

## CAPITOLO 13

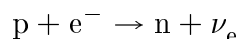
### La scelta di un'equazione di stato

Noi siamo interessati agli stati finali dell'evoluzione stellare, ossia quelli che si raggiungono quando la stella ha perduto tutta l'energia possibile. In particolare, all'interno della stella non avranno più luogo reazioni nucleari, né un apprezzabile trasporto di materia e/o radiazione. Va osservato che solo se questo stato finale viene raggiunto gradualmente, allora la materia presente si trova effettivamente nello stato di energia minima. Ma nelle stelle reali si possono avere situazioni diverse: se ad es. il nucleo di una stella consiste soltanto di He, e la temperatura non è sufficientemente alta (almeno  $10^8$  K) non sono più possibili reazioni nucleari.

Tornando allo stato di equilibrio finale, possiamo senz'altro assumere che la temperatura sia quella dello zero assoluto (ridiscuteremo più avanti questo punto). Come sia esattamente costituita la materia dipende però dalla densità (o dalla pressione). Ad es. a pressione molto bassa il nucleo di energia minima (per nucleone) è il  $^{56}\text{Fe}$ , per cui la materia consisterà di ferro metallico: nuclei di  $^{56}\text{Fe}$  circondati dal numero di elettroni (26 per nucleo) occorrenti per la neutralità elettrica. L'equazione di stato è quella del ferro: un solido la cui comprimibilità è determinata dalle normali forze interatomiche.

Se facciamo crescere la pressione, a un certo punto la situazione cambia: mentre all'inizio la maggior parte degli elettroni erano legati agli atomi, con l'eccezione degli elettroni di conduzione del metallo, quando la densità aumenta un sempre maggior numero di elettroni occupa le bande di conduzione, finché si arriva praticamente a un gas di elettroni liberi. A questo punto la pressione è quella del *gas di Fermi completamente degenere* formato da tutti gli elettroni. Fortunatamente per noi un tale modello funziona proprio nel campo di densità e pressioni tipiche delle stelle, e perciò ad esso dedicheremo maggiore attenzione.

Se la densità cresce ancora, comincia a diventare energeticamente possibile la reazione



(*neutronizzazione* della materia). Infatti, dato che la massa del neutrone è maggiore di quella del protone, la conservazione dell'energia richiede elettroni di energia totale almeno pari a  $m_n - m_p \simeq 1.3 \text{ MeV}$ , che sono presenti solo se l'energia di Fermi del gas di elettroni è  $\geq 0.8 \text{ MeV}$ . I neutrini prodotti sfuggono, e si formano nuclei sempre più ricchi di neutroni, fino al punto che alcuni neutroni (in numero sempre crescente) non riescono più a essere legati nei nuclei. Si ha così una transizione verso una materia costituita esclusivamente di neutroni "liberi" (le virgolette stanno a ricordare che tra i neutroni ci sono pur sempre interazioni). Anche il gas di neutroni è un sistema semplice, se si trascurano le interazioni.

In ogni modo il problema è ormai chiaro: per ognuno degli stadi descritti si deve calcolare la relazione tra densità e pressione, che rappresenta l'equazione di stato di cui siamo in cerca. Noi non affronteremo questo problema, ma daremo solo qualche cenno ai risultati. Per mostrare però almeno le linee generali dei fenomeni che si presentano, e gli ordini di grandezza in gioco, vogliamo esaminare un po' più in dettaglio i due casi semplici:

- 1: pressione dominata dal gas di elettroni
- 2: gas di soli neutroni non interagenti.

### Il gas di Fermi degenere

Studiato nel caso limite di temperatura zero, il problema è piuttosto semplice: il sistema di  $N$  particelle assumerà lo stato di energia minima, e se non ci sono interazioni tra le particelle questo implica che saranno occupati tutti i livelli più bassi per ciascuna particella, con la sola restrizione imposta dal principio di Pauli. Al nostro scopo è sufficiente calcolare l'energia e la pressione totale del sistema. Ci limitiamo a dare il risultato, in due casi limite:

*Caso non relativistico* (energia di Fermi  $E_F \ll mc^2$ ):

$$p = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}. \quad (13-1)$$

( $n$  è la densità numerica).

Per un gas di elettroni l'ipotesi vale se  $n \ll 5.8 \cdot 10^{29} \text{ cm}^{-3}$ ; per un gas di neutroni si trova invece  $n \ll 3.6 \cdot 10^{39} \text{ cm}^{-3}$ .

