Il contributo di Eulero

alla fisica

Un compito impossibile...

Eulero è giustamente famoso come grandissimo matematico; certamente il più grande del 18-mo secolo.

Importanti sono i suoi contributi alla fisica, che anche quantitativamente sono tutt'altro che trascurabili.

Basti pensare che su 73 volumi del suo “opera omnia”, i temi a carattere fisico ne contano almeno 40, se includiamo meccanica e astronomia (che sono quanto meno “a cavallo”).

Impossibile darne conto con qualche completezza nel tempo di cui posso disporre...

Ho scelto perciò di limitarmi a *tre soli temi* che mi sono sembrati particolarmente interessanti, perché mostrano la vastità degli interessi di Eulero, che vanno da questioni di natura fondamentale ad altre decisamente pratiche.

Alla fine mi riprometto di aggiungere, se ci sarà tempo, alcuni commenti di carattere generale.

I tre temi

1. Le equazioni fondamentali della *meccanica dei fluidi*.
2. Il moto dei *corpi rigidi*, con applicazione alla Terra.
3. Un problema di ottica: il *doppietto acromatico*.

I primi due sono ben noti, e le relative equazioni ancor oggi si chiamano "di Eulero".

L'ultimo invece credo sia assai meno conosciuto, e anche per questo merita di essere ricordato.

Le *Lettere a una principessa tedesca*

Intorno al 1760 Eulero aveva ricevuto l'incarico d'istruire in fisica e matematica una figlia del margravio di Brandenburg-Schwedt: *Sofia Federica Carlotta Leopoldina*.

A causa della guerra dei Sette Anni, la famiglia del margravio si rifugiò a Magdeburgo, mentre Eulero rimase a Berlino. Così le lezioni vennero continuate per corrispondenza.

Le 234 lettere, su diversi argomenti di fisica, ma anche di filosofia, scritte tra il 1760 e il 1762, vennero pubblicate ed ebbero grandissimo successo in tutta Europa.

L'esposizione è divulgativa e senza passaggi matematici; ma su molti argomenti sono di notevole completezza e profondità, per cui la lettura è interessante ancor oggi.

Una traduzione italiana è uscita di recente da Bollati-Boringhieri.

La meccanica dei fluidi

In questo caso il mio compito è semplice, perché l'impostazione di Eulero è esattamente quella che viene seguita ancor oggi: non occorre quindi descriverla in dettaglio.

Basta delinearne gli aspetti essenziali:

1) Il fluido (liquido, gas) viene trattato come un *mezzo continuo*.

2) Il suo moto è descritto da un campo di velocità: è quello che si chiama il *punto di vista euleriano*. In notazione moderna:

$$\vec{v}(x, y, z, t).$$

Ovviamente Eulero non usa i vettori, che sarebbero stati introdotti quasi 150 anni dopo, ma scrive le tre componenti cartesiane.

La velocità del fluido è funzione del punto, e anche del tempo, se il moto non è stazionario.

3) L'*accelerazione* (variazione di velocità nel tempo) ha *due cause*:

a) la velocità in un punto fisso *varia nel tempo*

b) la velocità varia perché l'elemento di materia *cambia posizione*.

Ne segue per la componente *x* dell'accelerazione:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\, v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\, v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\, v_z$$

e analoghe per le altre componenti.

4) La pressione è descritta da un *campo scalare*:

$$p(x, y, z, t).$$

Eulero calcola quindi la forza agente sull'elemento di volume *dV*:

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\, dV$$

e analoghe.

5) Non resta che usare $\vec{F} = m\,\vec{a}$ per arrivare a

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\, v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\, v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\, v_z = -\frac{1}{\varrho}\, \frac{\partial p}{\partial x}$$

che è appunto l'*equazione di Eulero* per il moto di un fluido *ideale* (niente viscosità) in assenza di *forze esterne*.

Il campo scalare $\varrho(x, y, z, t)$ è la *densità* del fluido.

