CAPITOLO 4

Coordinate e metrica: lo spazio di Rindler

È utile studiare qualche esempio per prendere pratica con l'arbitrarietà delle coordinate e col significato fisico della metrica. Partiremo perciò scrivendo una metrica, senza dire fin dall'inizio se abbia un'interpretazione fisica, e quale sia: cercheremo di scoprirla dal suo studio dettagliato.

Siano ξ, η, y, z le coordinate, e la metrica abbia la forma

$$d\tau^2 = \eta^2\, d\xi^2 - d\eta^2 - dy^2 - dz^2. \tag{4–1}$$

Dato che la (4–1) è diagonale, dalla semplice osservazione dei segni è ovvio che ξ è la coordinata temporale, η, y, z quelle spaziali. La (4–1) ha la stessa forma della metrica di Lorentz–Minkowski (1–2) per quanto riguarda y e z, che inoltre non figurano nei coefficienti della metrica. Perciò queste coordinate non dicono niente d'interessante e possiamo limitarci alle sezioni $y = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$, eliminando y e z da tutti i calcoli. In linguaggio più matematico, la nostra varietà è il *prodotto* di una varietà bidimensionale (coordinate ξ, η) che dobbiamo studiare, e di un piano euclideo (coordinate y, z) che possiamo lasciare da parte.

Nota: A rigore per definire correttamente la varietà su cui stiamo ragionando avremmo dovuto precisare la carta, ossia anche l'aperto di $\mathbb{R}^4$ in cui le coordinate possono variare. Assumiamo per ora che sia l'intero $\mathbb{R}^4$, e stiamo a vedere…

La metrica (4–1) ha le seguenti proprietà:

1) è diagonale (le coordinate sono ortogonali)
2) su ogni curva $\xi = \text{cost.}$ la distanza dall'origine ($\eta = 0$) è fissa, e vale $|\eta|$
3) su di una curva $\eta = \text{cost.}$ si ha $d\tau = |\eta|\, d\xi$.

Giustifichiamo queste affermazioni. Quanto a 1) c'è solo da spiegare perché "ortogonali." La ragione è che la distanza tra due eventi di coordinate rispettive (ξ, η) e $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ è una differenza di quadrati. Vale quindi il teorema di Pitagora, naturalmente con la variante del segno meno dovuta al carattere semiriemanniano della metrica, come del resto accade in RR (il fattore di scala che moltiplica $d\xi^2$ sarà discusso fra poco). Se le coordinate non fossero ortogonali, nella metrica comparirebbe un termine col prodotto dei due differenziali (metrica non diagonale).

Se ci si muove su una curva $\xi = \text{cost.}$ la (4–1) si riduce a $d\tau^2 = -d\eta^2$: il segno meno si spiega col fatto che la curva in questione è di tipo spazio, e converrà quindi cambiare segno, introducendo

$$d\sigma^2 = -d\tau^2 = d\eta^2.$$

Se $d\sigma$ sta a indicare la distanza spaziale orientata, misurata col metro, ne segue

$$d\sigma = d\eta$$

se l'orientamento è lo stesso delle η crescenti. Questa si può subito integrare:

$$\sigma = \eta_2 - \eta_1$$

è la distanza spaziale fra due eventi le cui coordinate sono η_1 e η_2. In particolare ne segue la 2).

Per giustificare 3) procediamo allo stesso modo: su una curva $\eta =$ cost. abbiamo dalla (4–1)

$$d\tau^2 = \eta^2\, d\xi^2.$$

Questa volta $d\tau^2$ è positivo (curva di tipo tempo) e quindi

$$d\tau = |\eta|\, d\xi \tag{4–2}$$

misura l'intervallo temporale fra i due eventi di coordinate (ξ, η) e $(\xi, \eta + d\eta)$. Nella (4–2) si è convenuto che il verso positivo della coordinata ξ sia sempre quello dei tempi crescenti. Resta necessario il valore assoluto per η: ne riparleremo più avanti.

Si vede che la coordinata ξ non misura il tempo di un orologio che abbia η costante (diciamo impropriamente "fermo," rispetto a queste coordinate). Occorre invece il fattore correttivo $|\eta|$, che cambia da punto a punto. Questo produce un effetto di "redshift," come vedremo subito; ma prima bisogna studiare la propagazione della luce.

