Cap. 17 – Esigenza di una formulazione diversa delle teorie di campo

Astrazione matematica e significato fisico

Dai risultati che abbiamo ottenuto in questi ultimi capitoli si è resa palese la necessità d'impostare la teoria dei campi su una base matematicamente più astratta, e nello stesso tempo più aderente alla fisica stessa.

Come abbiamo già accennato alla fine del Cap. 14, il problema delle rotture spontanee può essere compreso considerando l'algebra delle osservabili in astratto, e non attraverso una sua realizzazione su uno spazio di Hilbert. Ogni corrente conservata dà luogo a un automorfismo dell'algebra (astratta) delle osservabili; l'esistenza o non esistenza di rotture spontanee va messa in relazione con la possibilità di realizzare tali automorfismi mediante operatori unitari in una rappresentazione dell'algebra su uno spazio di Hilbert. A questo si aggiunga che una teoria come quella di Wightman si basa essenzialmente sui campi, che non sono grandezze fisicamente osservabili; quello che l'esperienza rivela consiste sempre (nella migliore ipotesi) di valori medi dei campi in una certa regione dello spazio e in un certo intervallo di tempo: da ciò si comprende l'esigenza di una teoria maggiormente aderente a ciò che è fisicamente più significativo.

Sono queste due esigenze sintetizzate nei recenti lavori di Haag e Araki [28]; essi sviluppano una teoria di campo a partire da una teoria quantistica impostata fondamentalmente sulle osservabili (anziché su uno spazio di Hilbert), come grandezze in diretta relazione con le quantità misurate sperimentalmente da un lato, e come entità astratte dotate di una particolare struttura matematica dall'altra. [29]

Struttura dell'algebra delle osservabili in una teoria quantistica alla Segal

Si assume che le osservabili formino una C^*-algebra $\mathcal{A}$, cioè un'algebra che abbia le proprietà

1) sia definita l'operazione di coniugazione hermitiana *, cioè sia una *-algebra;
2) sia definita una norma $||\,.\,||$ e $\mathcal{A}$ sia chiusa nella topologia indotta da tale norma; in altre parole sia un'algebra di Banach.(1)
3) valga la

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad ||A^*A|| = ||A||^2$$

che è la proprietà che caratterizza le C^*-algebre.(2)

(1) 1) e 2) si esprimono anche dicendo che $\mathcal{A}$ è una B^*-algebra.

(2) La 3) è condizione necessaria perché una B^*-algebra ammetta rappresentazioni su uno spazio di Hilbert.

Con tali requisiti per l'algebra delle osservabili è possibile costruire una meccanica quantlstica, pur di definire in maniera opportuna gli stati. Ciò si può fare definendo come stati i funzionali positivi $f(A)$ sull'algebra:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad f(A^*A) \geq 0; \qquad f(A^*A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

Il funzionale $f(A)$ corrisponde al valor medio dell'osservabile A nell'ordinaria formulazione della meccanica quantistica; con la differenza che gli $f(A)$ descrivono non solo gli stati puri ma anche le miscele statistiche. Agli stati puri corrispondono particolari funzionali, detti funzionali puri; essi hanno la proprietà che non si possono decomporre in somma di altri funzionali positivi.

La connessione esplicita tra tale formulazione e quella "tradizionale" (in cui si parte da uno spazio di Hilbert) è fornita dalla costruzione di Gel'fand–Naimark; essa stabilisce il procedimento per costruire, a partire da un funzionale $f(A)$, una rappresentazione dell'algebra $\mathcal{A}$ come insieme di operatori definiti su uno spazio di Hilbert. Si dimostra anche che i funzionali puri risultano in relazione con le rappresentazioni irriducibili dell'algebra.

Meccanica quantistica e teoria di campo

Fin qui si è accennato alla formulazione di una meccanica quantistica: esamineremo ora brevemente la possibilità di formulare nello stesso spirito una teoria di campo. Occorre chiarire quali sono gli assiomi addizionali che caretterizzano una teoria di campo nell'ambito delle "meccaniche quantistiche." Poiché in ogni teoria di campo entrano in modo essenziale operatori definiti sullo spazio-tempo, ci si può ispirare alla corrispondenza, definita a pag. 11–3, che a ogni insieme aperto e limitato $\mathcal{O}$ dello spazio-tempo associa l'algebra dei polinomi $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.