*Caso relativistico*: Il calcolo per un gas relativistico fornisce un'espressione poco maneggevole, salvo al limite ultrarelativistico ( $E_F \gg mc^2$ ). Si trova allora

$$p = \frac{1}{4} (3\pi^2)^{1/3} \hbar c n^{4/3}. \quad (13-2)$$

Come si vede, passando dal limite non relativistico a quello relativistico estremo il gas diventa più comprimibile: mentre nel primo caso  $p \propto n^{5/3}$ , nel secondo  $p \propto n^{4/3}$ .

### Le equazioni di stato

Possiamo ora scrivere le equazioni di stato per i due casi particolari annunciati. Se la pressione è dominata dal gas di elettroni, sarà valida la forma (13-1) oppure (13-2) a seconda di  $n$ ; quanto alla densità  $\varrho$ , essa è determinata dai nucleoni presenti, che hanno energia cinetica trascurabile, e può quindi essere scritta

$$\varrho = \mu n_e m_p$$

dove si è indicato con  $\mu$  il numero di nucleoni per elettrone e con  $m_p$  la massa del protone (trascuriamo la differenza di massa tra protone e neutrone e i difetti di massa dei nuclei). Riassumendo:

$$p_{\text{nr}} = \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} \left( \frac{\rho}{\mu m_p} \right)^{5/3} \quad (13-3)$$

$$p_{\text{ur}} = \frac{1}{4}(3\pi^2)^{1/3} \hbar c \left( \frac{\rho}{\mu m_p} \right)^{4/3}. \quad (13-4)$$

Se la materia della stella è formata di atomi leggeri, il rapporto  $A/Z$ , tra numero di nucleoni e numero di elettroni per atomo è vicino a 2. Si trova così la condizione sulla densità di massa perché il gas sia non relativistico:

$$\rho \ll 2 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3.$$

Siamo ora in grado di verificare se nelle condizioni tipiche delle stelle sia lecito trattare il gas come completamente degenere. Ciò accade quando l'energia di agitazione termica  $kT$  è molto minore dell'energia di Fermi. Per il caso non relativistico, inserendo i valori numerici si trova ad es. che per  $T = 10^7$  K (ordine di grandezza della temperatura al centro del Sole) dev'essere  $\rho \gg 10^3 \text{ g/cm}^3$ . Come vedremo, le densità centrali delle nane bianche sono largamente al disopra di questo limite.

Se si ripete il calcolo nell'ipotesi di gas ultrarelativistico, si trova una condizione ancor più largamente soddisfatta. Concludendo, è perfettamente lecito supporre il gas di elettroni completamente degenere.

Se passiamo ora al gas di neutroni, nel caso non relativistico la densità di energia è tutta dovuta alla massa di riposo, per cui  $\rho = n_n m_n$ . Allora dalla (13-1)

$$p_n = \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} \rho^{5/3}. \quad (13-5)$$

Vedremo in seguito che non occorre considerare il caso relativistico.

### Le nane bianche non relativistiche

A questo punto è possibile cominciare a farsi un quadro dei possibili stati di equilibrio di una stella fredda e senza momento angolare, in funzione della pressione (o della densità) centrale.

Se la densità non è troppo alta abbiamo un gas di elettroni degenere e non relativistico: studiamo dunque questo caso, che corrisponde alle *nane bianche* fino a una certa massa. Come vedremo a posteriori, nel calcolo dell'equilibrio

gli effetti di RG hanno poca importanza: quindi l'equazione di Oppenheimer-Volkov (12-15) può essere approssimata con quella newtoniana:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{m \varrho}{r^2}. \quad (13-6)$$

(abbiamo reintrodotta la costante di gravitazione, per tornare alle unità usuali). Accanto a questa occorrerà la (12-13):

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varrho. \quad (13-7)$$

Abbiamo poi l'equazione di stato (13-3), che abbrevieremo per ora con

$$p = \alpha \varrho^{5/3}.$$

Sostituendo questa nella (13-6) si trova:

$$\frac{d}{dr} \varrho^{2/3} = -\frac{2G}{5\alpha} \frac{m}{r^2} \quad (13-8)$$

che va integrata insieme con la (13-7), a partire dalle condizioni iniziali  $m(0) = 0$ ,  $\varrho(0) = \varrho_c$  (densità centrale assunta come parametro libero).