Le geodetiche della luce

Per studiare la propagazione della luce in generale si dovrebbe procedere al modo seguente:

1) in base al PG, determinare le geodetiche della nostra varietà
2) tra queste, prendere in esame quelle di tipo luce.

Per fortuna esiste un modo assai più semplice: dato che solo due dimensioni entrano in gioco, le geodetiche di tipo luce si determinano immediatamente come segue.

Grazie al PE, sappiamo che in ogni RIL la luce viaggia con velocità c (ossia 1, nelle nostre unità). Ciò equivale a dire che la sua curva oraria è di tipo luce: $d\tau^2 = 0$. Ma la metrica è invariante (è una proprietà geometrica della varietà, indipendente dalle coordinate che si scelgono) e perciò $d\tau^2$ rimane nullo anche se scritto in coordinate arbitrarie. Nelle coordinate (ξ, η) la linea oraria della luce ha dunque l'equazione differenziale

$$\eta\, d\xi = \pm d\eta \tag{4–3}$$

(i due segni corrispondono ai due versi di propagazione della luce: per η crescente o decrescente col tempo).

La (4–3) può essere integrata, e si ottiene

$$\eta = \alpha\, e^{\pm\xi}$$

$$\xi = \pm \ln \frac{\eta}{\alpha} = \pm(\ln|\eta| - \ln|\alpha|)$$

che sono due famiglie di curve, una per il segno più, l'altra per il segno meno. Le curve di ciascuna famiglia sono tra loro traslate in direzione ξ (fig. 4–1).

Si noti che η ha il segno di α: dunque i due semispazi $\eta > 0$ e $\eta < 0$ *non comunicano*: nessun segnale luminoso che parta da un punto con $\eta > 0$ può raggiungerne uno con $\eta < 0$, e viceversa.

In realtà la metrica è *singolare* per $\eta = 0$: infatti il determinante del tensore metrico vale $-\eta^2$. Dunque il SC che abbiamo adottato non può includere l'asse ξ. Può essere usato solo sull'uno o sull'altro dei due semipiani aperti, tra loro sconnessi. Il problema è se questa sia una singolarità *fisica*, o solo *matematica*, ossia derivante da una scelta inadatta delle coordinate. In altre parole: lo spazio-tempo si estende a tutto il piano (ξ, η), oppure è limitato a uno dei due semipiani?

Fra poco ritorneremo su questo punto; si tratta infatti di un utile esercizio che ci preparerà a situazioni di gran lunga più importanti, in cui si presenta lo stesso problema.

Un esperimento di redshift

Se dal punto $\eta = \eta_1 > 0$ s'invia un segnale luminoso (evento A), che arriva in $\eta = \eta_2 > \eta_1$ (evento B); e poi un altro (evento A$'$) che arriva all'evento B$'$, avremo (fig. 4–2)

$$\xi_{\mathrm{A}'} - \xi_{\mathrm{A}} = \xi_{\mathrm{B}'} - \xi_{\mathrm{B}} = \Delta\xi; \qquad \Delta\tau_1 = \eta_1\,\Delta\xi, \quad \Delta\tau_2 = \eta_2\,\Delta\xi$$

cioè

$$\Delta\tau_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\,\Delta\tau_1 : \qquad \Delta\tau_2 > \Delta\tau_1. \tag{4–4}$$

Per piccole differenze:

$$\Delta\tau_2 = \left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta}\right)\Delta\tau_1. \tag{4–5}$$

Per arrivare alla (4–4) è essenziale mostrare che $\Delta\xi$ non cambia dalla partenza all'arrivo. Ma per questo basta osservare che la metrica (4–1) è *invariante per traslazioni* della coordinata ξ, senza bisogno di studiare in dettaglio le geodetiche della luce, come abbiamo fatto. L'invarianza per traslazioni in ξ ci assicura infatti che se una curva γ_1 è una geodetica, allora la curva γ_2, ottenuta da γ_1

traslandone tutti i punti nella direzione ξ dello stesso ammontare $\Delta\xi$, è ancora una geodetica.