Su questo tema c'è solo da aggiungere che Eulero scrive anche l'*equazione di continuità* (conservazione della massa) nell'esatta forma che conosciamo:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_z) = 0.$$

In realtà la notazione di Eulero è un po' diversa: il simbolo di derivata parziale non esisteva ancora...

$$\frac{dq}{dt} + \frac{dqu}{dx} + \frac{dqv}{dy} + \frac{dqw}{dz} = 0.$$

Commento

La dinamica euleriana dei fluidi ha i seguenti caratteri innovativi, dal punto di vista della fisica:

– applica le leggi delle meccanica newtoniana a un *sistema continuo*; anzi, introduce in fisica i sistemi continui, come *oggetto di studio matematico*

– a questo scopo fa uso sistematico del concetto di *campo* (scalare e vettoriale, funzione $R^3 \to R$ oppure $R^3 \to R^3$).

Interessante anche notare che i ragionamenti di Eulero, basati su *elementi di volume e di superficie*, sono gli stessi che i fisici seguono *ancor oggi*.

Il moto dei corpi rigidi

Eulero fonda la dinamica del corpo rigido, basandosi su un'idea centrale: che la cosa più semplice sia scrivere le equazioni del moto rispetto a una terna *solidale al corpo*.

Più esattamente, una *terna centrale d'inerzia*: origine nel *centro di massa*, assi orientati come gli *assi principali d'inerzia*.

Siano $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ i versori di una terna principale d'inerzia; A, B, C i corrispondenti momenti d'inerzia; p, q, r le componenti della velocità angolare $\vec{\omega}$.

Eulero dimostra che valgono le equazioni

$$A\,\frac{dp}{dt} = (B-C)\,q\,r + M_i$$

$$B\,\frac{dq}{dt} = (C-A)\,p\,r + M_j$$

$$C\,\frac{dr}{dt} = (A-B)\,p\,q + M_k\,.$$

$M_i\,, M_j\,, M_k$ sono le componenti del *momento risultante* delle forze esterne rispetto al centro di massa.

Queste sono (ovviamente!) le *equazioni di Eulero* per il moto di un corpo rigido.

In realtà Eulero le scrive in modo parecchio diverso:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} . yz\,dt = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb} . xz\,dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc} . xy\,dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc}$$

ma una volta interpretati i simboli, si vede che sono proprio *le stesse equazioni* che si trovano su tutti i testi moderni.

Il moto del Polo

L'applicazione più importante di queste equazioni sta nella scoperta del *moto dei poli* della Terra.

A metà del '700 il problema della *forma della Terra*, che aveva fatto assai discutere fisici, matematici, astronomi qualche decennio prima, era ormai risolto: la Terra è *schiacciata ai poli*.

Lo schiacciamento era stato misurato, ed era anche stata verificata la correttezza della teoria newtoniana della *precessione degli equinozi*.

A causa dello *schiacciamento*, e dell'*interazione gravitazionale* col Sole e con la Luna, l'asse di rotazione della Terra *non conserva orientamento costante* nello spazio, ma descrive un cono con un periodo di quasi 26000 anni.

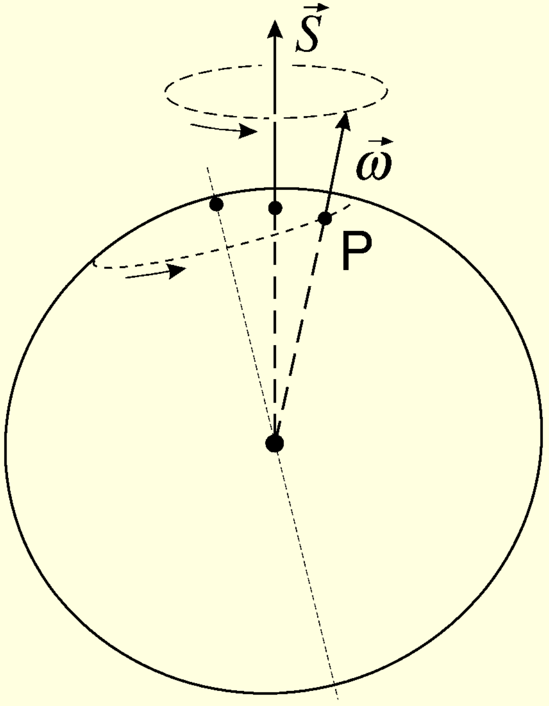
Detto in termini moderni, il momento angolare $\vec{S}$ della Terra rispetto al suo centro di massa *non è una costante del moto*.

