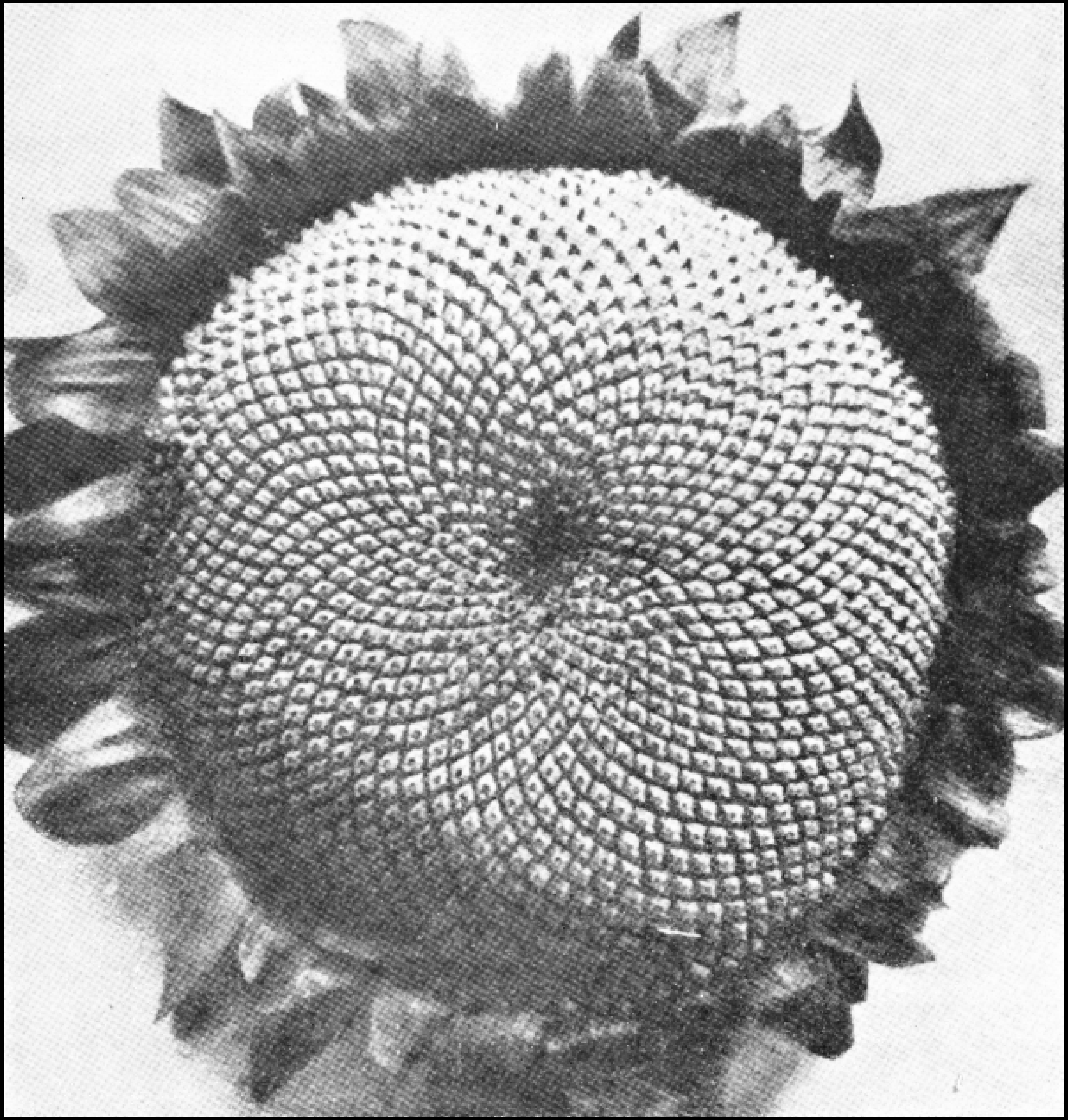
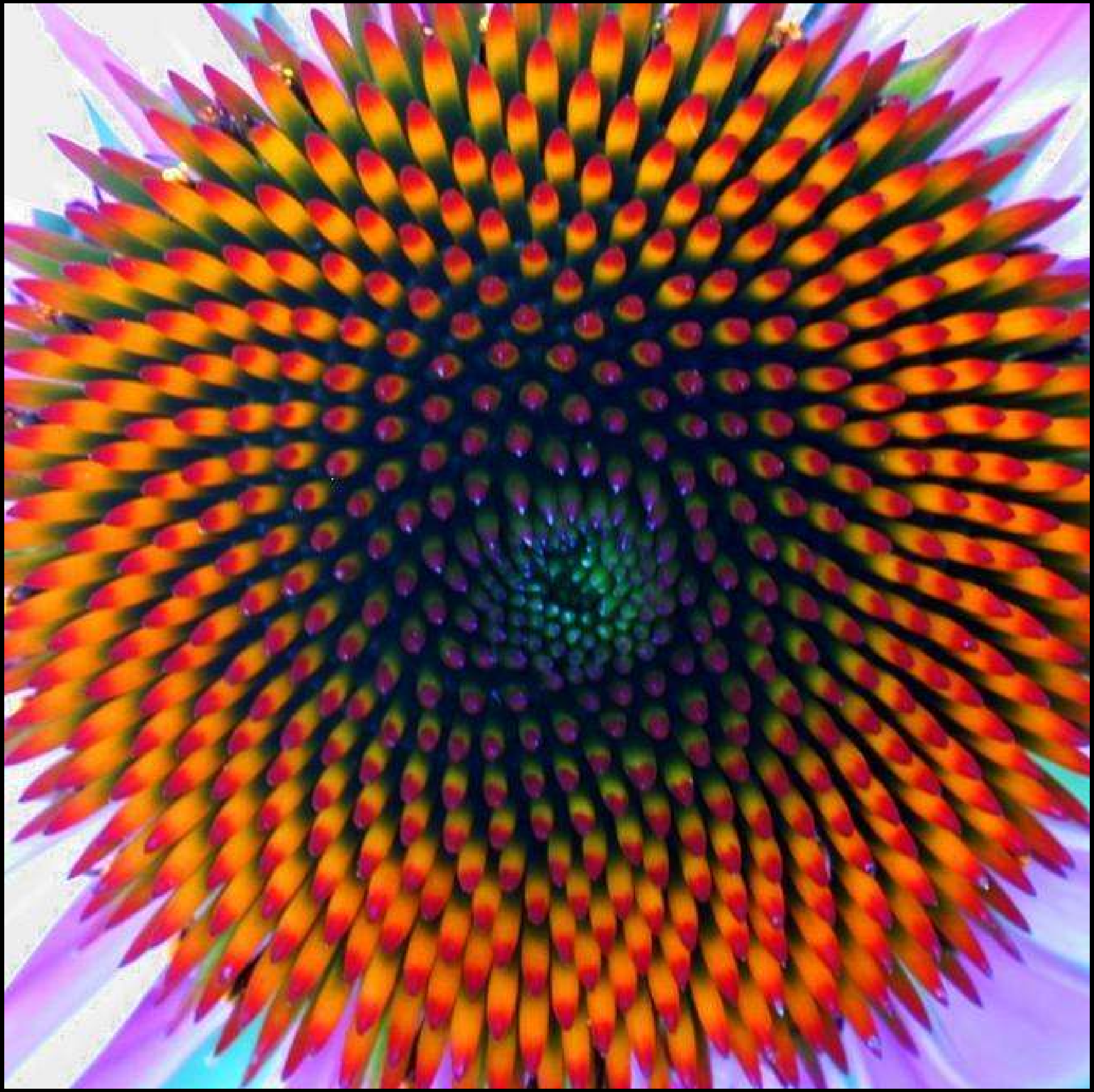
Numeri e piante