Il risultato espresso dalla (4–5) si chiama di solito "redshift," e occorre ora spiegare perché. Supponiamo che nell'intervallo $\Delta\tau_1$ una sorgente in η_1 emetta un treno di onde monocromatiche di frequenza ν_1: esso conterrà $N_1 = \nu_1\,\Delta\tau_1$ periodi. Quando il treno d'onde arriva in η_2, lo stesso numero di periodi viene ricevuto in un tempo $\Delta\tau_2$: dunque accanto a $N_2 = N_1$ abbiamo $N_2 = \nu_2\,\Delta\tau_2$, ossia la frequenza *deve cambiare*. Esattamente:

$$\nu_2 = \nu_1\,\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \nu_1\,\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

e per piccole differenze

$$\nu_2 = \left(1 - \frac{\Delta\eta}{\eta}\right)\nu_1. \tag{4–6}$$

Al crescere di η la frequenza diminuisce, e per questo si parla di redshift.

Il ragionamento che abbiamo fatto va però approfondito: abbiamo dato per scontato che il numero di periodi non cambi, ma che ragioni abbiamo per dire ciò? Possiamo giustificare in modo elementare quest'idea come segue.

Insieme al treno d'onde monocromatico, mandiamo anche una successione d'impulsi di durata molto breve, e intervallati di un periodo dell'onda monocromatica. Poiché gli impulsi sono discreti, non c'è dubbio che il loro numero all'arrivo sarà lo stesso che alla partenza; avremo quindi raggiunto il risultato che cerchiamo se dimostreremo che impulsi e treno d'onde si propagano allo stesso modo (viaggiano insieme). In entrambi i casi si tratta di onde elettromagnetiche; la sola differenza è che gli impulsi non saranno monocromatici, anzi dovranno avere una larga banda spettrale, visto che sono di durata molto breve. Dunque tutto dipende dal supporre che *la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto sia non dispersiva.*

Abbiamo diversi argomenti per questo:

- il fatto è vero in ogni RIL, e perciò dev'essere vero su scala globale
- l'asserzione è già implicita nell'aver usato geodetiche nulle ($d\tau^2 = 0$) per la propagazione della luce, senza condizioni sulla frequenza.

Un cambiamento di coordinate

Per ora manca l'interpretazione fisica della (4–1): esiste una situazione reale, uno spazio-tempo con questa metrica? La risposta sta in un'opportuna trasformazione di coordinate:

$$x = \eta\cosh\xi, \qquad t = \eta\sinh\xi \tag{4–7}$$

$$\eta = \sqrt{x^2 - t^2}, \qquad \xi = \tfrac{1}{2}\ln\frac{x+t}{x-t}. \tag{4–8}$$

Si vede che questa trasformazione è possibile solo per $|x| > |t|$.

Basta differenziare le (4–7) e sostituire nella (4–1) per trovare:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Siamo dunque nell'ordinario spazio-tempo della RR. Ma allora gli effetti visti sopra, redshift incluso, sono solo apparenti? Discuteremo ora un po' più a fondo la questione.

Cominciamo col chiederci: si poteva capire che lo spazio-tempo è piatto senza ricorrere a una trasformazione di coordinate *ad hoc*? Risposta: sì, ma occorrevano tecniche più avanzate (tensore di Riemann = 0).

Seconda osservazione: nelle nuove coordinate la singolarità è scomparsa, dunque era un effetto della scelta delle coordinate; vedremo però fra poco che la separazione dei due semipiani $\eta > 0$ e $\eta < 0$ *ha significato fisico.*

Il riferimento accelerato

Le (4–7), per η costante, possono essere viste come le equazioni parametriche del moto di un punto materiale. Studiamo le proprietà di questo moto supponendo, per fissare le idee, $\eta > 0$. L'equazione della curva oraria si ottiene dalle (4–7) eliminando ξ, e sta già scritta nella prima delle (4–8):

$$x^2 - t^2 = \eta^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\eta^2 + t^2}. \tag{4–9}$$

Si tratta di un'iperbole equilatera, che ha come asintoti le bisettrici degli assi. Anzi, dato che il segno di η è fissato, si tratta del ramo positivo dell'iperbole (fig. 4–3). Per questa ragione si parla di *moto iperbolico.*

