CAPITOLO 5

La geometria di Schwarzschild

Studieremo ora, come secondo esempio, la classica *metrica di Schwarzschild* (1916), la cui importanza sta nel fatto di essere la metrica dello spazio-tempo attorno a una massa a simmetria sferica. Condurremo perciò lo studio più a fondo che nell'esempio precedente, ma seguendo lo stesso approccio: supporremo di non conoscere affatto in partenza né l'interpretazione fisica della metrica, né tanto meno quella delle coordinate, e la dedurremo dalla discussione delle proprietà dello spazio-tempo che discendono dalla forma della metrica.

L'espressione della metrica di Schwarzschild è:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2M/r} - r^2 \bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\bigr) \tag{5–1}$$

dove il parametro M, che per ora è arbitrario, avrà poi il significato di massa del corpo centrale che genera il campo gravitazionale. Ci converrà, per snellire le formule, assumere $2M$ come unità di lunghezza (e di tempo). Questa lunghezza $2M$ prende il nome di "raggio di Schwarzschild." Allora la (5–1) si scrive:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 1/r} - r^2 \bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\bigr). \tag{5–2}$$

Per quanto riguarda l'insieme di definizione delle coordinate, procediamo anche in questo caso per tentativi: assumiamo

$$t \in \mathbb{R}, \qquad r \in \mathbb{R}^+.$$

Per ϑ e φ vale quanto detto nel Cap. 3 a proposito delle coordinate polari sulla sfera, ma di fatto non avremo bisogno di precisare la seconda carta, e ci basterà usare le definizioni abituali in fisica

$$\vartheta \in [0, \pi] \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

anche se a rigore scorrette, come sappiamo.

Interpretazione delle coordinate

Tornando alla (5–2), notiamo innanzitutto le invarianze evidenti a vista:

1) le traslazioni nella coordinata t
2) il gruppo SO(3) delle rotazioni nelle coordinate ϑ, φ.

La seconda invarianza è la *simmetria sferica* della metrica, ed è questa che ci autorizza a interpretare ϑ, φ come ordinarie coordinate polari.

Detto in altri termini: le sezioni $t =$ cost., $r =$ cost. del nostro spazio-tempo sono varietà S^2 (superfici di sfere nell'ordinario spazio euclideo 3-dimensionale). Si vede inoltre che la coordinata r ne misura il raggio, nel senso che $2\pi r$ è la lunghezza dei cerchi massimi e $4\pi r^2$ è l'area totale.

Infatti sulla curva $\vartheta = \pi/2$ di S^2 (equatore) si ha

$$d\tau^2 = -r^2\, d\varphi^2$$

e il segno meno dimostra che si tratta di una curva di tipo spazio. Ridefinendo la metrica col segno cambiato, come conviene fare per curve e superfici di tipo spazio, e come abbiamo già fatto nel cap. precedente:

$$d\sigma^2 = r^2\, d\varphi^2 \quad \Rightarrow \quad d\sigma = r\, d\varphi.$$

Integrando su φ da 0 a 2π si ottiene la lunghezza $2\pi r$ dell'equatore. Per simmetria tutti gli altri cerchi massimi hanno la stessa lunghezza.

Quanto all'area della sfera, il procedimento è del tutto analogo: la metrica prende la forma

$$d\sigma^2 = r^2\bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\bigr)$$

e in questa si legge che la lunghezza di un arco di meridiano è $r\, d\vartheta$, mentre quella di un arco di parallelo è $r \sin\vartheta\, d\varphi$. Il calcolo dell'area si fa come al solito, integrando l'elemento di area $r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ sulle variabili angolari.