Detto in termini moderni, il momento angolare $\vec{S}$ della Terra rispetto al suo centro di massa *non è una costante del moto*.

Ma lo sarebbe se la Terra fosse isolata nello spazio: niente Sole e Luna...

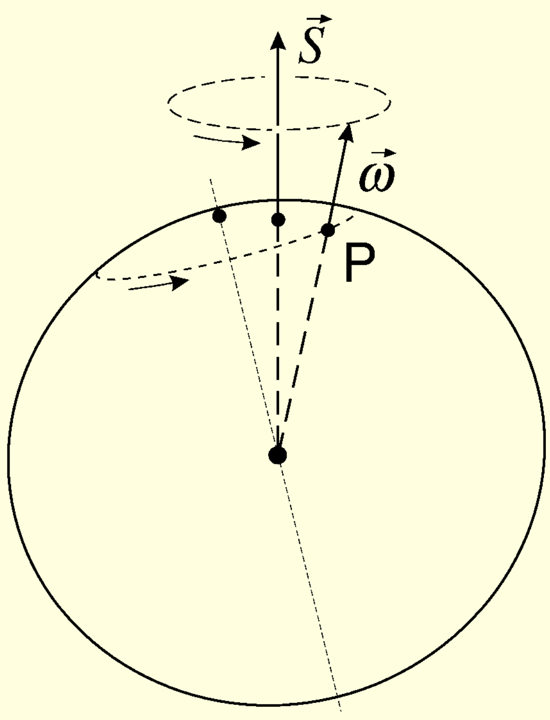
Si dava allora per scontato che in tali ipotesi l'*asse di rotazione* avrebbe dovuto coincidere con l'*asse di figura* della Terra (che allora era ritenuta un *ellissoide di rotazione*).

Eulero dimostra che la situazione in generale può essere più complicata: i tre vettori $\vec{k}, \vec{\omega}, \vec{S}$ non hanno la stessa direzione, ma sono soltanto *complanari*. Dei tre, soltanto $\vec{S}$ è costante, mentre gli altri due ruotano mantenendo costanti gli angoli.



Di conseguenza il punto P, che è il *vero Polo Nord*, ossia il punto in cui l'*asse istantaneo di rotazione* interseca la superficie terrestre, descrive una circonferenza intorno all'asse di simmetria della Terra.

Dalla teoria di Eulero si ricava anche il periodo del moto: in giorni siderali vale $A / (C - A) \simeq$ 305. Questo si chiama ... “periodo di Eulero”.