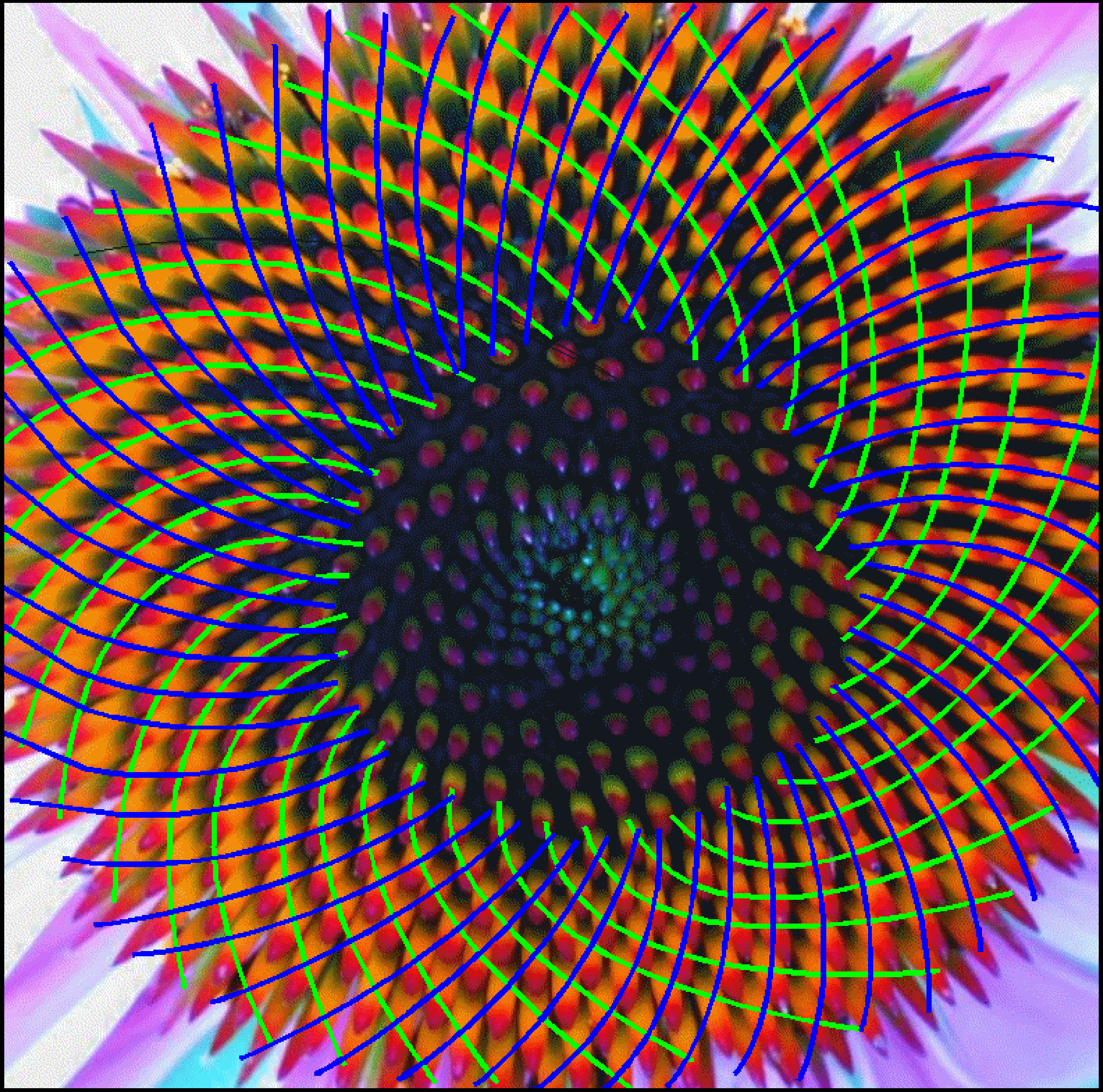
due mondi a confronto

L'anno scorso abbiamo parlato della disposizione delle parti di una pianta: i flosculi nei capolini delle Composite...



