Cap. 16 – Il teorema di Goldstone

Riepilogo sul concetto di rottura spontanea

Abbiamo visto nei capitoli precedenti esempi di rotture spontanee di simmetrie, e ne abbiamo tratto alcune conclusioni provvisorie; vogliamo qui riprendere l'argomento più in generale. Cominciamo col riassumere le proprietà già esaminate per un sistema la cui lagrangiana sia invariante per la trasformazione dei campi $\mathcal{T}$, o, equivalentemente, ammetta una corrente conservata j^μ.

(1) In generale non esiste l'integrale $\int d^3x\, j^0(\vec{x},t)$.

(2) In ogni caso si può definire un operatore

$$Q_W = \int_W d^3x\, j^0(\vec{x},t) \tag{16–1}$$

e un operatore $U_W = e^{i\alpha Q_W}$; l'operatore U_W fornisce la corretta legge di trasformazione per i campi definiti nell'ombra causale di W, cioè:[1]

$$\varphi_i' = e^{i\alpha Q_W} \varphi_i\, e^{-i\alpha Q_W}. \tag{16–2}$$

(3) Indichiamo con $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ l'algebra dei polinomi definiti sullo spazio-tempo, e sia $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$, e $P_\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ l'operatore trasformato secondo la $\mathcal{T}$: $P \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} P_\alpha$. Si ha in tal caso simmetria esatta se

$$\forall P:\ (\Omega, P\,\Omega) = (\Omega, P_\alpha\,\Omega).$$

Si ha invece rottura spontanea se

$$\exists P:\ (\Omega, P\,\Omega) \neq (\Omega, P_\alpha\,\Omega). \tag{16–3}$$

Si potrebbe osservare a questo punto che, ammettendo l'esistenza di un operatore U:

$$P_\alpha = UPU^{-1}$$

nel caso di rottura spontanea si sarebbe portati a scrivere, partendo dalla (16–3):

$$(U^+\Omega, PU^+\Omega) \neq (\Omega, P\,\Omega),$$

[1] Nel Cap. 14 avevamo dimostrato tale proprietà per il modello di Goldstone, e avevamo considerato le espressioni infinitesime corrispondenti alla (16–2) (cioè i commutatori di Q_W coi campi); la proprietà enunciata ha però validità generale, come si può provare senza difficoltà.

espressione che si può interpretare dicendo che il vuoto non è invariante per la trasformazione $\mathcal{T}$ che lascia invariata la Lagrangiana.

Tale discorso però non ha senso in un'assiomatica alla Wightman, poiché la (16–3), secondo la quale i valori medi sul vuoto non sono conservati, impedisce di definire un operatore unitario U che realizzi la trasformazione $\mathcal{T}$ (cfr. pag. 10–3).

Il teorema di Goldstone e i problemi connessi con la sua formulazione

Passiamo ora a discutere il risultato noto sotto il nome di teorema di Goldstone. Nel modello di Goldstone (pag. 14–2) la rottura spontanea si accompagna, come si è visto, alla presenza di campi a massa nulla, e analoga situazione si presenta per il modello di Guralnik (pag. 14–9). Nel modello BCS per la superconduttività l'energy gap assicura che non esistono particelle di massa nulla; tuttavia il modello BCS è al di fuori delle nostre attuali considerazioni, non essendo relativistico.

Il teorema di Goldstone [21] asserisce che in generale la rottura spontanea di una simmetria implica la presenza di particelle a massa nulla. La dimostrazione originariamente data da Goldstone si basava su argomenti di natura euristica; in un secondo tempo si è cercato di rendere la dimostrazione rigorosa e di stabilire in particolare quale sia il minimo insieme d'ipotesi necessarie. Tuttavia oggi quest'ultimo punto non è stato ancora chiarito del tutto, ragione per cui a rigore non si potrebbe nemmeno parlare di teorema. In realtà ci sono ora più teoremi di Goldstone, dei quali non si è definitivamente stabilita l'equivalenza.(1)

Il teorema di Goldstone che dimostreremo parte da un enunciato diverso da quello dato sopra, ma ritenuto di solito sostanzialmente equivalente. Precisamente:

In una teoria (relativistica) che soddisfa gli assiomi di Wightman e la condizione di mass gap, ogni automorfismo generato da una corrente conservata lascia le funzioni di Wightman invariate.

In tale enunciato la condizione di mass gap sostituisce l'ipotesi che non vi siano particelle di massa nulla; "ogni automorfismo generato da una corrente conservata" significa, per le considerazioni del Cap. 14, ogni trasformazione dei campi che lasci invariata la Lagrangiana.

L'invarianza dei valori medi sul vuoto (funzioni di Wightman) equivale alla possibilità di realizzare la trasformazione che lascia invariante la Lagrangiana mediante un operatore unitario (si ricordi il teorema di ricostruzione, e la discussione di pag. 10–1,2 in particolare); ciò equivale ancora a dire che la simmetria è esatta.

---

(1) Una dimostrazione particolarmente rigorosa, ma con ipotesi molto restrittive, è dovuta a D. Kastler et al. [27]

È chiaro allora in che senso il nostro enunciato implica quello citato precedentemente: la non invarianza delle funzioni di Wightman (cioè la rottura della simmetria) implica che non ci sia mass gap, e ciò porterebbe a concludere che ci siano particelle a massa nulla.