Non è possibile un'integrazione elementare, per cui occorre affrontare il calcolo per via numerica. È però utile osservare subito che non c'è bisogno di risolvere le equazioni per tutte le diverse condizioni iniziali, poiché esiste un'*invarianza di scala*. Se infatti eseguiamo le trasformazioni

$$r \mapsto \lambda r, \quad \varrho \mapsto \varrho/\lambda^6, \quad m \mapsto m/\lambda^3 \quad (13-9)$$

le (13-7), (13-8) restano invariate: ne segue che una volta risolte le equazioni con una data condizione iniziale, si passa a tutte le altre mediante le (13-9). Poiché le (13-9) lasciano invariato il prodotto  $m r^3$ , dobbiamo aspettarci una "famiglia" di stelle con  $M R^3 = \text{cost}$ . Diamo senz'altro il risultato del calcolo per  $R$  e  $M$ :

$$\begin{aligned} R &= 3.65 \left( \frac{5\alpha}{8\pi G} \right)^{1/2} \varrho_c^{-1/6} \\ M &= 1.36 \left( \frac{5\alpha}{2G} \right)^{3/2} \left( \frac{\varrho_c}{4\pi} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (13-10)$$

Dalle (13-10) eliminando  $\varrho_c$  si ricava

$$\begin{aligned} M R^3 &= 33.1 \pi \left( \frac{5\alpha}{4\pi G} \right)^3 = 33.1 \left( \frac{3}{8}\pi \right)^2 \frac{\hbar^6}{G^3 \mu^5 m_e^3 m_p^5} \\ &= 45.9 \left( \frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \left( \frac{M_P}{\mu m_p} \right)^5 M_P \end{aligned} \quad (13-11)$$

dove  $M_P = \sqrt{\hbar c/G}$  è la massa di Planck, definita al Cap. 3. È notevole che con parametri microscopici (ricordiamo che  $\hbar/m_e c$ , detta *lunghezza d'onda Compton ridotta dell'elettrone*, vale  $3.8 \cdot 10^{-11}$  cm, e che anche  $M_P$  vale solo  $2.2 \cdot 10^{-5}$  g) si riesce a costruire una grandezza di dimensioni “astronomiche”: infatti se poniamo nella (13–11)  $M = M_\odot$  troviamo  $R = 7.0 \cdot 10^8$  cm = 7000 km, cioè all'incirca il raggio della Terra. Ciò accade perché nella (13–11) compare il rapporto  $M_P/\mu m_p$ , che è un numero puro grande ( $\sim 10^{19}$ ) elevato alla quinta potenza. Per inciso, sarebbe del tutto impossibile arrivare al risultato con sole considerazioni dimensionali.

## Discussione

Il valore appena calcolato per  $R$  può servirci per verificare le due ipotesi fatte:

- a) che si possano trascurare gli effetti di RG
- b) che si possa trattare il gas di elettroni come non relativistico.

Quanto ad *a*), basterà osservare che il raggio di Schwarzschild per una massa come quella del Sole è 3 km, molto minore di  $R$ : dunque gli effetti di RG sono realmente trascurabili. Si dovrebbe anche verificare che sono lecite le altre approssimazioni che dall'equazione di Oppenheimer–Volkov portano alla (13–6); si trova sempre la stessa condizione:

$$M \ll \frac{3M_P^3}{m_e^{3/4}(\mu m_p)^{5/4}}.$$

A conti fatti, il secondo membro è dell'ordine di  $10^3 M_\odot$ .

Quanto al modello non relativistico per gli elettroni, con  $M = M_\odot$  risulta  $\rho_c = 1.3 \cdot 10^6$  g/cm<sup>3</sup>, che è proprio a metà strada fra i due casi estremi: non relativistico e ultrarelativistico. Se ne conclude che il calcolo non relativistico sarà lecito solo per masse sensibilmente minori di quella solare, in quanto  $\rho_c \propto M^2$ , come si vede dalla seconda delle (13–10). Poiché esistono nane bianche di massa uguale o maggiore del Sole, è necessario esplorare anche il caso ultrarelativistico.