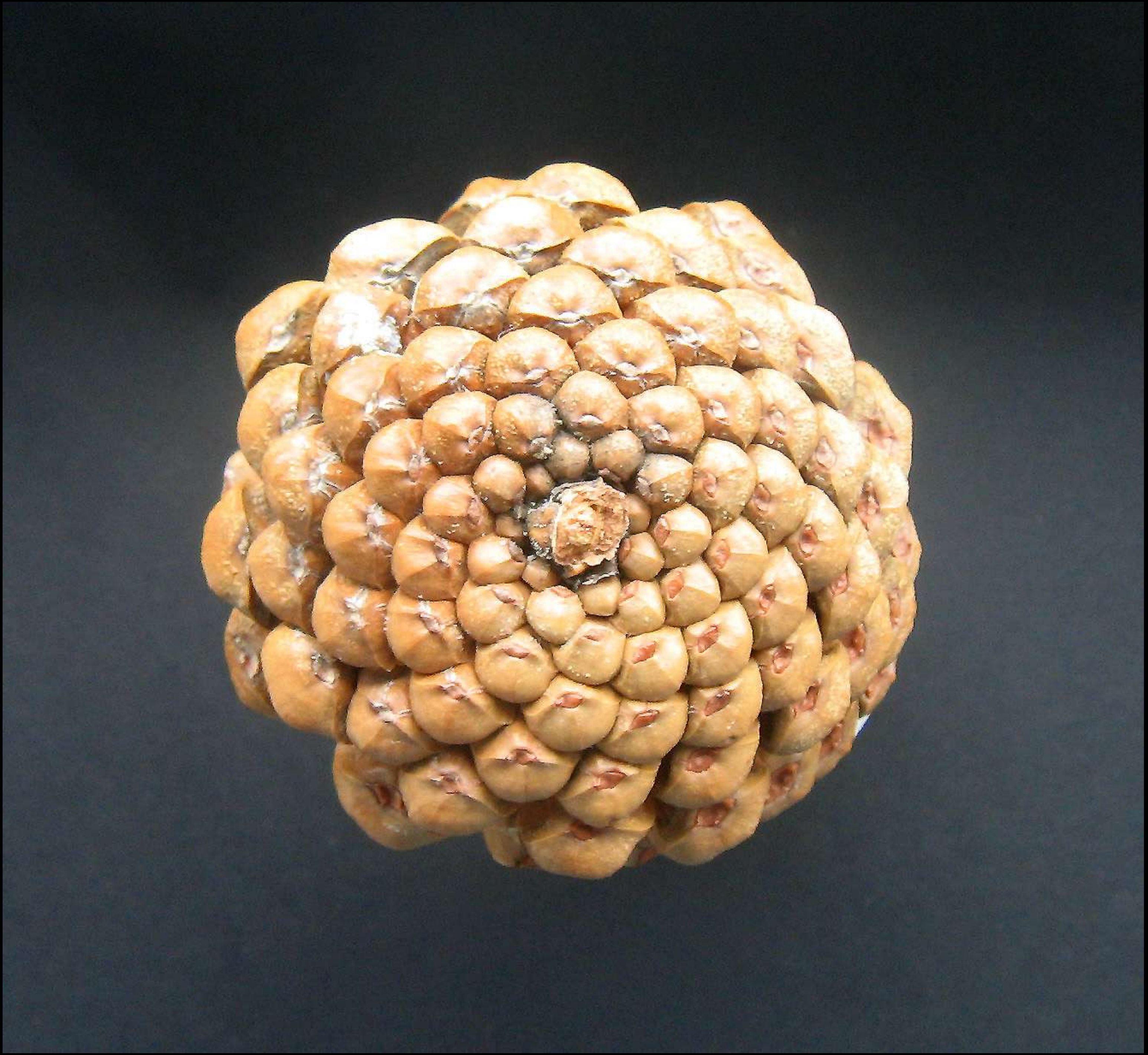
Echinacea purpurea

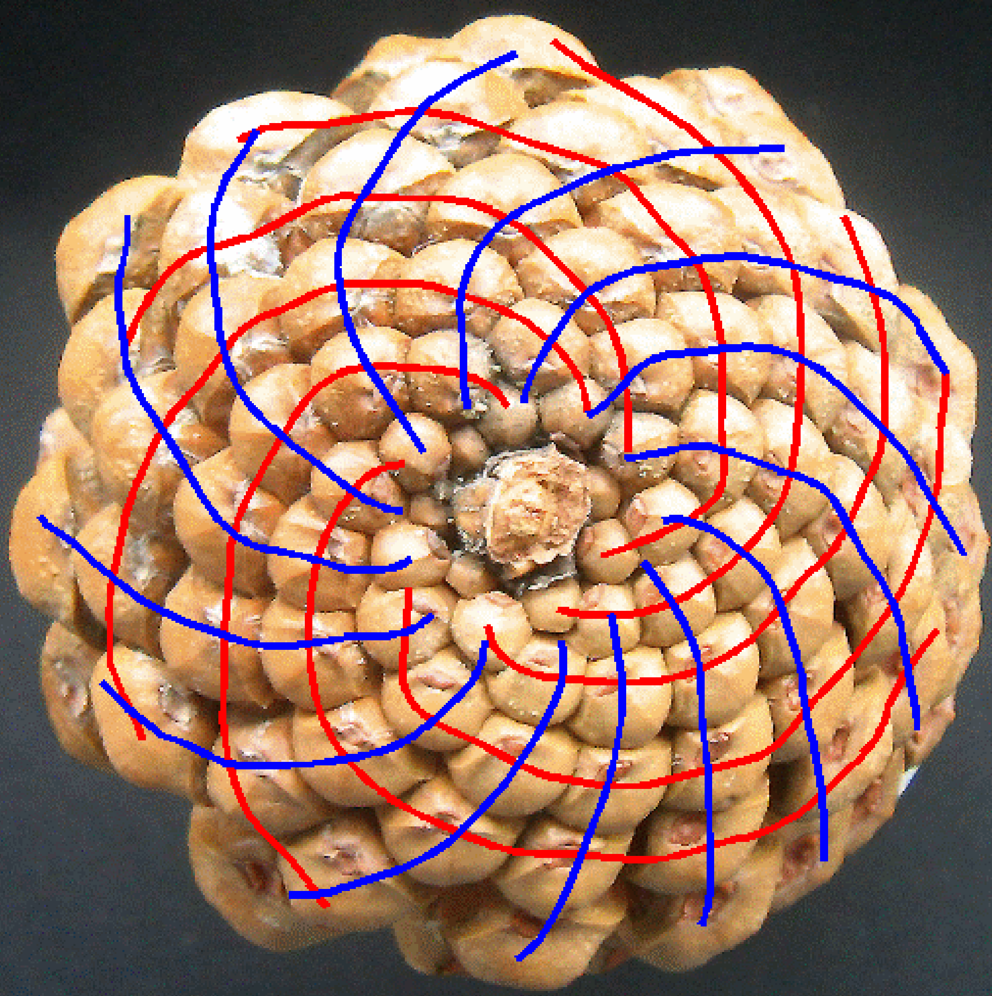




Le spirali orarie sono 55

... le brattee delle pigne...





Le spirali orarie sono 13

Questi numeri:

8 13 … 34 55

non sono casuali: si ritrovano quasi sempre.

Fanno parte di una famosissima successione, i *numeri di Fibonacci*:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 …

in cui ogni numero è la *somma* dei due che lo precedono.

Leonardo Fibonacci (o Leonardo Pisano, 1170–1230) nacque ad Algeri e viaggiò molto per il Mediterraneo.

È soprattutto famoso per aver introdotto in Italia, quindi in Europa, la *numerazione araba* (di origine indiana).

La successione di Fibonacci nasce da un problema di *conigli*, ma ha avuto numerosissime applicazioni nei più diversi rami della matematica.

I conigli di Leonardo

Nel suo *Liber abaci*, Leonardo si pone un problema sulla riproduzione dei conigli, che — com'è noto — sono assai prolifici.

Supponiamo che ogni coppia di conigli produca una nuova coppia ogni mese, e che i nuovi nati comincino a figliare all'età di due mesi.

Se si parte da una sola coppia, quante coppie ci saranno dopo n mesi?

Si può procedere per via pratica:

– all'inizio c'è una sola coppia

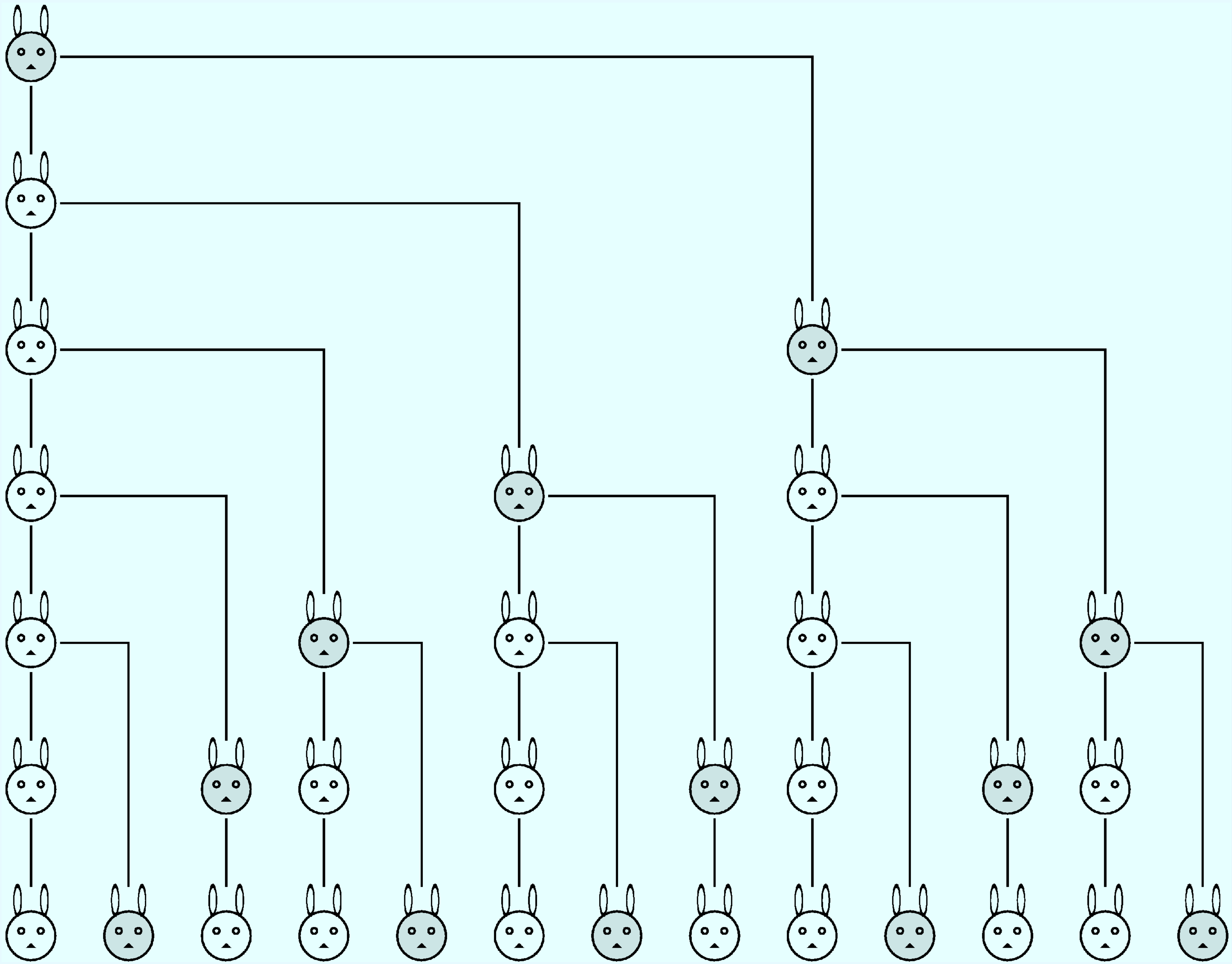
– dopo un mese, c'è ancora una sola coppia

– dopo due mesi, la prima coppia genera una nuova coppia, e sono 2

– al terzo mese, si ha ancora una nuova coppia (solo la coppia originaria è feconda) e siamo a 3

– al quarto mese, anche la seconda coppia partorisce, per cui si aggiungono due nuove coppie, e siamo a 5.

Eccetera...



Una formula...

A questo punto si può indovinare la formula generale.

Se F_n è il numero di coppie della n-ma generazione, si vede che queste consistono di quelle già presenti il mese prima, che sono F_{n-1}, più quelle generate dalle coppie che avevano almeno due mesi di età: queste sono in numero di F_{n-2}. Quindi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,.$$

Dato che $F_0 = F_1 = 1$, troviamo la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

che sono appunto i *numeri di Fibonacci*, conosciuti in tutto il mondo con questo nome.

I numeri crescono rapidamente: per es. $F_{12} = 233$, $F_{24} = 75025$.

Domande e curiosità

La prima domanda è molto naturale: si può trovare una formula per calcolare F_n?

La risposta è affermativa, ma la formula è piuttosto complicata e non ci servirà; quindi la tralascio.

Seconda domanda: senza avere la formula, si può dire qualcosa su come crescono i numeri di Fibonacci?

Proviamo a calcolare i rapporti tra numeri successivi:

1:1 = 1	13:8 = 1,625
2:1 = 2	21:13 = 1,615...
3:2 = 1,5	34:21 = 1,619...
5:3 = 1,(6)	55:34 = 1,617...
8:5 = 1,6	89:55 = 1,618...

Si vede che i rapporti si avvicinano sempre di più tra loro, e si può dimostrare che questo continua indefinitamente. In termini matematici, la successione dei rapporti

1 1,2 1,5 1,(6) 1,6 1,625 1,615... 1,619... 1,617... 1,618...

tende a un limite.