Il secondo termine delle (5–2) mostra però che r *non è* la distanza della superficie dal centro; anzi dr non è neppure la distanza fra due sfere corrispondenti a r e a $r + dr$: questa distanza è invece

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - 1/r}}.$$

Ne segue che le sezioni $t =$ cost. *non sono euclidee.*

È bene osservare subito che nasce una difficoltà per $r \le 1$, che discuteremo a fondo più avanti. Tale difficoltà ha due aspetti:

– per $r = 1$ appare una “singolarità” che potremmo sospettare fittizia, ossia dovuta alle coordinate, ma che andrà studiata

– per $r < 1$ i primi due coefficienti della metrica cambiano segno; la segnatura resta 2, ma sembra che t ed r si scambino i ruoli quanto al carattere temporale o spaziale.

Infine, si vede che per $r \gg 1$ la metrica (5–2) si riduce a quella di Lorentz–Minkowski, scritta in coordinate polari: la geometria di Schwarzschild è *asintoticamente lorentziana.*

Il redshift gravitazionale

Supponiamo di avere un orologio fermo (nel senso che le sue coordinate spaziali non cambiano nel tempo). Se poniamo $r = \text{cost.}$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ troviamo dalla (5–1), per il tempo segnato dall'orologio:

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \frac{1}{r}}.$$

Ci troviamo dunque nella stessa situazione già incontrata nel Cap. 4 per la metrica di Rindler: c'è un fattore tra $d\tau$ e dt, dipendente da r, e c'è l'invarianza per traslazioni in t. Ne segue che se confrontiamo due orologi, inviando segnali luminosi dall'uno all'altro, dobbiamo aspettarci un *redshift gravitazionale*:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - 1/r_1}{1 - 1/r_2}}\,. \tag{5–3}$$

Per $r_2 = r_1 + h$, $r_1 \gg 1$ e $h \ll r_1$ si ha

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 1 - \frac{h}{2\,r_1^2}\,. \tag{5–4}$$

Se ricordiamo l'interpretazione fisica già accennata della metrica di Schwarzschild, e teniamo presente che nelle nostre unità $g/c^2 = GM/c^2r^2$ si riduce a $1/2r^2$, ritroviamo il redshift già visto nel Cap. 4. Si vede anche che il coefficiente g_{tt} della metrica, nel caso limite di campi deboli, vale $1+2V(r)$, dove $V(r)$ è il potenziale newtoniano.

Una verifica sperimentale della (5–3) non approssimata alla (5–4) richiede valori di r_1 ed r_2 ben diversi tra loro e non molto maggiori di 1. Questo è possibile solo su scala astronomica, e in situazioni piuttosto estreme. Consideriamo il caso di una nana bianca, la cui superficie ha un r dell'ordine di 10^4: per la radiazione che arriva a noi (r_2 praticamente infinito) la (5–3) si può scrivere

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{1}{2\,r_1}. \tag{5–5}$$

In qualche caso la verifica della (5–5) è stata possibile; la difficoltà è che occorre conoscere bene la *velocità radiale* della stella, altrimenti non si può separare il redshift gravitazionale dall'effetto Doppler. Dell'altra verifica importante, quella sui sistemi binari di stelle di neutroni, parleremo alla fine del corso.

Eliminazione della singolarità

Per la geometria di Schwarzschild sono stati inventati molti sistemi di coordinate, ciascuno dei quali ha particolari vantaggi e si presta meglio per discutere determinati problemi. Qui vogliamo occuparci della soluzione trovata indipendentemente da Kruskal e Szekeres nel 1960, che per brevità presentiamo senza spiegare come ci si può arrivare.

Tralasceremo d'ora in poi le coordinate angolari, che non vengono alterate. In luogo di t, r introduciamo u, v con le equazioni di trasformazione seguenti:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= e^{r/2}\sqrt{r-1}\begin{pmatrix} \cosh t/2 \\ \sinh t/2 \end{pmatrix} \qquad \text{per} \quad r > 1,\ u > |v| \\ &= e^{r/2}\sqrt{1-r}\begin{pmatrix} \sinh t/2 \\ \cosh t/2 \end{pmatrix} \qquad \text{per} \quad r < 1,\ v > |u|. \end{aligned} \tag{5–6}$$