*Nota:* È bene dissipare un possibile equivoco, a proposito di approssimazioni non relativistiche. Le due questioni *a*) e *b*) sono ben distinte tra loro:

- La seconda è una questione “locale,” nel senso che ha a che fare con la distribuzione di energia degli elettroni nel rif. locale di quiete della materia. Abbiamo visto che tutto dipende dal valore che assume la densità.
- La prima è invece una questione “globale”: si tratta di vedere se si possano ritenere piccoli gli effetti di curvatura, tanto da poter usare la gravitazione newtoniana.

La materia della stella è comunque *statica su scala macroscopica*: la velocità *media* delle particelle è sempre nulla nelle coordinate di Schwarzschild.

## Le nane bianche ultrarelativistiche

Il modello ultrarelativistico si tratta in maniera perfettamente analoga all'altro: prendiamo l'equazione di stato (13-4), scritta

$$p = \beta \varrho^{4/3}$$

e sostituiamola nella (13-6). Troviamo

$$\frac{d}{dr} \varrho^{1/3} = -\frac{G}{4\beta} \frac{m}{r^2}. \quad (13-12)$$

che va risolta insieme con la (13-7). Abbiamo ancora un'invarianza di scala:

$$r \mapsto \lambda r, \quad \varrho \mapsto \varrho/\lambda^3, \quad m \mapsto m \quad (13-13)$$

che lascia invariante  $m$ . Dobbiamo quindi aspettarci stelle *tutte di un'unica massa*.

L'integrazione numerica fornisce ora

$$\begin{aligned} R &= 6.90 \left( \frac{\beta}{\pi G} \right)^{1/2} \varrho_c^{-1/3} \\ M &= \frac{8.08}{\pi^2} \left( \frac{6\beta}{G} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (13-13)$$

Sostituendo l'espressione di  $\beta$  si ha

$$\begin{aligned} M &= M_{\text{Ch}} = 2.02 \left( \frac{3}{4}\pi \right)^{1/2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} (\mu m_p)^{-2} \\ &= 3.10 \left( \frac{M_{\text{P}}}{\mu m_p} \right)^2 M_{\text{P}} = 1.44 M_{\odot} \quad (\mu = 2). \end{aligned} \quad (13-14)$$

Anche per la (13-14) occorre ripetere quanto già detto per la (13-11): è notevole come si ottenga una massa dell'ordine di quella del Sole, partendo da soli dati microscopici, grazie alla presenza di un enorme numero puro.

Dai due casi limite che abbiamo studiati appare già chiaro che *esiste una configurazione di equilibrio di nana bianca per tutte le masse minori di  $M_{\text{Ch}}$ , e solo per quelle*: quindi  $M_{\text{Ch}}$  ha il significato di *massa limite*, e si chiama infatti *limite di Chandrasekhar*.

Anche senza svolgere i calcoli per il caso intermedio tra i due casi limite, ci si può immaginare che cosa deve succedere. In fig. 13-1 è riportato un grafico bilogarithmico di  $R$  in funzione di  $M$ : si vede un retta discendente, con pendenza  $-1/3$ , corrispondente al limite non relativistico  $R \propto M^{-1/3}$ ; e una retta

verticale, che corrisponde alla massa di Chandrasekhar (limite ultrarelativistico). Invece dell'intersezione ad angolo tra le due rette, si dovrà avere un "raccordo" (tratteggiato in figura).

### Nane bianche in RG

Occorre però dire qualcosa sulle modifiche prodotte dalla RG. Anche se abbiamo già detto che gli effetti sono poco importanti, in realtà qualcosa di nuovo accade. Non è possibile una discussione semplice (non ci sono invarianze di scala); si deve ricorrere a un'integrazione numerica, caso per caso a seconda del valore di  $p_c$ .

I risultati dell'integrazione per  $\mu = 2$  sono riportati (sempre in scala bi-logaritmica) in fig. 13-2. Il primo tratto discendente è pochissimo modificato rispetto al calcolo newtoniano; c'è poi il raccordo che avevamo descritto sopra, seguito da una discesa pressoché verticale, nel limite ultrarelativistico. Tuttavia la curva non ha un asintoto verticale, come previsto dal limite di Chandrasekhar, ma piega di nuovo verso sinistra, il che indica un massimo della massa ( $M = 1.41 M_\odot$ ,  $R \simeq 900$  km) e poi valori di  $M$  nuovamente decrescenti insieme con  $R$ .