Il limite è

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$$

ed è strettamente imparentato con la *sezione aurea*:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887\ldots$$

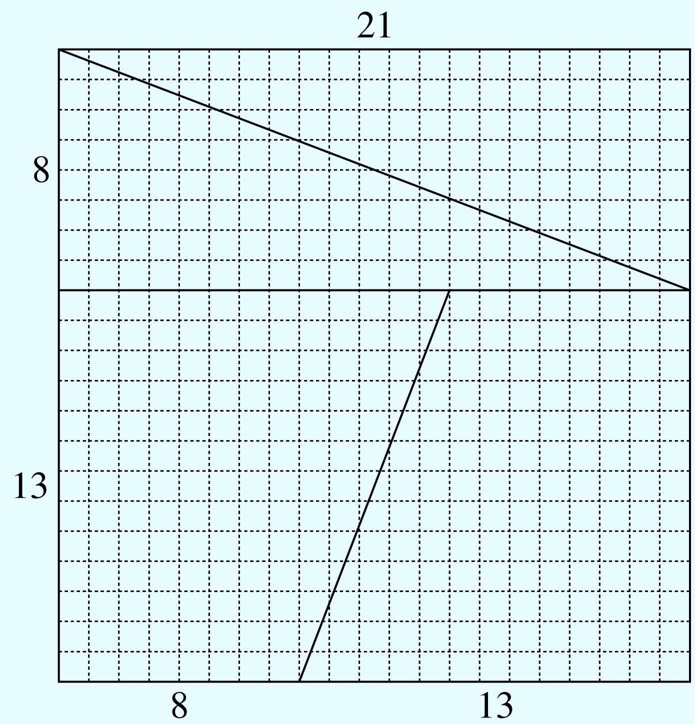
non solo la differenza è 1, come è evidente; anche il loro prodotto vale 1.

Un famoso paradosso geometrico

Il quadrato qui accanto contiene

$21 \times 21 = 441$

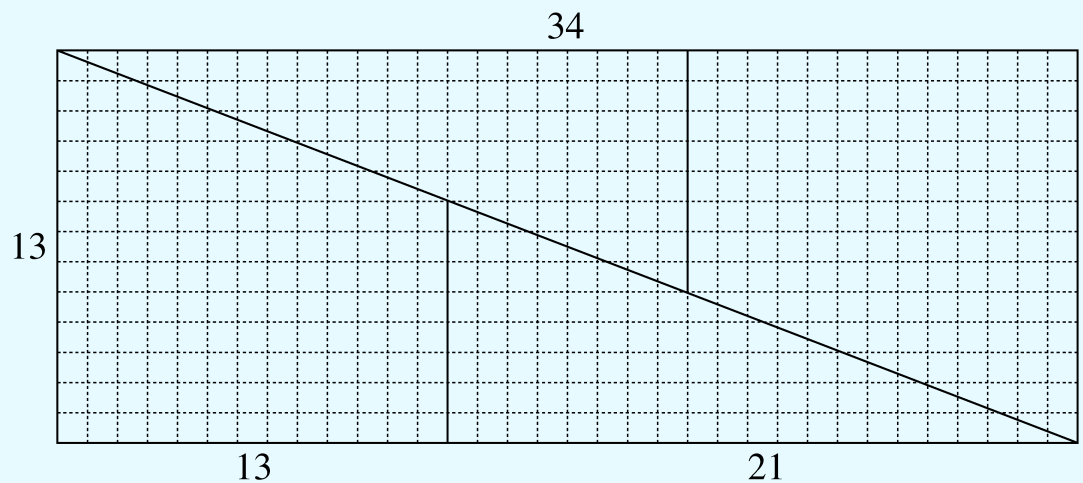
quadratini.



Ritagliando i due triangoli e i due trapezi, si può costruire con questi il rettangolo più sotto, che contiene

$34 \times 13 = 442$

quadratini!



Ma ci sono altri esempi e altre cose da dire sulla *fillotassi*: la disposizione di elementi simili (foglie, rami, petali …) nell'accrescimento di una pianta.

Talvolta la disposizione è molto semplice.

Salvia sclarea – Sclarea

Guardiamo le foglie, non i fiori: sono disposte a due a due lungo il fusto (*opposte*) ma ogni coppia è ruotata di 90° rispetto a quelle inferiore e superiore (*decussate*).

Altre volte invece la disposizione appare piuttosto complicata...

Helianthus annuus – Girasole

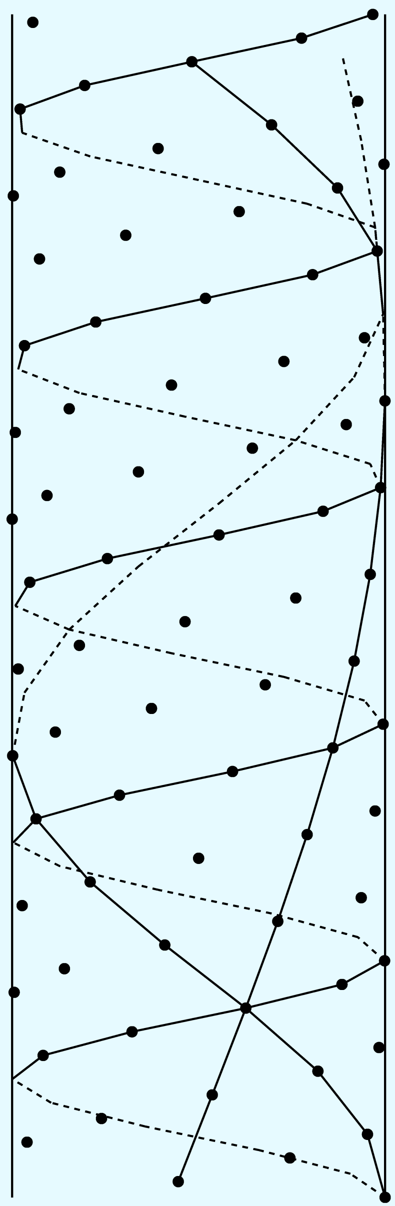
Guardiamo ora queste palme: è evidente la regolarità dell'inserzione delle foglie sui fusti, ma non sembra facile darne una descrizione precisa...

La cosa riesce più facile marcando con dei pallini i centri delle aree d'inserzione delle foglie.

Si vedono dei percorsi elicoidali: due che salgono verso destra e uno verso sinistra.

Si vede anche che ogni pallino è circondato da altri sei.

Il difficile è tradurre tutto questo in uno schema matematico preciso... Ma il problema è stato risolto da tempo.



Purtroppo spiegare come si fa porterebbe via troppo tempo...

Si vede che la corrispondenza non è perfetta, per varie ragioni.

La principale è che dopo tutto la palma non è completamente regolare: infatti il suo accrescimento varia da un anno all'altro, per es. per le variazioni climatiche.

Non c'è un'unica elica che sale verso destra, ma 3 (*parastichie*).

Lo stesso verso sinistra: sono 8.

Ancora i numeri di Fibonacci...

Dobbiamo ancora risolvere due problemi:

– perché i numeri di Fibonacci si ritrovano nelle infiorescenze, e più in generale nella fillotassi?