Avremo successivamente dalla (4–2)

$$d\tau = \eta\, d\xi \quad \Rightarrow \quad \tau = \eta\, \xi \tag{4–10}$$

(la seconda implica che abbiamo posto $\tau = 0$, origine dei tempi per l'orologio solidale al punto mobile, quando $\xi = 0$). Sostituendo nelle (4–7):

$$x = \eta \cosh\frac{\tau}{\eta} \qquad t = \eta \sinh\frac{\tau}{\eta}. \tag{4–11}$$

Derivando:

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \sinh\frac{\tau}{\eta}, \quad u^t = \frac{dt}{d\tau} = \cosh\frac{\tau}{\eta} \quad \Rightarrow \quad u^\mu u_\mu = 1 \tag{4–12}$$

$$a^x = \frac{du^x}{d\tau} = \frac{1}{\eta}\cosh\frac{\tau}{\eta}, \quad a^t = \frac{du^t}{d\tau} = \frac{1}{\eta}\sinh\frac{\tau}{\eta} \quad \Rightarrow \quad a^\mu a_\mu = -\frac{1}{\eta^2}.$$

Si vede inoltre che $a^\mu u_\mu = 0$. Ci si può arrivare in due modi:

a) dall'esame diretto delle componenti

b) derivando rispetto a τ l'identità $u^\mu u_\mu = 1$.

Nel RI in cui il punto è momentaneamente in quiete (RI "tangente") il quadrivettore u^μ ha diversa da zero solo la componente temporale, che vale 1. Di conseguenza il quadrivettore a^μ, che è ortogonale a u^μ, ha solo componenti spaziali; nel nostro caso una sola componente è diversa da zero, e vale $1/\eta$. Abbiamo dunque a che fare con un moto ad accelerazione costante, nel senso che la proprietà ora dimostrata vale istante per istante, sempre misurando l'accelerazione nel RI tangente (che cambia ovviamente nel tempo).

Se consideriamo due punti materiali, che si muovono con la stessa legge (4–11), ma con diversi valori di η (fig. 4–4), si vede che

a) il riferimento tangente per uno lo è anche per l'altro, con lo stesso valore di ξ

b) la loro distanza, calcolata nel rif. tangente, vale $|\eta_2 - \eta_1|$ ed è costante durante il moto.

Dimostriamo queste asserzioni.

Le (4–12) mostrano che la quadrivelocità è la stessa a parità di τ/η, che vale ξ per la seconda delle (4–10). D'altra parte si vede dalle (4–8) che se ξ è lo stesso per i due punti, anche x/t è lo stesso: in fig. 4–4 questo significa che stiamo considerando due punti, sulle due curve orarie, allineati con l'origine. Se in quei punti la velocità è la stessa, allora le due curve hanno tangenti parallele. Perciò una trasformazione di Lorentz ci porta a un RI in cui entrambi i punti materiali sono fermi.

Quanto alla distanza nel rif. tangente, il suo quadrato si calcola come

$$(x_2 - x_1)^2 - (t_2 - t_1)^2.$$

Basta sostituirci due volte le (4–7), una volta con $\eta = \eta_1$ e l'altra con $\eta = \eta_2$, e ricordare che ξ è lo stesso, per verificare l'asserto.

Possiamo dunque pensare a un corpo rigido (per es. un'astronave), ciascun punto del quale si muove di moto iperbolico (con diverse η); e abbiamo tutte le ragioni per chiamare questo corpo un *rif. rigido accelerato uniformemente.*

Dinamica del moto iperbolico

Verifichiamo in altro modo che il moto iperbolico è la forma relativistica del moto uniformemente accelerato. Consideriamo un punto materiale soggetto a forza costante nel riferimento del laboratorio (ad es. un elettrone in campo elettrico uniforme): dall'equazione del moto

$$F = \frac{dp}{dt}$$

segue subito $p = Ft$, $E = \sqrt{m^2 + F^2 t^2}$, e infine

$$v = \frac{p}{E} = \frac{Ft}{\sqrt{m^2 + F^2 t^2}} = \frac{t}{\sqrt{(m/F)^2 + t^2}}. \tag{4–13}$$

Dalla prima delle (4–9) si ottiene, per η costante,

$$x\,dx = t\,dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} = \frac{t}{\sqrt{\eta^2 + t^2}}$$

e si vede che i due moti coincidono se $\eta = m/F$.