Si noti che le (5–6) per $r = 1$ sembrano dare $u = v = 0$, ma la situazione si capisce meglio cercando le trasformazioni inverse. Abbiamo in primo luogo

$$(r-1)\,e^r = u^2 - v^2. \tag{5–7}$$

La funzione di r a primo membro è strettamente crescente per $r > 0$ e perciò invertibile, anche se non si può dare un'espressione della funzione inversa mediante funzioni elementari. L'importante è che r dipende solo dalla combinazione $u^2 - v^2$: in particolare $r = 0$ per $v^2 - u^2 = 1$, $r = 1$ per $|u| = |v|$. Pertanto tutta la bisettrice del primo quadrante nel piano (u, v) corrisponde a $r = 1$ (fig. 5–1).

Quanto a t, si trova

$$\begin{aligned} t &= 2\ \mathrm{tgh}^{-1}\frac{v}{u} \quad \text{per } u > |v| \\ t &= 2\ \mathrm{tgh}^{-1}\frac{u}{v} \quad \text{per } v > |u|. \end{aligned} \tag{5–8}$$

Esaminiamo ora con attenzione le relazioni che abbiamo scritte, servendoci del piano (u, v) per interpretarle. Per cominciare, le condizioni per u e v poste a destra nelle (5–6) sono conseguenza delle equazioni di trasformazione: dunque nel piano (u, v) solo il semipiano al disopra della retta $u + v = 0$ è descritto dalle (5–6) (se si possa dare un'interpretazione dell'altro semipiano, è questione che qui non possiamo discutere).

Le (5–8) ci dicono che in questo semipiano le curve $t = \text{cost.}$ sono semirette per l'origine, e che scambiando i valori di u e v si ottiene la stessa t. Inoltre $t \to \infty$ quando $u/v \to 1$.

Invece le curve $r = \text{cost.}$ sono rami di iperboli, contenute nel quadrante $u > |v|$ per $r > 1$ e nel quadrante $v > |u|$ per $r < 1$. Questo si vede dalla (5–7), osservando anche i segni dei due membri. Il caso $r = 1$ è anomalo, in quanto l'iperbole degenera nelle bisettrici degli assi. Però la bisettrice di equazione $u + v = 0$ è esclusa dal SC (u, v): fa parte del bordo dell'aperto in cui le coordinate sono definite. Inoltre, come vedremo fra poco, un'altra parte del bordo è il ramo superiore dell'iperbole $u^2 - v^2 = -1$, corrispondente per la (5–7) a $r = 0$.

Tutti i punti della bisettrice del primo quadrante corrispondono a un unico valore per r ($r = 1$), ma al "valore" $t = +\infty$. La bisettrice non è quindi rappresentabile con le coordinate (t, r): già per questo fatto le nuove coordinate appaiono quindi come un'estensione rispetto alle vecchie.

La metrica di Kruskal–Szekeres

Per capire meglio come stanno le cose, occorre esaminare la metrica. Basta differenziare le (5–7), (5–8), e sostituire nella (5–1), per ottenere

$$d\tau^2 = \frac{4}{r}\, e^{-r}\, (dv^2 - du^2). \tag{5–9}$$

Nella (5–9) si legge anzitutto che non c'è alcuna singolarità per $r = 1$. Esiste invece una singolarità in $r = 0$, a causa della r a dividere: si tratta di una singolarità reale, anche se ora non possiamo dimostrarlo. È per questa ragione che la carta non si può estendere al di là del ramo positivo dell'iperbole $u^2 - v^2 = -1$, come già detto.

La metrica (5–9) è lorentziana *a meno di una trasformazione conforme.* Con ciò s'intende che la differenza dalla metrica di Lorentz–Minkowski è solo un fattore moltiplicativo. Si parla di trasformazione "conforme" perché il fattore altera le lunghezze, ma non gli angoli. A noi interessa una conseguenza particolare: le rette a 45° sono linee di tipo luce, come nello spazio tempo piatto nelle usuali coordinate (x, t). Ne segue che il cono luce futuro di un evento è ancora il quadrante formato dalle parallele alle bisettrici degli assi, nel verso delle v crescenti; che le curve di tipo tempo sono quelle che hanno tangente interna al cono luce, mentre quelle di tipo spazio hanno tangente esterna.