Questo è l'effetto più importante delle correzioni di RG: si dimostra infatti che il tratto della curva al di là del massimo di  $M$  *non corrisponde a un equilibrio stabile* della stella, e occorre perciò chiedersi che cosa c'è al di là.

### Le stelle di neutroni

Basta tornare alla discussione iniziale per avere la risposta: per densità abbastanza alte inizia la neutronizzazione, e la nuova configurazione stabile corrisponde a una *stella di neutroni*.

In fig. 13-3 abbiamo riportato la curva per le stelle di neutroni insieme con quella già vista per le nane bianche: si vede che i due andamenti sono simili, a parte il fatto che per le stelle di neutroni il tratto verticale (ultrarelativistico) non è visibile. Ciò dimostra quanto avevamo asserito: per le stelle di neutroni gli effetti relativistici nel gas di Fermi non hanno importanza, perché si fanno sentire prima le correzioni di RG.

Nella figura i numeri accanto ai triangoli danno il logaritmo decimale della densità centrale (in  $\text{g/cm}^3$ ). Per quello che abbiamo detto, una nana bianca non può essere stabile per  $\rho_c \gtrsim 10^{11} \text{g/cm}^3$ , e la curva dovrebbe interrompersi lì: si noterà che per lo stesso valore di  $\rho_c$  una stella di neutroni avrebbe massa molto minore. In altre parole, fra le due curve c'è un "gap": come mai?

Una parte della spiegazione è la già accennata instabilità; ma prima di tutto occorre ricordare che nel passare dalla nana bianca (nuclei e gas di elettroni) alla stella di neutroni (elettroni completamente catturati dai nucleoni, ossia neutronizzazione totale) abbiamo saltato una transizione: quella corrispondente a una neutronizzazione parziale. Senza entrare nella discussione, indichiamo solo

l'andamento (semiquantitativo) di questa zona di transizione, tratteggiata nella figura.

Si notano diversi aspetti:

- in primo luogo, la massa delle nane bianche (per una data densità centrale) viene sensibilmente ridotta, e così pure il suo massimo, che riesce intorno a  $1.2 M_{\odot}$
- fenomeno opposto si ha per le stelle di neutroni, che hanno massa assai maggiore di quella calcolata prima
- le due curve sono ora fuse in una, ma un tratto della curva (quello punteggiato) è *instabile*
- c'è un intervallo di masse (fra  $0.3$  e  $0.8 M_{\odot}$ ) nel quale sono possibili tanto nane bianche quanto stelle di neutroni
- per  $\rho_c \gtrsim 10^{16} \text{ g/cm}^3$ , corrispondente a  $0.8 M_{\odot}$ , anche le stelle di neutroni sono instabili.

Prima di concludere dobbiamo rilevare che nel calcolo che porta alla fig. 13–3 c'è ancora una semplificazione non realistica: il gas di neutroni è stato supposto perfetto, il che vuol dire che sono state trascurate le interazioni. Alle densità in gioco questo non è lecito, ma non è facile decidere quale sia la corretta equazione di stato. La questione è ancora aperta, e i calcoli vengono periodicamente aggiornati: diciamo solo che si presume per la massa limite un valore  $M_{\text{lim}} \sim 3M_{\odot}$ .

### Al di là delle stelle di neutroni

Resta dunque il problema: che cosa accade a una stella di massa superiore a  $M_{\text{lim}}$  quando raggiunge la fine della sua evoluzione? Oppure: cosa capita se nell'esplosione di una supernova il nucleo viene compresso a una densità superiore a  $\sim 10^{16} \text{ g/cm}^3$ ?

Fino a poco tempo fa sembrava non vi fossero alternative: in entrambi i casi deve aversi un collasso gravitazionale estremo, il cui risultato è un *buco nero*. Tuttavia risultati di osservazioni recenti sembrano indicare un'altra possibilità, che era stata adombrata in ambito teorico: la formazione di una *stella di quark*. I nucleoni potrebbero fondersi, mettendo in comune tutto il corredo di quark, e formando uno stato di materia del quale si sa assai poco; in particolare non se ne sa dare un'equazione di stato attendibile.

Le osservazioni citate sopra suggeriscono l'esistenza di oggetti assai compatti, che per più ragioni non sembra possano essere stelle di neutroni. La ragione più importante è il raggio troppo piccolo, al di là del limite di stabilità di una stella di neutroni, situato attorno a 10 km (fig. 13–3).