È però necessaria a questo punto un'osservazione: mentre non è possibile una teoria con mass gap in cui compaiano particelle di massa nulla, un sistema in cui le masse delle particelle sono diverse da zero, ma formano una successione tendente a zero, soddisfa una teoria senza mass gap in cui *non* compaiono particelle di massa nulla. Rimane tuttavia da chiarire se questo esempio sia compatibile con gli assiomi di Wightman.

Dimostriamo ora il teorema di Goldstone. [22] Si consideri in primo luogo l'automorfismo realizzato dalla corrente conservata mediante l'operatore Q_W (16–1); esso è continuo, essenzialmente perché $e^{i\alpha Q_W}$ è continuo (in α). Allora vale

$$\frac{d}{d\alpha} P_\alpha = i\,[Q_W, P_\alpha]$$

che implica

$$\frac{d}{d\alpha}\,(\Omega, P_\alpha\,\Omega) = i\,(\Omega, [Q_W, P_\alpha]\,\Omega). \tag{16–4}$$

Per provare la tesi dobbiamo dimostrare:(1)

$$(\Omega, P_\alpha\,\Omega) = (\Omega, P\,\Omega) \tag{16–5}$$

e quindi basta provare

$$\frac{d}{d\alpha}\,(\Omega, P_\alpha\,\Omega) = 0$$

ossia

$$(\Omega, [Q_W, P_\alpha]\,\Omega) = 0. \tag{16–6}$$

Per verificare la (16–6) è sufficiente dimostrarla in un intorno dell'identità, cioè per $\alpha = 0$:

$$(\Omega, [Q_W, P]\,\Omega) = 0.$$

Osserviamo che si ha:

$$(\Omega, Q_W P\,\Omega) = \int d^3x\,(\Omega, j_0(x) P\,\Omega) \tag{16–7}$$

e consideriamo l'espressione

$$(\Omega, j_\mu(x) P\,\Omega) = \int_{V_m^+} (\Omega, j_\mu(0)\,dE(p) P\,\Omega)\,e^{-ipx}. \tag{16–8}$$

(1) Quanto precede non è rigoroso (in particolare per ciò che riguarda la continuità dell'automorfismo; Kastler et al. [27] assumono la (16–4) come ipotesi.

La $\partial^\mu j_\mu = 0$ implica allora:

$$p^\mu \left(\Omega, j_\mu(0)\, dE(p) P\, \Omega\right) = 0. \tag{16–9}$$

Abbreviamo a questo punto la dimostrazione, riducendoci al caso particolare in cui l'operatore P sia scalare per il gruppo di Lorentz. In questo caso $(\Omega, j_\mu(0)\, dE(p) P\, \Omega)$ è un 4-vettore dipendente solo da p; la sua forma più generale è dunque:

$$(\Omega, j_\mu(0)\, dE(p) P\, \Omega) = p_\mu\, H(p^2) \tag{16–10}$$

con $H(p^2)$ distribuzione temperata. La (16–9) implica allora:

$$p^\mu p_\mu\, H(p^2) = 0 \tag{16–11}$$

e per l'ipotesi di mass gap

$$H(p^2) = 0. \tag{16–12}$$

Ne segue per la (16–10)

$$(\Omega, j_\mu(0)\, dE(p) P\, \Omega) = 0$$

e le (16–7), (16–8) assicurano che

$$(\Omega, Q_W P\, \Omega) = 0.$$

Un ragionamento perfettamente analogo può essere seguito per $(\Omega, PQ_W\, \Omega)$; la (16–6) e la (16–5) sono così dimostrate. ■

Si noti che l'ipotesi di mass gap è stata essenziale per passare dalla (16–11) alla (16–12); altrimenti, in luogo della (16–12) si sarebbe ottenuto

$$H(p^2) \propto \delta(p^2).$$

In tal caso, a

$$(\Omega, j_\mu\, dE(p) P\, \Omega) \tag{16–13}$$

darebbe contributo un termine corrispondente a $p^2 = 0$, cioè a massa nulla; la (16–6) e la (16–5) non sarebbero provate.

Proprietà delle particelle di Goldstone

In riferimento alla (16–13), nel caso che non ci sia mass gap, possiamo dire che l'operatore P, agendo sul vuoto, crea particelle di massa nulla; il fatto che $P\Omega$ compare nel prodotto scalare con $j_\mu^+\Omega$ può essere inoltre interpretato dicendo che P crea sul vuoto particelle di massa nulla, aventi gli stessi numeri quantici della corrente j_μ.

Ad esempio, se la rottura della simmetria di spin isotopico, che dà luogo alla differenza di massa protone-neutrone, fosse una rottura spontanea, le particelle di Goldstone di massa nulla dovrebbero avere gli stessi numeri quantici della corrente $p\bar{n}$; in particolare dovrebbero essere cariche. Il fatto che l'esperienza, almeno al giorno d'oggi, escluda l'esistenza di tali particelle può essere considerato un motivo per escludere che la rottura della simmetria di spin isotopico sia una rottura spontanea.

Osserviamo ancora che il teorema di Goldstone afferma che per avere una rottura spontanea basta che il valore medio sul vuoto anche di un solo operatore sia non invariante: con riferimento ai Cap. 14, 15 osserviamo che nell'esempio di Goldstone il valore medio sul vuoto ${}_0\langle\ |\varphi|\ \rangle_0$ degli stessi campi è non invariante, e analoga situazione si presentava per il modello di Guralnik.

Nel modello BCS invece non risultavano invarianti i valori medi sul vuoto di espressioni non gauge-invarianti. Tuttavia il modello BCS, come abbiamo già osservato, non va posto in relazione col teorema di Goldstone, almeno nel nostro enunciato, poiché non è un modello relativistico.