Dalla teoria alla realtà

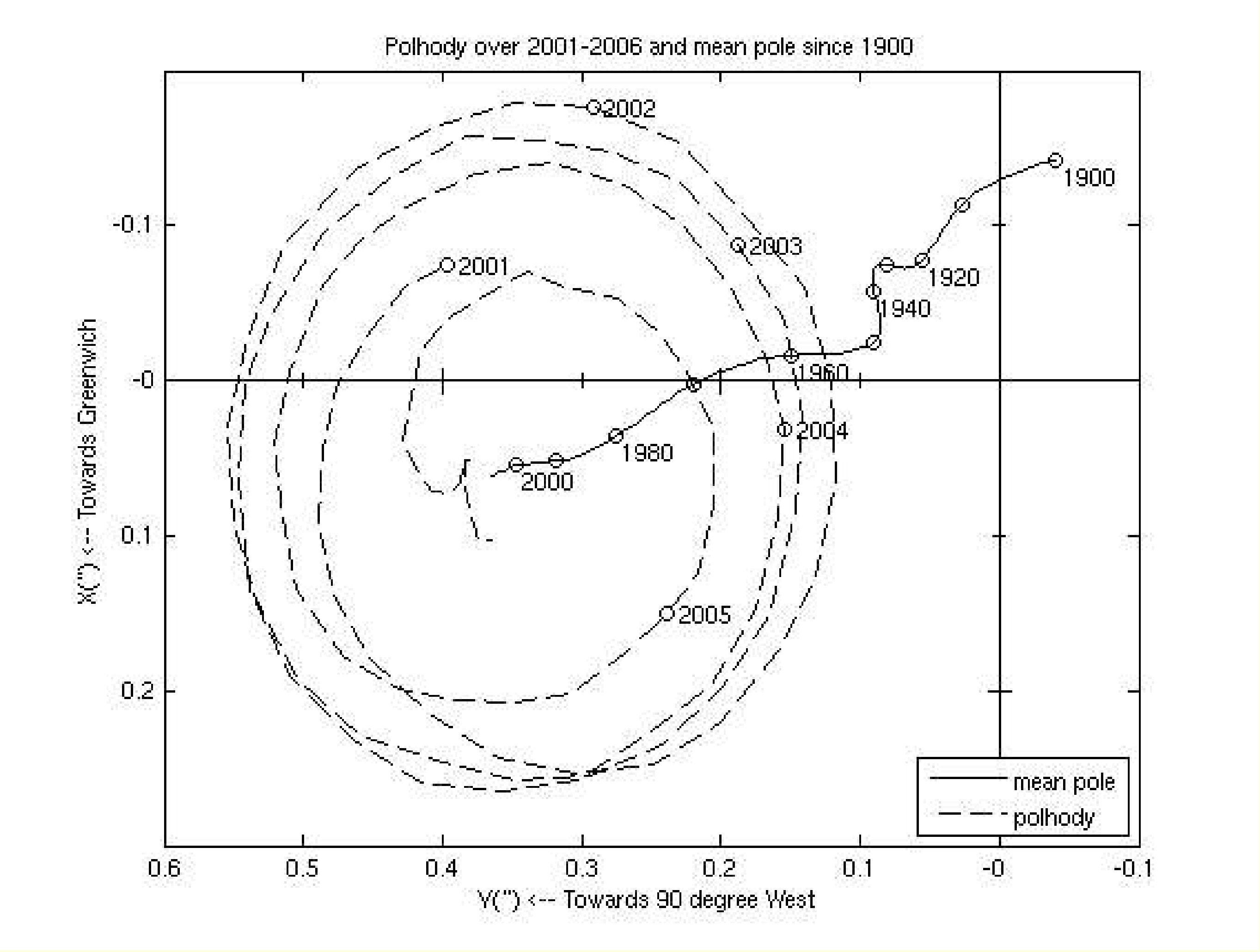
Come si può osservare il moto del polo?

Il modo più semplice è questo: se il polo si sposta sulla superficie della Terra, un punto *fisso* su di essa mostrerà una *latitudine variabile nel tempo*.

La prima osservazione fu fatta da Brioschi, all'Osservatorio di Capodimonte, nel 1820.

L'osservazione fu poi confermata da Bessel e da Airy. Si deve però arrivare alla fine del secolo per avere osservazioni concordi e sufficientemente accurate.

Nel 1898 vengono istituite una serie di stazioni dedicate allo scopo: una si trova a Carloforte. Risultato: il moto del polo è confermato senza alcun dubbio; il diametro della “circonferenza” è vicino a 15 metri.



Il problema sta nel periodo, che *non torna affatto* con quello previsto da Eulero, ma è *parecchio più lungo*: circa 420 giorni siderali (*periodo di Chandler*) anziché 305.

Forse Eulero aveva sbagliato i calcoli?

La risposta viene data da Newcomb e Love: la teoria di Eulero suppone una Terra *rigida*. Se si tiene conto che lo spostamento dell'asse di rotazione implica anche una *deformazione elastica*, si spiega l'allungamento e il periodo osservato *torna anche quantitativamente*.