D'altra parte la componente longitudinale della forza è invariante per trasformazioni di Lorentz; quindi anche nel rif. tangente la forza risulta costante. Di conseguenza, un dinamometro ("accelerometro") montato nel rif. accelerato mostrerà un allungamento costante, e quindi anche da questo punto di vista è vero che l'accelerazione è costante.

Naturalmente l'accelerazione è tutt'altro che costante se ci si mette a misurarla sempre in uno stesso RI: la (4–13) mostra chiaramente che la velocità cresce ma sempre più lentamente, e tende a 1 per $t \to \infty$. Dunque l'accelerazione decresce e tende a zero.

Riferimento rigido?

È importante convincersi nel modo più diretto possibile che il rif. accelerato è rigido: useremo a questo scopo una procedura operativa, consistente nella misura *radar*. Dalla coda dell'astronave ($\eta = \eta_1$) mandiamo un segnale radar verso la testa (evento A in fig. 4–5). Il segnale si riflette alla testa dell'astronave ($\eta = \eta_2$, evento B) e torna in C alla coda. Indicheremo con τ_A, τ_B, τ_C i tempi segnati da orologi a bordo dell'astronave in corrispondenza di tali eventi. Le coordinate (x, t) degli eventi saranno date da:

$$x_\mathrm{A} = \eta_1 \cosh\frac{\tau_\mathrm{A}}{\eta_1} \qquad x_\mathrm{B} = \eta_2 \cosh\frac{\tau_\mathrm{B}}{\eta_2} \qquad x_\mathrm{C} = \eta_1 \cosh\frac{\tau_\mathrm{C}}{\eta_1}$$

$$t_\mathrm{A} = \eta_1 \sinh\frac{\tau_\mathrm{A}}{\eta_1} \qquad t_\mathrm{B} = \eta_2 \sinh\frac{\tau_\mathrm{B}}{\eta_2} \qquad t_\mathrm{C} = \eta_1 \sinh\frac{\tau_\mathrm{C}}{\eta_1}$$

mentre la propagazione del segnale impone le relazioni

$$x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} = t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad x_\mathrm{B} - t_\mathrm{B} = x_\mathrm{A} - t_\mathrm{A}$$

$$x_\mathrm{B} - x_\mathrm{C} = t_\mathrm{C} - t_\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad x_\mathrm{B} + t_\mathrm{B} = x_\mathrm{C} + t_\mathrm{C}.$$

Da queste si ottengono

$$\eta_2\, e^{-\tau_{\mathrm{B}}/\eta_2} = \eta_1\, e^{-\tau_{\mathrm{A}}/\eta_1}$$

$$\eta_2\, e^{\tau_{\mathrm{B}}/\eta_2} = \eta_1\, e^{\tau_{\mathrm{C}}/\eta_1},$$

da cui

$$\eta_2^2 = \eta_1^2 \exp\frac{\tau_{\mathrm{C}} - \tau_{\mathrm{A}}}{\eta_1} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\mathrm{C}} - \tau_{\mathrm{A}} = 2\eta_1 \ln\frac{\eta_2}{\eta_1}$$

e infine:

$$l_{12} = \tfrac{1}{2}(\tau_{\mathrm{C}} - \tau_{\mathrm{A}}) = \eta_1 \ln\frac{\eta_2}{\eta_1} \simeq \eta_2 - \eta_1,$$

dove l'ultima espressione vale se $\eta_2 - \eta_1 \ll \eta_1$.

Ci sono due punti da osservare:

– La distanza radar non è esattamente $\eta_2 - \eta_1$. Ciò dipende dal redshift gravitazionale: se la misura fosse condotta dalla testa verso la coda, darebbe risultato diverso (quale?); la misura corretta andrebbe fatta sommando tante misure su piccoli tratti, e leggendo il tempo di ciascuna sull'orologio locale.

– Comunque l_{12} non cambia nel tempo, il che ci assicura che l'astronave è rigida.

Può sembrare paradossale, visto che il rif. è rigido, che l'accelerazione dei diversi punti non sia la stessa (è inversamente proporzionale a η); ma la cosa si capisce mettendosi nel rif. tangente. A un dato istante l'astronave è ferma, ma accelerata; dopo un certo tempo, vista dallo stesso rif., essa avrà acquistato velocità e quindi apparirà contratta: dunque la testa dell'astronave deve avere un'accelerazione minore della coda. Lasciamo per esercizio la verifica quantitativa.