In astratto si associa ad $\mathcal{O}$ una C^*-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ e come algebra $\mathcal{A}$ delle osservabili si assume la chiusura (in norma) dell'unione delle algebre $\mathcal{A}(\mathcal{O})$:

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}.$$

Per le algebre $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ devono essere soddisfatte proprietà come:

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}')$$

$$\mathcal{O} \times \mathcal{O}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}'(\mathcal{O}') \quad \text{(commutatività locale)}.$$

L'invarianza relativistica si esprime postulando un gruppo di automorfismi di $\mathcal{A}$ isomorfo al gruppo di Poincaré, tale che, detto $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}$ il trasformato di $\mathcal{A}$ sotto una trasformazione del gruppo, sia

$$\mathcal{A}_{\mathrm{L}}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_{\mathrm{L}})$$

(questa condizione sostituisce la trasformazione puntuale dell'ordinaria teoria dei campi).

Cenno sulle caratteristiche generali delle teorie di campo alla Haag–Araki

Nel caso della meccanica quantistica ordinaria avevamo sopra accennato alla costruzione di Gel'fand e Naimark, che fornisce la connessione tra una teoria quantistica formulata a partire dall'algebra delle osservabili e una teoria formulata nel modo tradizionale (cioè da uno spazio di Hilbert).

Nel caso di una teoria di campo l'elemento nuovo sta nella minore arbitrarietà nella scelta del funzionale di partenza. Si considera un funzionale puro invariante per il gruppo di Poincaré:

$$\omega(A) = \omega_{\mathrm{L}}(A)$$

dove $\omega_{\mathrm{L}}(A)$ è definito da

$$\omega_{\mathrm{L}}(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega(A_{\mathrm{L}}).$$

Mediante la costruzione di Gel'fand possiamo allora ottenere una rappresentazione dell'algebra su uno spazio di Hilbert e nello stesso tempo una rappresentazione unitaria $U(a, \Lambda)$ del gruppo di Poincaré.

Si noti che senza introdurre il funzionale invariante $\omega(A)$ la costruzione di Gel'fand–Naimark non sarebbe stata sufficiente per fornire uno spazio di Hilbert dotato di un vettore invariante per il gruppo di Poincaré. Ci si deve però chiedere se lo spazio di Hilbert così ottenuto e la rappresentazione $U(a, \Lambda)$ del gruppo di Poincaré forniscono una teoria che soddisfa gli assiomi di Wightman; ciò non è detto in generale se non si aggiungono altre condizioni.

A questo proposito un particolare cenno merita la condizione spettrale; infatti (pag. 8–2) essa era definita a partire dagli operatori $U(a, \Lambda)$, che costituiscono una *rappresentazione* del gruppo di automorfismi dell'algebra delle osservabili isomorfo al gruppo di Poincaré; per definire la condizione spettrale in modo astratto occorre richiedere che esista almeno una rappresentazione dell'algebra delle osservabili in cui la condizione spettrale, come formulata a pag. 8–2, è soddisfatta. Tale modo di definire la condizione spettrale è effettivamente una proprietà dell'algebra astratta, com'è stato mostrato da Doplicher. [30]

La teoria dei campi sviluppata in questo modo ha avuto per il momento come risultato solamente la chiarificazione di problemi d'impostazione e di connessione logica; la spiegazione che abbiamo data di paradossi come le rappresentazioni inequivalenti rientra, come già detto, in quest'ordine d'idee. La ricerca nel campo è tuttora aperta, e sono attuali oggi problemi come la dimostrazione, in una teoria di questo tipo, del teorema di Goldstone. [27]

Al momento non è prevedibile se queste teorie avranno un successo che vada al di là della giustificazione di alcune situazioni paradossali delle precedenti teorie di campo, e della teoria di Wightman in particolare; va però notato che se ciò si verificasse, lo studio di tutta la meccanica quantistica assumerebbe un'impostazione radicalmente diversa, e formalmente molto più astratta. Ma insieme alla maggiore astrazione matematica, questa nuova formulazione porterebbe un vantaggio, rispondente a un'esigenza che abbiamo più volte sottolineato in questo corso (che pure partiva dall'introduzione di uno spazio di Hilbert): precisamente l'esigenza che una struttura matematica troppo particolare della teoria non ne condizioni il contenuto fisico, togliendo alle grandezze fisicamente osservabili il loro ruolo fondamentale.