k$ (cfr. [17], pag. 123), si ottiene

$$U = \exp\left[-\frac{g}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{u(\omega_k)}{\sqrt{2\,\omega_k^3}} \sum_i e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}_i}\, a_k^+\right] \times$$
$$\exp\left[\frac{g}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{u(\omega_k)}{\sqrt{2\,\omega_k^3}} \sum_i e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}_i}\, a_k\right] \times$$
$$\exp\left[-\frac{g^2}{2V} \sum_k \frac{u^2(\omega_k)}{2\,\omega_k^3} \sum_{ij} e^{-i\,\vec{k}\cdot(\vec{x}_i-\vec{x}_j)}\right].$$

Da tale espressione è facile convincersi in primo luogo che il vuoto fisico e il vuoto nudo, nel caso di accoppiamento locale, sono ortogonali. Infatti

$$\langle 0\,\mathrm{n}|0\,\mathrm{f}\rangle = \langle 0\,\mathrm{n}|U|0\,\mathrm{n}\rangle = \exp\left[-\frac{g^2}{2V} \sum_k \frac{u^2(\omega_k)}{2\,\omega_k^3} \sum_{ij} e^{i\,\vec{k}\cdot(\vec{x}_i-\vec{x}_j)}\right].$$

Prendendo per semplicità una sola sorgente, e passando dalla somma su k all'integrale in d^3k secondo la:

$$\frac{1}{V}\sum_k \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k$$

si ha

$$\langle 0\,\mathrm{n}|0\,\mathrm{f}\rangle = \exp\left[-\frac{g^2}{8\pi}\int dk\,\frac{k^2u^2(\omega)}{\omega^3}\right] \tag{12–3}$$

Poiché l'integrale con $u = 1$ (sorgenti locali) diverge, segue che

$$\langle 0\,\mathrm{n}|0\,\mathrm{f}\rangle = 0.$$

È anche possibile dimostrare che per accoppiamento locale tutti gli autostati (impropri) di H risultano ortogonali a tutti gli autostati di H_0; anzi, e sempre per accoppiamento locale, tutti gli autovettori di H con un dato valore della costante di accoppiamento sono ortogonali a tutti gli autostati di H con un valore diverso della costante di accoppiamento, per quanto piccola possa essere la differenza tra i due valori delle costanti di accoppiamento.

Il risultato che gli autovettori $|e_i, \mathrm{f}\rangle$ dell'Hamiltoniana fisica risultano ortogonali a tutti gli autovettori $|e_i\,\mathrm{n}\rangle$ dell'Hamiltoniana libera impedisce che un autostato dell'Hamiltoniana libera possa essere espresso in termini di autostati dell'Hamiltoniana fisica, nonostante che quest'ultima sia osservabile, cioè i suoi autostati formino un insieme completo.(1)

(1) In queste osservazioni abbiamo usato il termine “autostato” anche nel caso di stati non normalizzabili (pag. 8–1).

L'origine dei risultati paradossali dianzi ottenuti va ricercata nella trasformazione U: sebbene per ogni singolo modo di vibrazione si possa definire l'operatore U_k, il prodotto $\prod_k U_k$ non ha senso. Le regole di commutazione ammettono dunque nello spazio relativo all'intero sistema due rappresentazioni che non sono connesse da una trasformazione unitaria: si parla in tal caso di rappresentazioni inequivalenti.

Va notato esplicitamente che la (12–3) e le espressioni analoghe che si ottengono per i prodotti scalari $\langle e_i | e_j \rangle_0$ di autostati di H con autostati di H_0 sono indipendenti dal volume di quantizzazione: una situazione diversa s'incontrerà, come vedremo, più avanti.

La (12–3) e le espressioni simili per $\langle e_i, \mathrm{f} | e_j, \mathrm{n} \rangle$ non divergono in generale se u non è una costante, cioè per accoppiamento non locale: ciò è da mettersi in relazione col fatto, citato più sopra, che supporre l'accoppiamento non locale equivale grosso modo a porre un cut-off sugli impulsi, e quindi a limitare i gradi di libertà del sistema che sono interessati dall'interazione.

Più avanti discuteremo un esempio dove si verifica una situazione opposta a questa: troveremo cioè delle conclusioni paradossali, dello stesso tipo di quelle dedotte qui, originate non dalla presenza di un numero infinito di gradi di libertà, ma dall'apparire di un volume infinito.