I cannocchiali e l'aberrazione cromatica

Un grave ostacolo alla costruzione di un buon cannocchiale sta nella *dispersione* della luce, ossia nel fatto che l'*indice di rifrazione* di qualsiasi mezzo *varia con la lunghezza d'onda*.

La conseguenza è che la lunghezza focale di una lente è diversa per le diverse lunghezze d'onda, e quindi *non è possibile mettere a fuoco* con un cannocchiale allo stesso tempo *i diversi colori* della luce emessa da un oggetto: gli oggetti osservati appaiono così dotati di un *alone colorato*.

Questo effetto prende il nome di *aberrazione cromatica*.

Da alcune misure Newton concluse che tutti i mezzi presentano la stessa dispersione, il che — se fosse vero — renderebbe *impossibile* correggere l'aberrazione cromatica.

L'autorità di Newton era tale che per molto tempo la sua affermazione fu accettata senza discussione.

Ciò posto, l'unico modo per mantenere in limiti tollerabili l'aberrazione cromatica era di realizzare obiettivi il cui *diametro* fosse *molto piccolo* rispetto alla focale; e non in proporzione diretta: la *focale* doveva crescere come il *quadrato del diametro* della lente obiettivo.

In tal modo diventava *impossibile* la realizzazione di *telescopi di grande apertura*, e anche i *cannocchiali terrestri*, per es. per uso marino, erano *scomodamente lunghi*.

Per questo motivo Newton abbandonò le lenti, e inventò il *telescopio a riflessione*.

Nel 1747 *Eulero contesta* la tesi di *Newton*, senza però avere basi sperimentali.

Un espertissimo ottico inglese, *Dollond*, lo confuta e *appoggia Newton*.

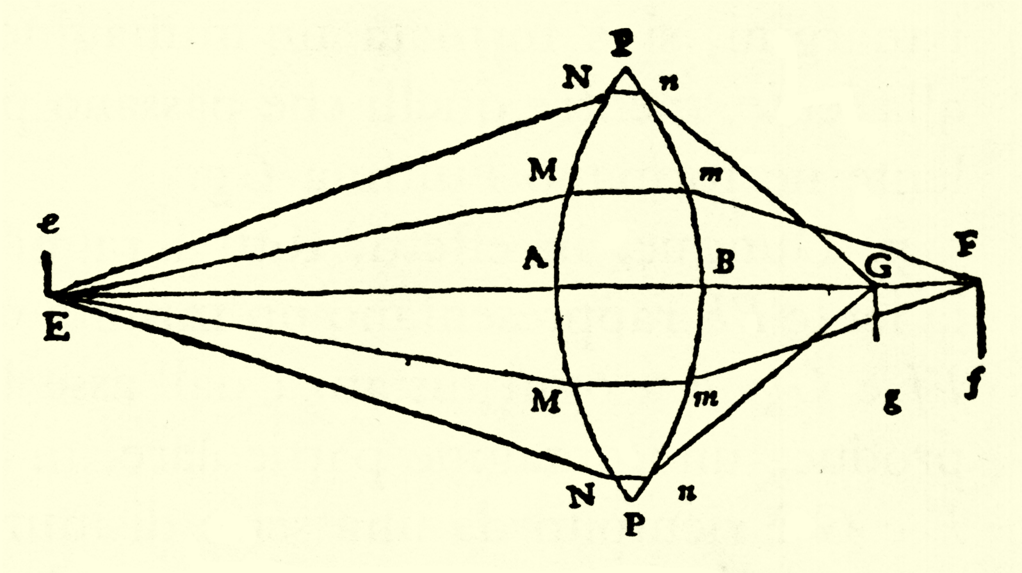
Eulero replica, interviene Klingenstierna, svedese, e finalmente Dollond ripete con più cura le misure di Newton e trova che in realtà una *differenza di dispersione* tra vetro e acqua *esiste*.