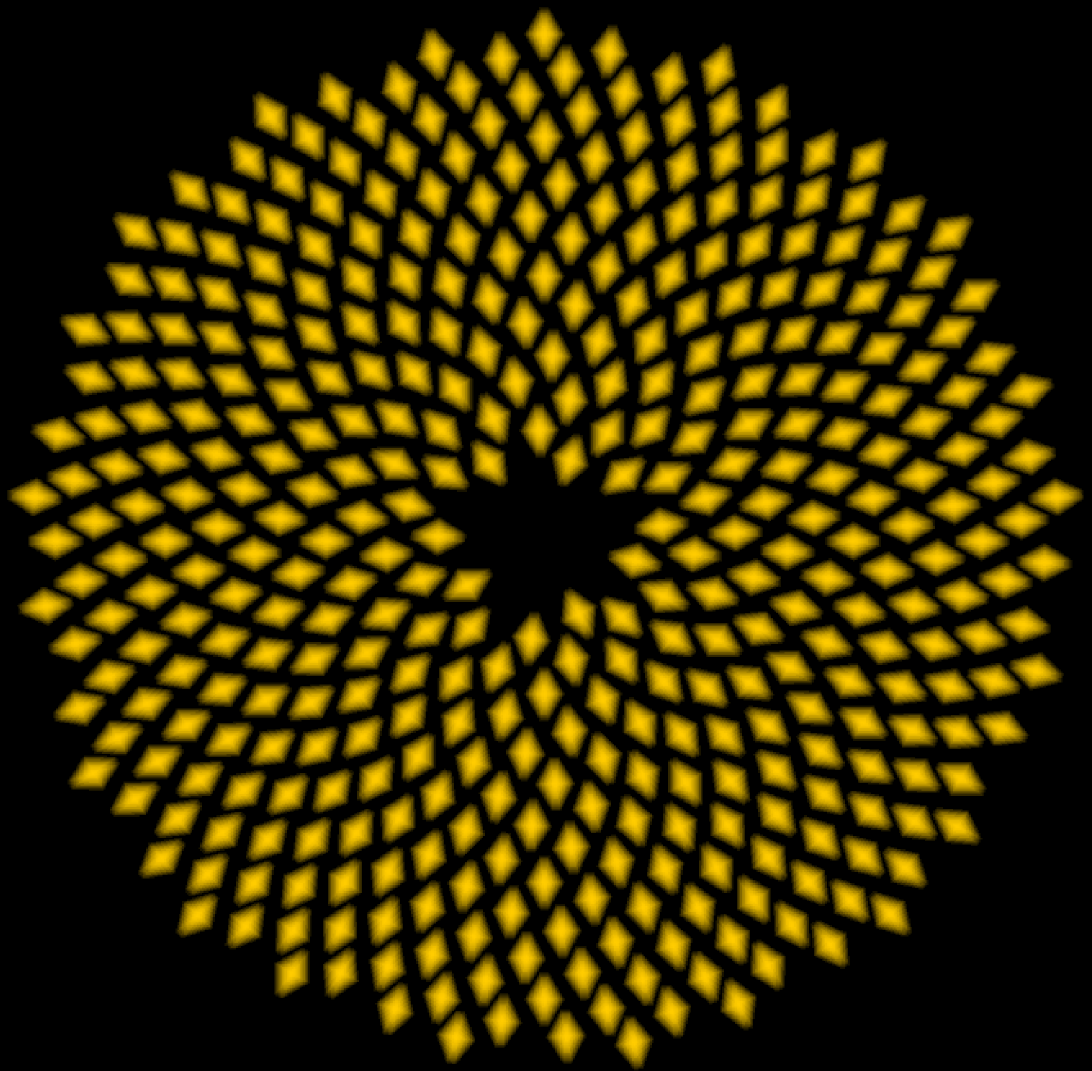
– perché si vedono le spirali?

Molti matematici si sono occupati di questi problemi, ma sembra che ancora non ci sia una risposta sicura.

Tuttavia qualcosa possiamo dire...

A questo scopo, torniamo al girasole “artificiale”.
Quante spirali si vedono?

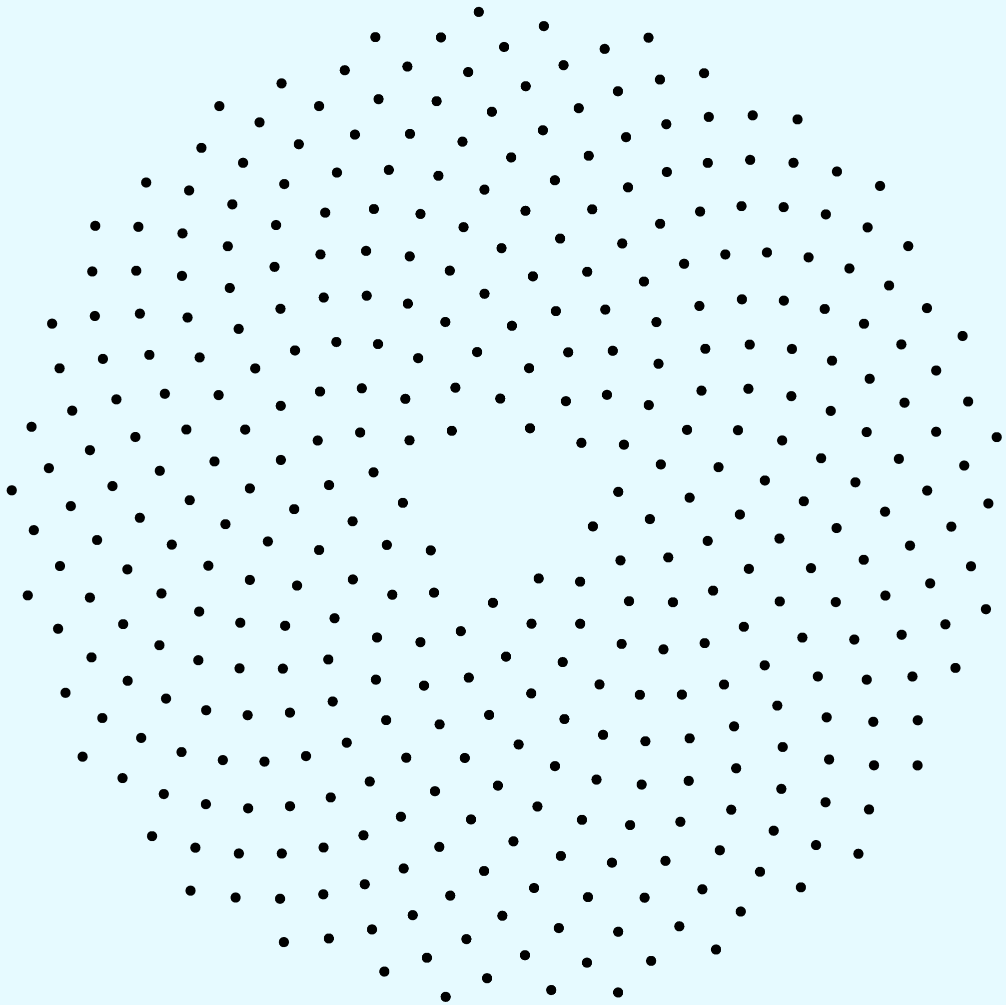
Un "girasole" artificiale …



… costruito con la formula di Vogel

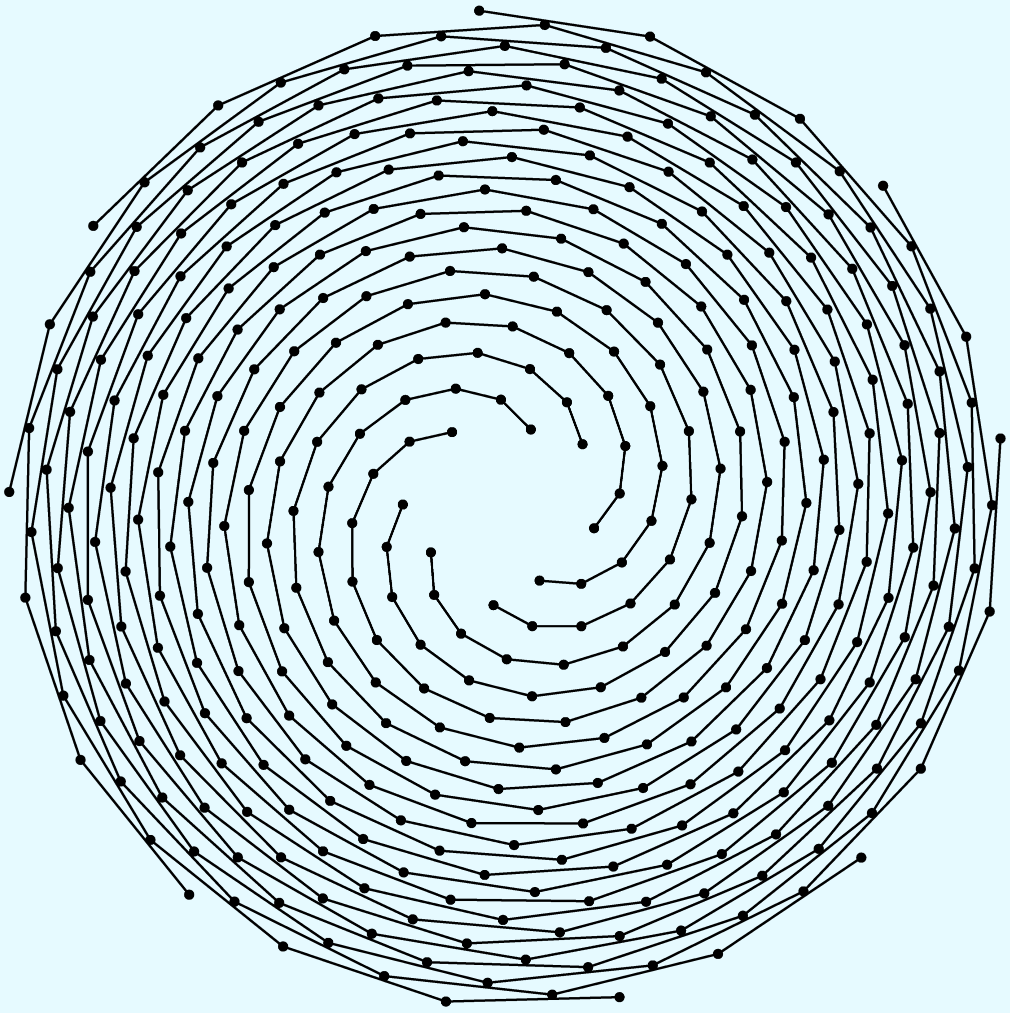
Non è facile rispondere.