Sistema costituito da infiniti oscillatori di Fermi

Come secondo esempio dove il problema delle rappresentazioni inequivalenti è discusso a prescindere da un modello fisico diretto, esaminiamo un sistema d'infiniti oscillatori fermionici. Per ciascun oscillatore si consideri la rappresentazione standard degli operatori a_k e a_k^+:

$$a_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_k^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tali matrici forniscono l'unica rappresentazione irriducibile delle regole di anticommutazione per gli operatori di creazione e distruzione

$$\{a_k, a_j^+\} = \delta_{kj} \qquad \{a_k, a_j\} = 0,$$

nel senso che ogni altra rappresentazione di tali regole si decompone in una somma diretta di rappresentazioni bidimensionali unitariamente equivalenti alla rappresentazione data sopra.

Per ottenere una base nello spazio lineare delle matrici 2×2, alle a_k, a_k^+ date sopra è necessario aggiungere la matrice che rappresenta l'operatore "numero di particelle" e l'identità I:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una generica trasformazione lineare in tale spazio è data da:

$$a_k \mapsto a'_k = \beta_k a_k + \gamma_k a_k^+ + \lambda_k N + \varrho_k I.$$

Limitandoci a trasformazioni che non mescolino gli operatori di creazione e distruzione con l'identità e con N ($\lambda_k = \varrho_k = 0$), è facile convincersi che le uniche trasformazioni che lascino inalterate le regole di anticommutazione, cioè tali che

$$\{a'_k, {a'_j}^+\} = \delta_{kj}$$

sono

$$a_k \mapsto a_k \quad \text{oppure} \quad a_k \mapsto a_k^+. \tag{12–4}$$

Poiché la conservazione delle regole di anticommutazione richiede per ogni singolo indice k l'esistenza di un operatore unitario U_k, tale che $a'_k = U_k a_k U_k^+$, si trova che tale operatore U_k può essere solo l'identità oppure l'operatore che scambia, nell'oscillatore k-mo, lo stato fondamentale con lo stato eccitato.(1)

Se ora consideriamo lo spazio di Hilbert $\bar{\mathcal{H}}$ relativo all'intero sistema, risultante dal prodotto tensoriale degli spazi relativi ai singoli oscillatori (come abbiamo visto nel cap. 1, $\bar{\mathcal{H}}$ è uno spazio non separabile), possiamo considerare l'operatore $U = \prod U_k$, che formalmente realizza la trasformazione che opera su tutti gli a_k nel modo descritto dalla (12–4). Tra gli infiniti fattori di cui U è prodotto, alcuni sono uguali all'identità, altri all'operatore di scambio σ_x; altri operatori tranne l'identità e σ_x non possono comparire.

Consideriamo ora il sottospazio separabile $\mathcal{H}$ già considerato nel Cap. 1: la chiusura lineare degli stati in cui solo un numero finito di oscillatori è nello stato eccitato; come abbiamo osservato a suo tempo, $\mathcal{H}$ è effettivamente lo spazio che ha interesse dal punto di vista fisico.

È allora facile convincersi che U in tale spazio ha certamente elementi di matrice se effettua un numero finito di scambi tra stato fondamentale e stato eccitato: se però U effettua un numero infinito di tali scambi, cioè se è un prodotto in cui il fattore σ_x compare un numero infinito di volte, U non può avere elementi di matrice in $\mathcal{H}$: cioè U non esiste in $\mathcal{H}$. In questo senso le rappresentazioni delle regole di anticommutazione che differiscono per un numero infinito di scambi tra operatori di creazione e di distruzione sono inequivalenti.

Si potrebbe a questo punto osservare [17] che U ha in ogni caso elementi di matrice non nulli in tutto lo spazio $\bar{\mathcal{H}}$; tale estensione allo spazio non separabile $\bar{\mathcal{H}}$ è però di scarso interesse fisico e quindi la escluderemo.(2)

(1) Tale operatore è rappresentato dalla matrice di Pauli $(\sigma_x)_k$

(2) Una trattazione matematica della questione è tuttavia possibile; si veda in proposito [18].

Campi di massa diversa che soddisfano le stesse condizioni iniziali

Negli esempi trattati finora le rappresentazioni inequivalenti sono state messe in relazione con il numero infinito di gradi di libertà; consideriamo ora un caso in cui la presenza di rappresentazioni inequivalenti dipende essenzialmente dal fatto che si considera un volume di quantizzazione di estensione infinita.