Da qui si vede subito che $r = 1$ è un *orizzonte*: dai punti con $r < 1$ non è possibile trasmettere segnali a quelli con $r > 1$, mentre il viceversa è possibile (fig. 5–2). Il fenomeno dell'orizzonte è analogo a quello visto nel Cap. 4 per un rif. accelerato nello spazio di Lorentz–Minkowski: non c'è niente che impedisca a un corpo di attraversarlo, e l'attraversamento avviene in tempo proprio finito; ma una volta passato l'orizzonte il corpo non può più mandare segnali ricevibili al di qua.

C'è però una differenza importante rispetto al caso del rif. accelerato: lì il fenomeno riguardava solo ciò che si vede da un corpo accelerato, in uno spazio-tempo per altri versi del tutto "normale"; le due astronavi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ differiscono solo per come si muovono. Invece nella geometria di Schwarzschild l'orizzonte esiste come proprietà dello spazio-tempo: due corpi che siano uno al di qua e l'altro al di là dell'orizzonte si trovano in condizioni del tutto diverse.

Possiamo capirlo osservando che le curve $r = \text{cost.}$ sono di tipo tempo per $r > 1$, di tipo spazio per $r < 1$. (Viceversa, le curve $t = \text{cost.}$ sono di tipo spazio per $r > 1$, di tipo tempo per $r < 1$.) Dunque è in linea di principio possibile tenere un oggetto "fermo," ossia con r costante (ricordare che anche ϑ e φ sono costanti) solo se $r > 1$: sarebbe il caso di un'astronave coi motori accesi che compensano l'attrazione gravitazionale della massa M. Invece ciò riesce impossibile se $r < 1$: l'astronave cade inesorabilmente verso la singolarità in $r = 0$.

Per approfondire lo studio della geometria di Schwarzschild occorre dotarsi di qualche altro strumento matematico; dedicheremo a questo scopo il prossimo capitolo.

Un'applicazione: la navigazione satellitare

Il redshift gravitazionale trova un'applicazione pratica, impensabile solo pochi anni fa, nei sistemi di ınavigazione satellitare. Prendono questo nome i sistemi che permettono a un ricevitore collegato a satelliti in orbita attorno alla Terra di determinare la propria posizione in base alla misura del tempo che i segnali radio impiegano ad arrivare dai satelliti. Attualmente il sistema più noto e diffuso è il GPS (Global Positioning System), di realizzazione militare USA; tra qualche anno si prevede l'entrata in funzione di "Galileo," sistema civile di produzione europea.

Senza entrare in dettagli sul funzionamento di questi sistemi, ci basta sapere che il GPS usa satelliti in orbite circolari con periodo di 12 ore, inclinate di circa 55° sull'equatore. Ogni satellite porta a bordo un orologio atomico, e trasmette regolarmente segnali che portano l'informazione dell'istante di partenza, nonché i dati orbitali, che permettono il calcolo della posizione a quell'istante.

Il ricevitore può misurare l'istante di arrivo con un proprio orologio, e ricavarne la distanza del satellite. Con un minimo di 3 satelliti è allora possibile ricostruire la posizione del ricevitore nello spazio: quindi non solo longitudine e latitudine, ma anche altezza sul livello del mare. (In realtà non è così: non conviene dotare ogni ricevitore di un orologio altrettanto sofisticato come quello sul satellite... Se ne può fare a meno, confrontando i segnali ricevuti da almeno 4 satelliti.)