Diventa un po' più facile se modifichiamo il disegno.



Ora proviamo a tracciare le spirali...

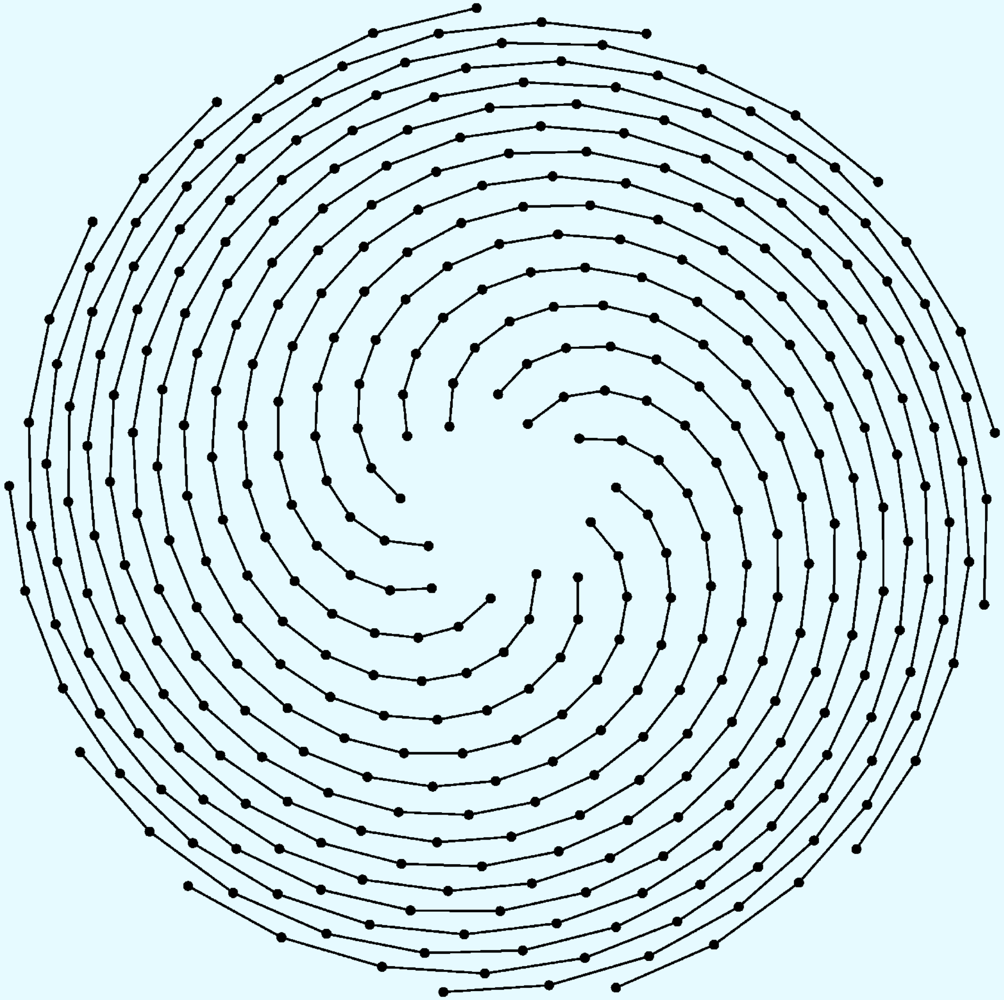
8 spirali



Si vede che 8 spirali vanno bene al centro, ma poi diventano “innaturali”.

Proviamo con 13...

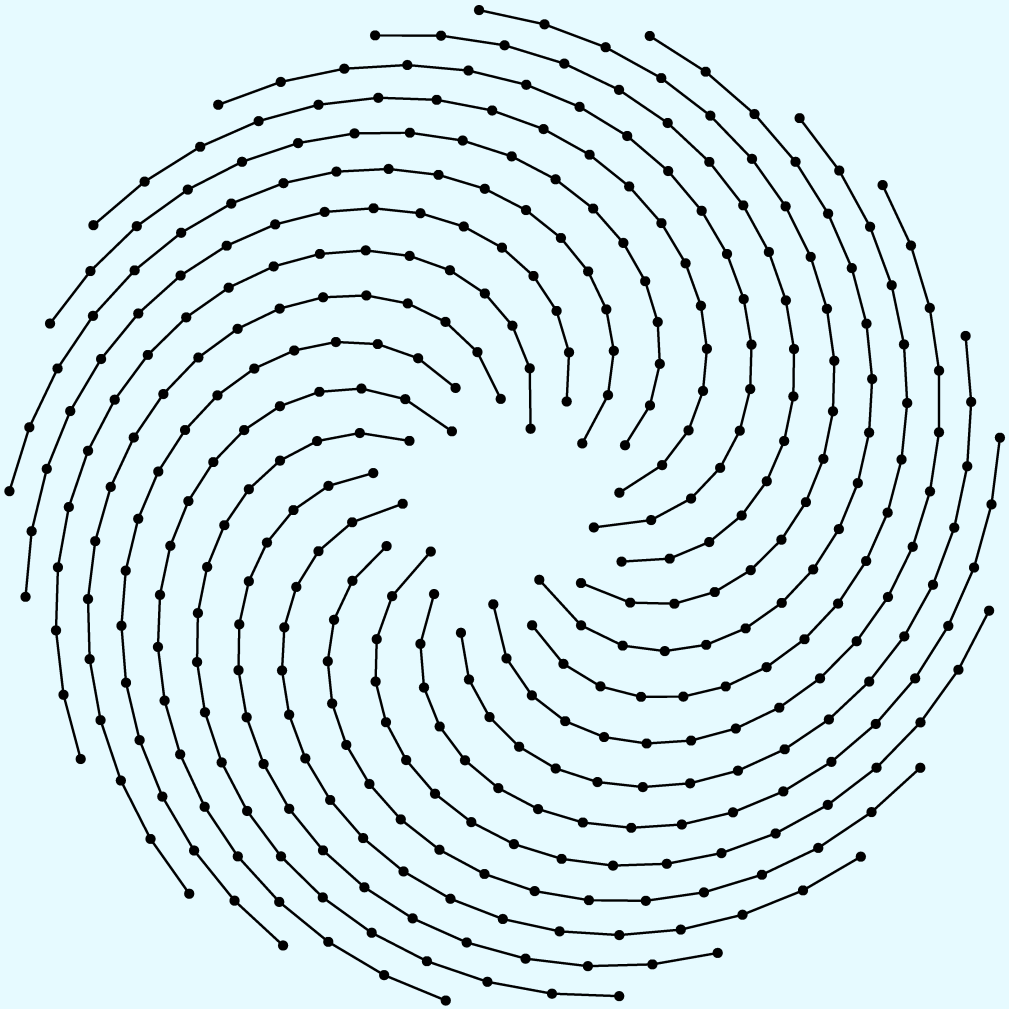
13 spirali



Va un po' meglio, ma solo al centro.

Proviamo 21 spirali...