Consideriamo allo scopo [17] due campi bosonici corrispondenti a masse diverse:

$$(\Box - m_1^2)\,\phi_1(x) = 0 \qquad (\Box - m_2^2)\,\phi_2(x) = 0$$

tali da soddisfare le relazioni di commutazione a tempi uguali:

$$[\phi_1(\vec{x},t), \dot{\phi}_1(\vec{x}\,',t)] = i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') = [\phi_2(\vec{x},t), \dot{\phi}_2(\vec{x}\,',t)]. \tag{12–5}$$

Imponiamo ancora le condizioni:

$$\phi_1(\vec{x},0) = \phi_2(\vec{x},0) \qquad \dot{\phi}_1(\vec{x},0) = \dot{\phi}_2(\vec{x},0). \tag{12–6}$$

Per entrambi i campi possiamo definire gli operatori di creazione e di distruzione a_{1k}, a_{1k}^+, a_{2k}, a_{2k}^+, e possiamo formalmente definire due stati di vuoto normalizzati:

$$a_{1k}|0_1\rangle = a_{2k}|0_2\rangle = 0 \qquad \langle 0_1|0_1\rangle = \langle 0_2|0_2\rangle = 1.$$

Poiché i due campi ϕ_1 e ϕ_2 obbediscono alle stesse regole di commutazione a tempi uguali, ci si attende che esista una trasformazione unitaria che connetta istante per istante ϕ_1 a ϕ_2; cioè che esista un operatore unitario dipendente dal tempo $U(t)$ tale che:

$$\phi_2(\vec{x},t) = U(t)\,\phi_1(\vec{x},t)\,U(t)^{-1}.$$

Passiamo alla rappresentazione nello spazio degli impulsi: esprimendo i campi mediante operatori di creazione e distruzione e uguagliando i coefficienti delle onde piane nello sviluppo dei campi, le condizioni (12–6) impongono:

$$a_{1k} = \frac{1}{2\sqrt{\omega_{1k}\,\omega_{2k}}}\left[a_{2k}\,(\omega_{1k}+\omega_{2k}) + a_{2,-k}\,(\omega_{1k}-\omega_{2k})\right] \tag{12–7}$$

con $\omega_{1k} = \sqrt{k^2+m_1^2}$, $\omega_{2k} = \sqrt{k^2+m_2^2}$. Dalla (12–7) si può mostrare che

$$\langle 0_1|0_2\rangle = \prod_k \frac{2\sqrt{\omega_{1k}\,\omega_{2k}}}{\omega_{1k}+\omega_{2k}} \simeq \exp\left[-\sum_k \frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{32\,k^4}\right].$$

Passando dalla $\sum_k$ all'integrale $\int d^3k$ con la consueta prescrizione:

$$\frac{1}{V}\sum_k \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k$$

si ottiene

$$\langle 0_1|0_2\rangle \simeq \exp\left[-\frac{V}{64\,\pi^2}\int^{\infty}\frac{(m_1^2-m_2^2)^2\,dk}{k^2}\right] \tag{12–8}$$

(il limite inferiore dell'integrale non è indicato, perché le approssimazioni fatte valgono solo per k grande, e noi siamo solo interessati all'andamento all'infinito).

L'integrale sopra scritto *converge*, tuttavia $\langle 0_1 | 0_2 \rangle$ tende a zero quando $V \to \infty$. Si può anche mostrare che tutti i vettori costruiti mediante gli a^{+}_{1k} applicati a $|0_1\rangle$ sono ortogonali a tutti i vettori costruiti mediante gli a^{+}_{2k} applicati a $|0_2\rangle$.(1)

Anche in questo esempio, come nel primo che abbiamo riportato (campo scalare in interazione con sorgenti fisse puntiformi) la conclusione paradossale è in un certo senso prevedibile, poiché anche in questo caso siamo partiti da un modello fisico nel quale si ammette l'esistenza di due stati di vuoto.

È però da notare che nei due esempi l'ortogonalità dei vuoti ha origine sostanzialmente diversa: nel primo esempio era determinante la divergenza di un integrale, nell'ultimo esempio l'unica ragione per cui $\langle 0_1 | 0_2 \rangle = 0$ sta nella comparsa del volume di quantizzazione nell'esponenziale (12–8). Vedremo che quest'ultimo genere di divergenza è tipico di molte situazioni della teoria dei campi, in particolare delle cosiddette simmetrie rotte spontaneamente.

Intuitivamente tale tipo di divergenza è giustificabile se si tiene presente che avendo assunto che il vuoto sia l'unico autostato dell'impulso normalizzabile, deve necessariamente essere impossibile costruire un altro stato a impulso definito (nullo) applicando al vuoto un operatore isometrico.

(1) Una trattazione perfettamente analoga può essere seguita per un campo fermionico [17], [19]. Si ottiene in tal caso $\langle 0_1 | 0_2 \rangle \simeq \exp(-V \int m^2 \, dk)$, cioè $\langle 0_1 | 0_2 \rangle$ è nullo sia per la divergenza dell'integrale che per quella del volume di quantizzazione.