Si apre in tal modo la possibilità di *correggere l'aberrazione cromatica* mediante un *obiettivo composto.*

L'aberrazione sferica

Un'altra difficoltà nella realizzazione di cannocchiali di grande apertura consiste nell'*aberrazione sferica*: per lenti di diametro finito *non è vero* che tutti i raggi che provengono da una sorgente puntiforme posta sull'asse convergano in uno stesso punto (*immagine reale* della sorgente).

Ciò è vero solo approssimativamente, per lenti di piccola apertura.



La conseguenza è quella che Eulero chiama "confusione": per tenerla in limiti tollerabili occorre ancora una volta usare lenti di piccola apertura, e la situazione peggiora *molto rapidamente* al crescere della focale.

Nella sua *Dioptrica* Eulero mostra come si possa eliminare (all'ordine più basso) l'aberrazione sferica usando un *obiettivo composto* da due lenti: una convergente e una divergente.

Mostra anche che disponendo di vetri adatti lo stesso *doppietto* può correggere insieme le *due aberrazioni*: cromatica e sferica.

Il problema del flint

In pratica però si presentava un'ulteriore difficoltà.

Ecco cosa dice Eulero nella *Lettera* 215:

Ne detti le prime idee molti anni fa, e da allora i più esperti artigiani, in Inghilterra e in Francia, lavorano nel tentativo di realizzarli [...]

L'anno passato però, la Società delle Scienze di Londra ha annunciato che un abilissimo artigiano di nome Dollond, ne era venuto facilmente a capo [...]

Ma qual era il problema?

Nient'altro che la fabbricazione di un vetro con le qualità adatte: quello poi universalmente noto come “flint”.

Di fatto la *ricetta* per avere un buon flint rimase a lungo *segreto* della famiglia Dollond, nonostante i tentativi di “spionaggio industriale” messi in opera dei francesi.

Non bisogna infatti dimenticare il *valore commerciale e militare* che aveva il possesso di buoni cannocchiali marini...

Sembra che almeno in parte il vantaggio inglese derivasse dall'uso, per alimentare i crogioli, di *carbon fossile* al posto del *carbone di legna*; uso dovuto a sua volta all'estesa deforestazione della Gran Bretagna...

Un “genio conservatore”, o il primo fisico teorico?

È assai difficile racchiudere una personalità ricca e complessa come quella di Eulero in una definizione.

Le due che ho messo nel titolo potrebbero applicarsi entrambe per certi versi, anche se sono quasi contradditorie...

Per un verso, Eulero *introduce idee nuove*, come nella dinamica dei fluidi e dei corpi rigidi, nell'elasticità, nelle onde (acustica).

Dà una base solida all'uso dei *principi variazionali*, di cui è inutile sottlineare la larghissima applicazione in fisica, anche ai nostri tempi.

Si può dire che con lui nasce la *fisica matematica*, ma meglio sarebbe dire la *fisica teorica*; nel senso di una fisica solidamente fondata su basi matematiche, ma senza la *minima preoccupazione di rigore*: quello che conta è arrivare ai risultati.

Forse per questo, ci sono fisici che guardano a Eulero con una certa *nostalgia*: come al rappresentante, anzi al modello, di una matematica assai più vicina al modo di pensare e alle esigenze dei fisici che non quella dell'ultimo secolo.

D'altra parte Eulero è indiscutibilmente un *genio*, però con un fondo *conservatore*.

Non partecipa alle ricerche, allora in corso, sulla natura del calore o dell'elettricità: condivide l'idea dell'elettricità come fluido, ma senza discuterne.

Accetta la meccanica newtoniana, anzi l'approfondisce e la precisa dal punto di vista matematico: è forse il primo che scrive $\vec{F} = m\,\vec{a}$.

Però in materia di luce e di gravità sta dalla parte di *Cartesio*, contro *Newton*.

In generale, tende più a sviluppare *teorie esistenti*, facendo uso della sua straordinaria abilità matematica, che non a proporre *nuove leggi*, *nuovi principi*.