Interpretazione della metrica

La discussione che precede ci mette in condizione di dare finalmente una chiara interpretazione fisica della metrica (4–1): si tratta della geometria dello spazio di Lorentz–Minkowski della RR, vista però da un rif. in moto uniformemente accelerato. Le coordinate (ξ, η) sono quelle naturalmente adatte a questo rif.: η è la coordinata spaziale, nel senso che misura le distanze fra punti in quiete nel rif. accelerato, mentre ξ è la coordinata temporale, che non coincide però col tempo proprio di orologi fermi. La distinzione fra coordinata e tempo proprio è resa necessaria dall'esistenza del redshift.

Parlando di questa situazione si usa spesso chiamarla "spazio di Rindler," sebbene la denominazione sia impropria, dal momento che — come abbiamo appena visto — lo spazio-tempo (e la sua geometria) sono quelle usuali della RR. Sarebbe più corretto parlare di "metrica di Rindler" per lo spazio di Lorentz–Minkowski. In questo senso la metrica che stiamo studiando non è di competenza della RG, se s'intende che la RG tratti dello spazio-tempo in presenza di gravità: qui abbiamo solo cambiato rif., ma le proprietà geometriche e fisiche dello spazio-tempo restano le stesse.

Va però detto che lo spazio di Lorentz–Minkowski visto da un rif. accelerato presenta proprietà insolite. Una è appunto il redshift, che si manifesta nel confronto tra orologi fermi; ma ce ne sono altre, che ora vogliamo studiare.

Riprendiamo in esame la trasformazione di coordinate (4–7), (4–8). Avevamo già visto che le coordinate (ξ, η) vanno limitate a valori di η con un dato segno; quindi a uno dei due semipiani nel piano (ξ, η), che non comunicano tra loro. Avevamo anche osservato che la trasformazione di coordinate ha senso solo per $|x| > |t|$: nel piano (x, t) della fig. 4–6 questa condizione vale nei due quadranti delimitati dalle bisettrici degli assi e che contengono l'asse x, mentre non è soddisfatta nei restanti due quadranti. La regione $\eta > 0$ corrisponde al quadrante di destra ($x > |t|$), la regione $\eta < 0$ al quadrante di sinistra ($x < -|t|$).

Vediamo dunque che le due carte con coordinate (ξ, η) non solo sono tra loro disgiunte (come insiemi aperti), ma *non descrivono l'intero spazio-tempo.* D'altra parte abbiamo visto che (ξ, η) è un SC con un'interpretazione fisica naturale, legata al rif. accelerato: che cosa vuol dire, da questo punto di vista, che nel SC (ξ, η) intere regioni dello spazio-tempo non sono rappresentate?

In primo luogo, osserviamo che i due quadranti sono anche *causalmente disgiunti*, nel senso che nessun punto dell'uno può trasmettere segnali a nessun punto dell'altro (e quindi neppure riceverne). Ciò non vale solo per segnali luminosi, ma per interazioni causali di qualsiasi genere, se ammettiamo che queste non possano viaggiare più veloci della luce.

L'orizzonte

Per capire meglio la situazione, pensiamo di avere, accanto all'astronave accelerata $\mathcal{A}$, una seconda astronave $\mathcal{B}$, ferma a una x positiva ($< \eta$). La curva oraria di $\mathcal{B}$ sarà una retta verticale, mentre sappiamo che la curva oraria di $\mathcal{A}$, che si muove di moto iperbolico, è un ramo d'iperbole che ha per asintoti le bisettrici degli assi (fig. 4–6). Supponiamo poi che $\mathcal{B}$ mandi segnali radio verso $\mathcal{A}$, a intervalli regolari.

La curva oraria di $\mathcal{B}$ attraversa la retta di equazione $x = t$ (evento B) senza che a bordo accada niente di notevole; ma dopo di quell'istante i segnali radio non raggiungono più $\mathcal{A}$. Dunque $\mathcal{B}$ dal punto di vista di $\mathcal{A}$ scompare: si usa dire che è caduta "al di là dell'orizzonte" di $\mathcal{A}$. E si noti che questa "caduta" accade per $\mathcal{B}$ in un tempo proprio finito. Invece tutto il fenomeno, misurato col tempo proprio di $\mathcal{A}$, ha una durata infinita, come vedremo fra poco.