Lo scopo di questo esempio è solo di dimostrare che il sistema *non potrebbe funzionare se non si tenesse conto degli effetti di* RG. Ci limitiamo quindi a risolvere il seguente

Problema: Un satellite in orbita nota emette un segnale a un certo istante, e questo viene ricevuto sulla Terra, da un ricevitore in posizione nota. Calcolare il tempo di ricezione in funzione di quello di emissione, intesi entrambi come tempi propri dei rispettivi corpi. Spiegare come questo dato permette di determinare la posizione del ricevitore; in particolare, che importanza hanno gli effetti di RG?

La navigazione satellitare: determinazione della posizione

Affronteremo il problema facendo notevoli semplificazioni, che però non alterano gli aspetti essenziali. In primo luogo, assumiamo che il satellite sia in orbita equatoriale circolare, e che anche il ricevitore si trovi all'equatore, fermo sulla superficie della Terra. Potremo dunque scrivere:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \omega_1 t_1 \qquad \varphi_2 = \varphi_{20} + \omega_2 t_2 \tag{5–10}$$

dove l'indice $_1$ si riferisce al satellite, l'indice $_2$ al ricevitore sulla Terra. I tempi t_1, t_2 sono i tempi di Schwarzschild alla partenza e all'arrivo di un segnale; ω_1, ω_2 sono le velocità angolari (note) del satellite e della Terra rispetto a un RIL solidale al centro della Terra; φ_{10}, φ_{20} sono le posizioni all'origine del tempo di Schwarzschild. La prima è da supporre nota, la seconda è da determinare in base alle misure. Infine, le coordinate r_1, r_2 sono entrambe costanti e note.

La seconda semplificazione consiste nel trascurare gli effetti di RG nella propagazione delle onde e.m. dal satellite al ricevitore. Questo è lecito, perché tali effetti, che vedremo meglio nel Cap. 7, sono già piccoli nel caso del Sole, ma per la Terra diventano del tutto trascurabili rispetto a quelli che vedremo dal calcolo, anche perché non aumentano al passare del tempo.

Possiamo quindi usare la geometria euclidea e scrivere, se $s = t_2 - t_1$ è la distanza percorsa dal segnale (fig. 5–3):

$$(t_2 - t_1)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\, r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{5–11}$$

Nella (5–11) è tutto noto, tranne φ_{20}, che compare attraverso φ_2; quindi il problema è in linea di principio risolto.

La difficoltà è che in realtà non si misurano t_1 e t_2, ma i tempi propri τ_1 e τ_2: il secondo si misura direttamente, se al ricevitore è associato un orologio; il primo è comunicato dal satellite, col messaggio associato al segnale. Dobbiamo quindi studiare la relazione fra i t e i τ, che è semplice, visto il moto circolare uniforme dei due orologi. Basta infatti sostituire le (5–10) nella metrica (5–2), per trovare

$$d\tau_1^2 = \left(1 - \frac{1}{r_1} - \omega_1^2\, r_1^2\right) dt_1^2 \tag{5–12}$$

e analoga per $d\tau_2$.

Il secondo e il terzo termine in parentesi sono entrambi $\ll 1$, per cui possiamo approssimare la (5–12) con

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{1}{2\, r_1} - \tfrac{1}{2}\, \omega_1^2\, r_1^2\right) dt_1$$

e integrare:

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{1}{2\, r_1} - \tfrac{1}{2}\, \omega_1^2\, r_1^2\right) t_1$$

essendo inteso che entrambi gli orologi segnino 0 quando $t = 0$. A noi servirà la differenza $\tau - t$, che vale

$$\tau_1 - t_1 = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \omega_1^2\, r_1^2\right) t_1. \tag{5–13}$$

Relazione del tutto simile si ottiene per il ricevitore.