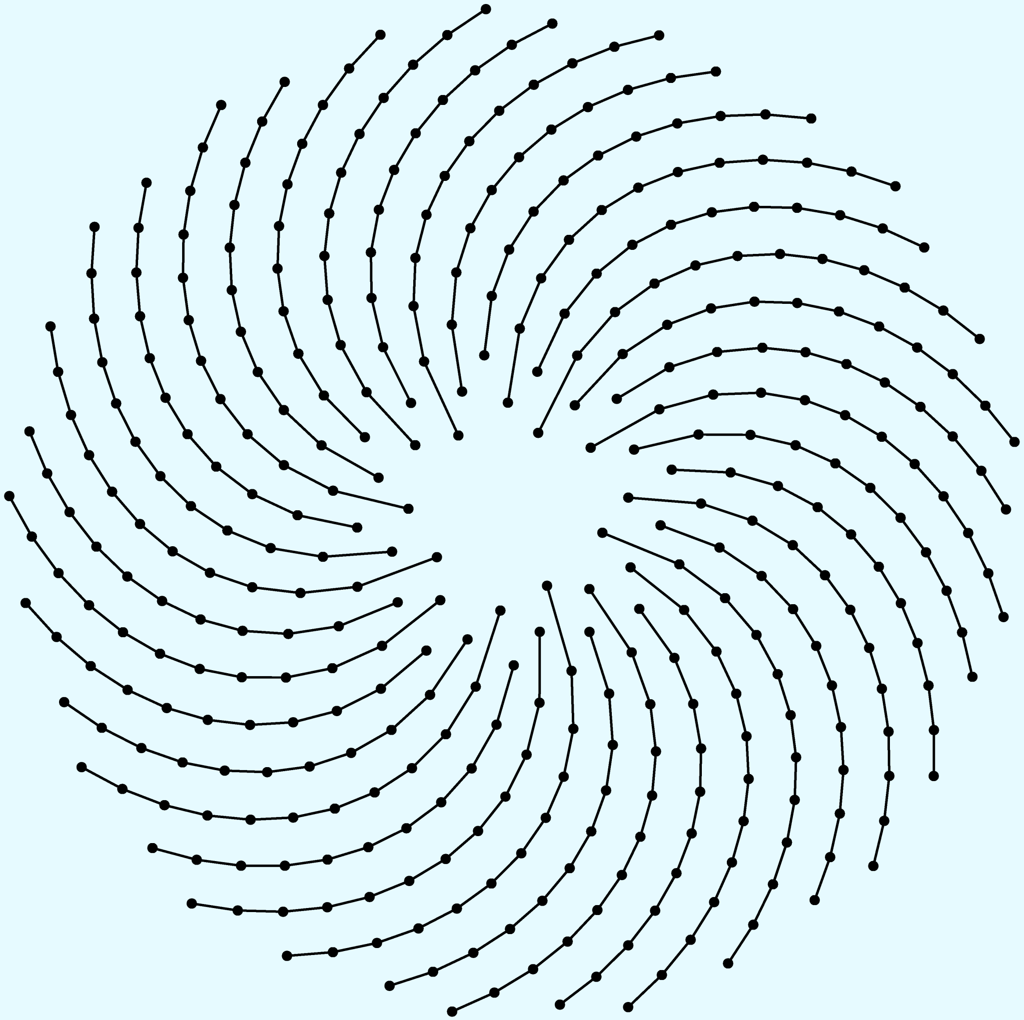
21 spirali



Si vede che 21 spirali vanno piuttosto bene, tranne al bordo esterno.

Proviamo però con 34...

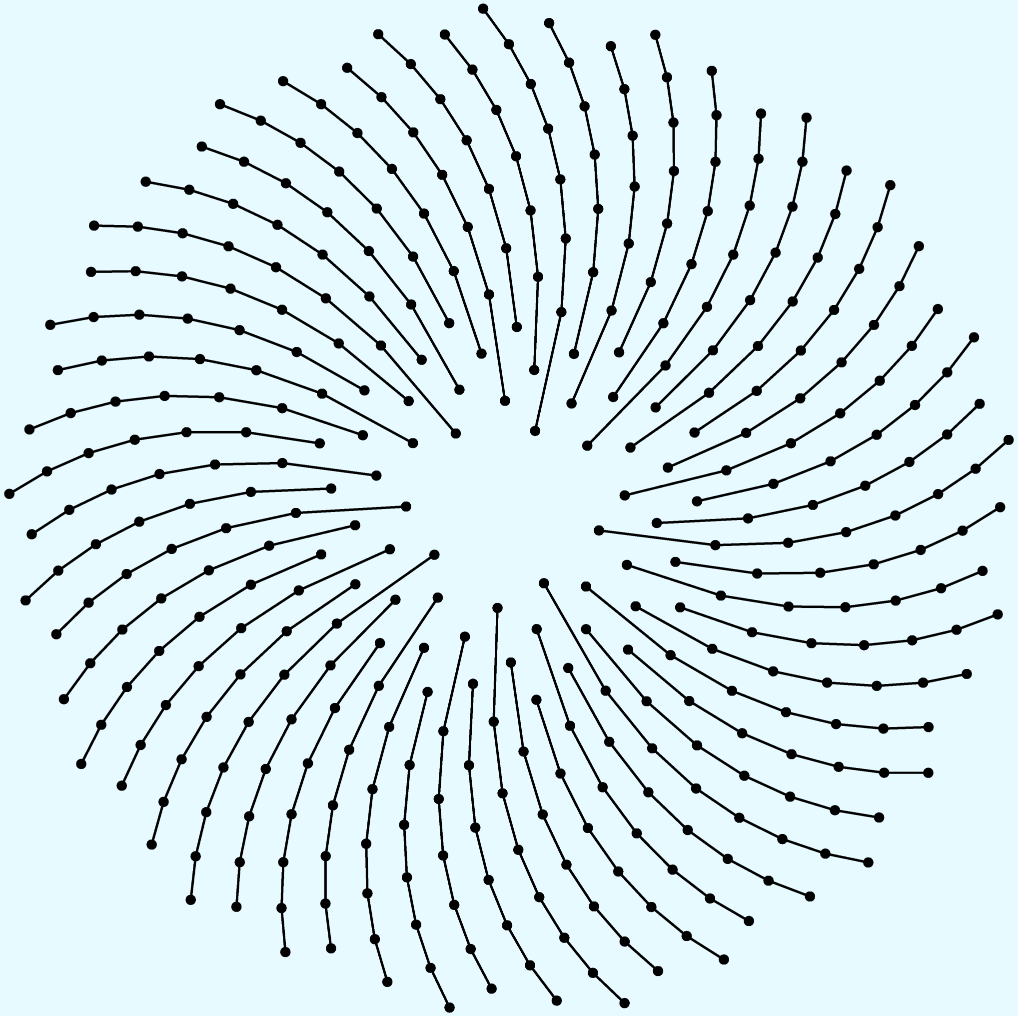
34 spirali



34 spirali sono troppo fitte al centro, mentre vanno bene fino al bordo.

Vediamo come va con 55...

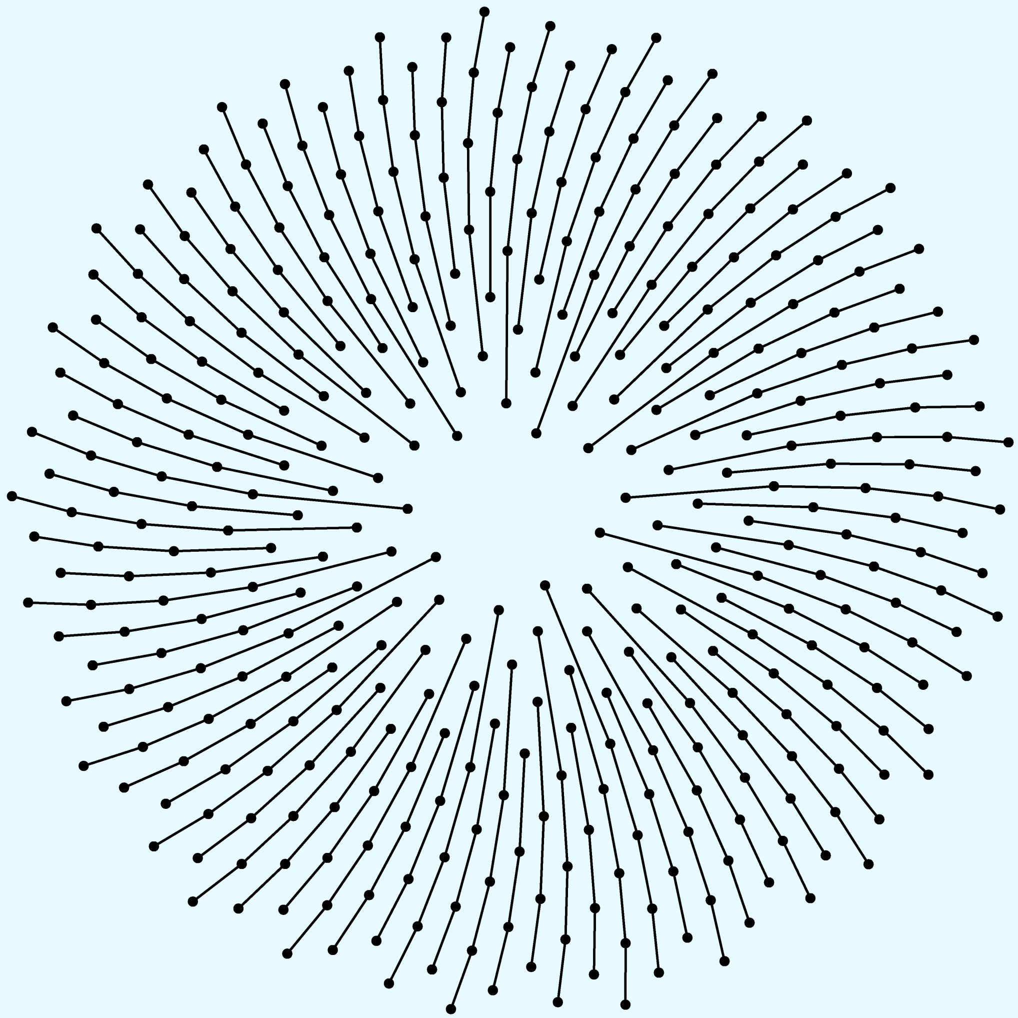
55 spirali



55 spirali vanno bene solo nella parte esterna: al centro sono troppo fitte.