Fin qui abbiamo parlato di fatti fisici reali; ma se tentiamo di descriverli nelle coordinate (ξ, η) ci troviamo in difficoltà. In queste coordinate l'astronave accelerata è rappresentata da una retta verticale ($\eta = \text{cost.}$), mentre l'astronave ferma (nel RI, non dimentichiamolo) ha una linea oraria che s'incurva a sinistra, ma non passa mai al di là dell'asse ξ (fig. 4–7). Non è difficile scriverne l'equazione: basta usare la prima delle (4–7), con x costante, per avere

$$\eta \cosh \xi = \text{cost.}$$

Ma non occorre fare conti per capire l'andamento della curva: essa dovrà restare sempre all'interno del cono luce di ogni suo punto, e già sappiamo che le geodetiche della luce non attraversano l'asse ξ.

Dunque in queste coordinate l'evento B *non è rappresentabile*, e si potrebbe credere che non avvenga mai. Dalla figura si vede anche che l'astronave accelerata continua sempre a ricevere segnali, anche se sempre più diradati: dal suo punto di vista la caduta oltre l'orizzonte dura un tempo infinito.

Vedremo più oltre che questa situazione ha uno stretto analogo nella fisica del collasso gravitazionale (buchi neri).

Un fenomeno simile si manifesta se assumiamo che $\mathcal{A}$ invii segnali a $\mathcal{B}$. La fig. 4–8 mostra che cosa accade: $\mathcal{B}$ comincia a ricevere i segnali solo all'evento B$'$, il che è quanto dire che gli eventi sulla curva di $\mathcal{B}$ che precedono B$'$ non sono raggiungibili da $\mathcal{A}$. Anche questa parte dello spazio-tempo per $\mathcal{A}$ non esiste.

Conclusione: la limitazione delle coordinate (ξ, η) a solo una parte dello spazio-tempo non è solo un difetto della descrizione matematica. Essa corrisponde invece a fenomeni fisici osservabili.

Il redshift gravitazionale

Cominciamo col chiederci: se il redshift è un effetto fisico del rif. accelerato, lo si può dedurre con la sola RR nelle consuete coordinate (t, x)? La risposta è affermativa: la radiazione che viene emessa (evento A_1 in fig. 4–9) da una sorgente momentaneamente in quiete, ma solidale all'astronave accelerata, viene ricevuta (evento A_2) quando l'astronave ha acquistato velocità, per cui il ricevitore si allontana: allora la frequenza ricevuta riesce necessariamente minore di quella emessa. Si può anche fare il calcolo diretto dei tempi propri alla partenza (eventi A_1, B_1) e all'arrivo (eventi A_2, B_2) dei due segnali.

Problema: Studiare i dettagli del ragionamento, e ritrovare l'espressione (4–4) del redshift.

Dal PE segue che il redshift si deve vedere anche in un campo gravitazionale. Partiamo dalla (4–6): poiché nel moto iperbolico l'accelerazione è $1/\eta$, dovremo sostituirvi g, mentre al posto di $\Delta\eta$ scriveremo h. Occorre infine un fattore $1/c^2$ per tornare alla unità consuete, e si trova:

$$\nu_2 = \nu_1 \, (1 - gh/c^2). \tag{4–14}$$

A conti fatti nel campo della Terra si ha una variazione relativa di frequenza di 10^{-16} per metro di dislivello.

La (4–14) fu ricavata da Einstein nel 1911, proprio seguendo lo schema di ragionamento accennato sopra. Come già detto nel Cap. 1, i primi esperimenti (Pound–Rebka–Snider) risalgono al 1960 e anni seguenti: il redshift fu rivelato direttamente in un dislivello di 25 m, usando una sorgente γ e un rivelatore a effetto Mössbauer. In seguito Briatore–Leschiutta (1975) e altri hanno compiuto esperimenti strettamente aderenti allo schema che ci ha portato alla (4–5), confrontando orologi atomici su dislivelli di migliaia di metri (montagne o aerei). L'esperimento a tutt'oggi più preciso è quello di Vessot e coll. (1976) che usando un maser a idrogeno montato su un razzo hanno verificato la previsione teorica con errore relativo $2 \cdot 10^{-4}$.