Il satellite è in orbita, il che vuol dire che tra r_1 e ω_1 c'è un legame (la terza legge di Keplero). Nelle nostre unità ($2M = 1$) il legame si scrive

$$\omega_1^2\, r_1^3 = \tfrac{1}{2}. \tag{5–14}$$

Si noti che la (5–14) è la formula fornita dalla meccanica newtoniana, ma il calcolo con la geometria di Schwarzschild, che vedremo nel Cap. 8, fornisce proprio lo stesso risultato. Dunque la (5–13) diventa

$$\tau_1 - t_1 = -\frac{3\, t_1}{4\, r_1}. \tag{5–15}$$

Quanto al ricevitore, che non è in orbita, il calcolo è diverso. Si verifica facilmente che $\omega_2^2\, r_2^2$ è piccolo rispetto a $1/r_2$, e allora

$$\tau_2 - t_2 = -\frac{t_2}{2\, r_2}. \tag{5–16}$$

Stima dell'errore

Dobbiamo ora stimare l'errore che si commette se si usano nella (5–11) i tempi τ dati dagli orologi, al posto dei tempi t di Schwarzschild. Differenziamola, ricordando che le φ dipendono dalle t tramite le (5–6), e che anche φ_{20} è alla fine dei conti funzione dei tempi:

$$2(t_2 - t_1)(dt_2 - dt_1) = 2\, r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\, (d\varphi_{20} + \omega_2\, dt_2 - \omega_1\, dt_1)$$

da cui

$$\begin{aligned} &r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\, d\varphi_{20} = \\ &\qquad [s - \omega_2 r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]\, dt_2 - [s - \omega_1 r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]\, dt_1. \end{aligned}$$

Nelle parentesi quadre i secondi termini sono sempre $\ll s$: infatti $\omega_1\, r_1$ e $\omega_2\, r_2$ sono $\ll 1$ (sono le velocità del satellite e di un punto dell'equatore terrestre) mentre s, r_1, r_2 sono dello stesso ordine. Possiamo dunque semplificare:

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\, d\varphi_{20} = s\, (dt_2 - dt_1). \tag{5–17}$$

Per stimare l'errore $\delta\varphi_{20}$ basta sostituire nella (5–17) $t_1 - \tau_1$, $t_2 - \tau_2$, dati dalle (5–15), (5–16), al posto di dt_1, dt_2:

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta\varphi_{20} = s\left(\frac{3\,t_1}{4\,r_1} - \frac{t_2}{2\,r_2}\right) = s\,t\left(\frac{3}{4\,r_1} - \frac{1}{2\,r_2}\right)$$

(è lecito a questo punto confondere t_1 e t_2).

La fig. 5–3 mostra che $r_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = s \sin\alpha$. Se siamo interessati all'errore nella posizione del ricevitore, che è $\delta l = r_2\,\delta\varphi_{20}$, troviamo

$$\delta l \,\sin\alpha = t\left(\frac{3}{4\,r_1} - \frac{1}{2\,r_2}\right)$$

$$\delta l > t\left(\frac{3}{4\,r_1} - \frac{1}{2\,r_2}\right) \tag{5–18}$$

e resta solo da stimare il secondo membro.

Osservazione: Non è strana la comparsa di $\sin\alpha$: basta pensare al caso limite $\alpha = 0$, ossia satellite che si trova sulla verticale del ricevitore all'istante di emissione, per capire che cosa succede. Un tale satellite è in buona posizione per determinare la quota del ricevitore, ma pessima per determinarne la posizione orizzontale. Questa si ricaverà meglio da altri satelliti, più vicini all'orizzonte; quindi $\sin\alpha$ non sarà troppo diverso da 1.

Ricordiamo che la nostra unità di lunghezza è $2\,M_\oplus = 0.89\,\mathrm{cm}$, mentre $r_2 = 6.4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ e $r_1 = 2.7 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$. Per l'espressione in parentesi troviamo quindi $-4.3 \cdot 10^{-10}$ (numero puro). Supponiamo ad es. che t sia un'ora, ossia $1.1 \cdot 10^9\,\mathrm{km}$: allora

$$\delta l \simeq -0.48\,\mathrm{km}.$$

Un errore ovviamente intollerabile!

La soluzione pratica adottata nel sistema GPS consiste nel rallentare gli orologi dei satelliti per compensare la deriva data dalla parentesi nella (5–18).