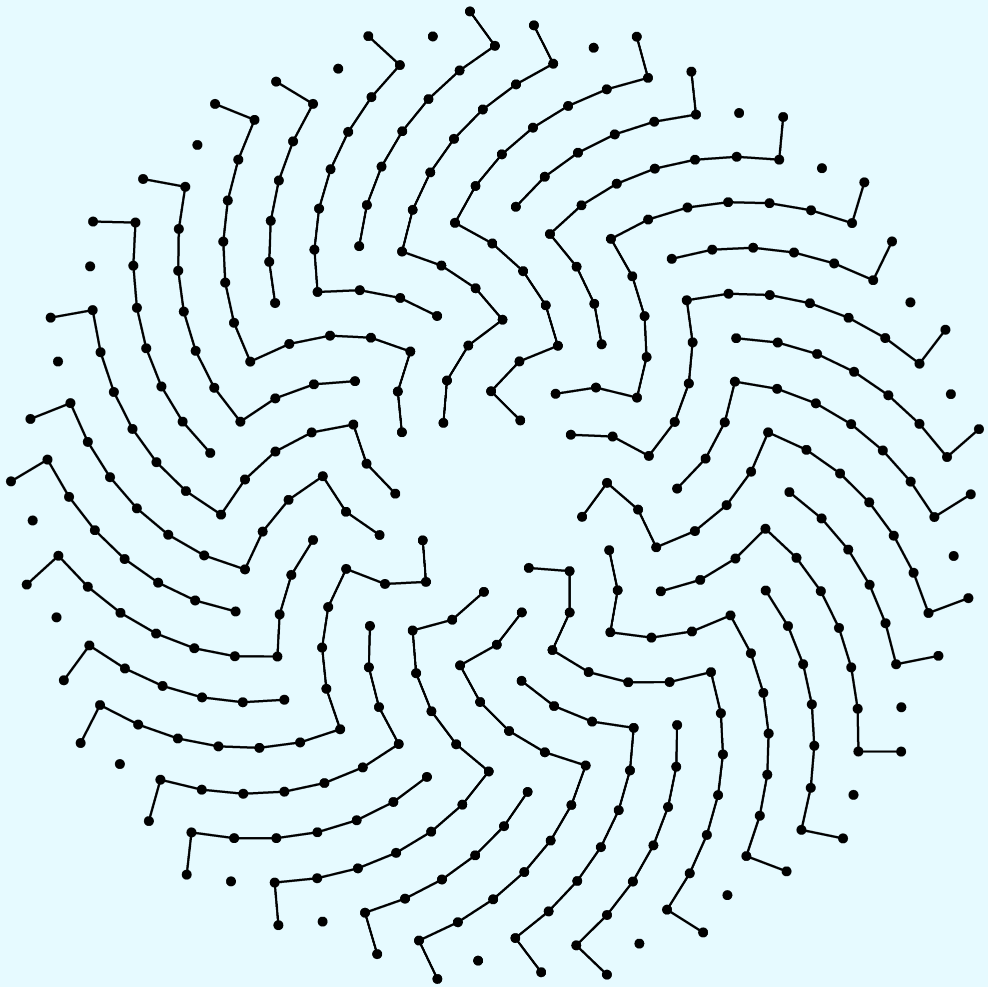
Proviamo comunque anche 89 spirali...

89 spirali

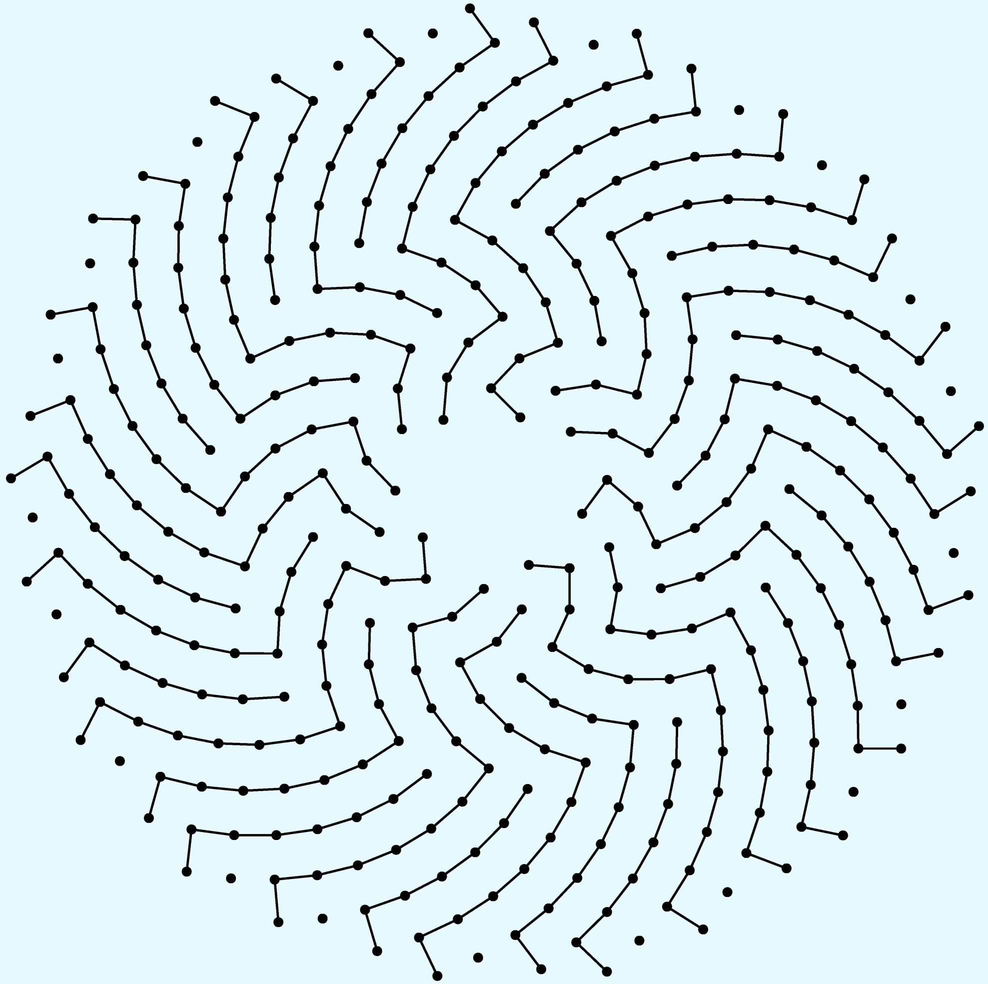


È chiaro che 89 spirali sono troppe: andrebbero bene se il girasole fosse più grande.

Ma che vuol dire troppe? Vediamo che cosa ci dice un programma che “cerca” il punto più vicino...



Dunque le spirali sono un effetto *percettivo*: siamo noi che tendiamo a unire i punti vicini, vedendo una curva che nella realtà non c'è...



Per finire

Non abbiamo ancora risposto a una domanda: perché i numeri di Fibonacci?

Una parte della risposta sta nella proprietà che avevamo vista: la successione dei rapporti F_{n+1}/F_n ha come limite.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$$

che è l'inverso della sezione aurea

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887\ldots$$

Questo però sposta solo il problema:

Perché nello sviluppo delle piante entra in gioco la sezione aurea?

Non credo che la soluzione sia nota.

Si tratta di un tipico problema *interdisciplinare,* che coinvolge da un lato la matematica, dall'altro la fisiologia vegetale (credo).

Ed è noto che i problemi interdisciplinari sono i più difficili da risolvere, perché richiedono competenze diverse, che è raro trovare nella stessa persona.

E anche la collaborazione di più persone è complicata dalla diversità delle conoscenze e dei linguaggi...