E. Fabri *settembre 2010*

Geodetiche radiali nella metrica di Kruskal–Szekeres

Definizioni

In unità con $2M = 1$ le trasformazioni di coordinate da Schwarzschild a Kruskal–Szekeres sono

$$\begin{aligned} u &= e^{r/2}\sqrt{|r-1|}\,\cosh\frac{t}{2} \\ v &= e^{r/2}\sqrt{|r-1|}\,\sinh\frac{t}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

valide per $r > 1$ ($u > |v|$). Altrimenti u e v si scambiano.

Sono interessato alle geodetiche di tipo tempo, e in particolare a quelle in cui r ha un massimo R: grave lanciato verso l'alto e che ricade. Non è una restrizione assumere che il punto di massima r si abbia per $t = 0$: tutte le altre geodetiche si ottengono con una traslazione in t.

Si definisce la variabile ausiliaria ξ per mezzo di

$$r = \tfrac{1}{2}\,R\,(1 + \cos 2\xi) = R\,\cos^2\xi \qquad (-\pi/2 < \xi < \pi/2). \tag{2}$$

L'ambiguità di segno in ξ si risolve prendendo $\xi < 0$ nella salita, $\xi > 0$ nella discesa.

Equazioni parametriche delle geodetiche

Si ottengono usando le costanti del moto (v. appunti) e si trova:

$$\tau = R^{3/2}\,(\xi + \tfrac{1}{2}\sin 2\xi) \tag{3}$$

$$t = q\left[(R+2)\,\xi + \tfrac{1}{2}R\,\sin 2\xi\right] + \ln\left|\frac{q + \operatorname{tg}\xi}{q - \operatorname{tg}\xi}\right|$$

dove $q = \sqrt{R-1}$.

Calcoliamo $r - 1$:

$$r - 1 = (q\,\cos\xi - \sin\xi)(q\,\cos\xi + \sin\xi)$$

da cui si vede che sarà $r > 1$ se $|\operatorname{tg}\xi| < q$, mentre sarà $r < 1$ se $\operatorname{tg}\xi < -q$ o se $\operatorname{tg}\xi > q$. Il primo caso però non si presenta, perché corrisponderebbe alla salita dalla singolarità all'orizzonte.

Conviene ancora porre

$$S_\pm = q\,\cos\xi \pm \sin\xi$$

e si vede che è sempre $S_+ > 0$, mentre S_- ha il segno di $r-1$. Anzi, abbiamo

$$r - 1 = S_+ S_-.$$

Altra abbreviazione utile:

$$Q = \tfrac{1}{2}\, q \left[(R+2)\,\xi + \tfrac{1}{2} R \sin 2\xi\right].$$

Sostituendo tutto nelle (1), troviamo

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\, e^{r/2} \left(S_+\, e^{Q} + S_-\, e^{-Q}\right) = e^{r/2} \left(q \cosh Q \cos\xi + \sinh Q \sin\xi\right) \\ v &= \tfrac{1}{2}\, e^{r/2} \left(S_+\, e^{Q} - S_-\, e^{-Q}\right) = e^{r/2} \left(q \sinh Q \cos\xi + \cosh Q \sin\xi\right) \end{aligned} \tag{4}$$

valide anche per $r < 1$.

Il redshift gravitazionale

Un corpo che cade seguendo la geodetica con $R = R_{\mathrm{e}}$ invia un segnale e.m. a un secondo corpo, che segue la geodetica con $R = R_{\mathrm{r}}$ ($R_{\mathrm{r}} > R_{\mathrm{e}}$). Quale sarà il rapporto tra le lunghezze d'onda emessa e ricevuta?

Dato che $R_{\mathrm{r}} > R_{\mathrm{e}}$, il segnale si propaga mantenendo $u - v$ costante. Se $(u_{\mathrm{e}}, v_{\mathrm{e}})$ sono le coordinate dell'evento E di emissione dell'inizio di un treno d'onda monocromatica, $(u_{\mathrm{r}}, v_{\mathrm{r}})$ quelle dell'evento R di ricezione, dovremo imporre $u_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{r}} = u_{\mathrm{e}} - v_{\mathrm{e}}$. Dalle (4) abbiamo:

$$u - v = e^{r/2 - Q} (q \cos\xi - \sin\xi)$$

e quindi

$$e^{r_{\mathrm{r}}/2 - Q_{\mathrm{r}}} (q_{\mathrm{r}} \cos\xi_{\mathrm{r}} - \sin\xi_{\mathrm{r}}) = e^{r_{\mathrm{e}}/2 - Q_{\mathrm{e}}} (q_{\mathrm{e}} \cos\xi_{\mathrm{e}} - \sin\xi_{\mathrm{e}}) \tag{5}$$

con ovvio significato dei simboli.

L'onda è emessa con periodo T_{e} (nel tempo proprio dell'emettitore) e ricevuta con periodo T_{r} (nel tempo proprio del ricevitore). Considero quindi un'altra coppia di eventi: E$'$ e R$'$, corrispondenti a emissione e ricezione della fine del primo periodo dell'onda. Ciò vuol dire che E e E$'$ sono separati lungo la geodetica dell'emettitore da un tempo proprio $\Delta\tau_{\mathrm{e}} = T_{\mathrm{e}}$, mentre R e R$'$ sono separati da $\Delta\tau_{\mathrm{r}} = T_{\mathrm{r}}$. Parallelamente ci saranno le differenze $\Delta\xi_{\mathrm{e}}$, $\Delta\xi_{\mathrm{r}}$ per i parametri ξ_{e}, ξ_{r} delle due geodetiche. La relazione fra τ e ξ lungo una geodetica è la (3): la useremo più avanti.

Per il seguito del calcolo supporrò T_{e}, T_{r} così piccoli da poter differenziare la (5) e fermarmi al primo ordine:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial r_{\mathrm{r}}}{\partial \xi_{\mathrm{r}}} - \frac{\partial Q_{\mathrm{r}}}{\partial \xi_{\mathrm{r}}}\right)(u_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{r}}) - e^{r_{\mathrm{r}}/2 - Q_{\mathrm{r}}} (q_{\mathrm{r}} \sin\xi_{\mathrm{r}} + \cos\xi_{\mathrm{r}})\right] d\xi_{\mathrm{r}} = \\ &\qquad \left[\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial r_{\mathrm{e}}}{\partial \xi_{\mathrm{e}}} - \frac{\partial Q_{\mathrm{e}}}{\partial \xi_{\mathrm{e}}}\right)(u_{\mathrm{e}} - v_{\mathrm{e}}) - e^{r_{\mathrm{e}}/2 - Q_{\mathrm{e}}} (q_{\mathrm{e}} \sin\xi_{\mathrm{e}} + \cos\xi_{\mathrm{e}})\right] d\xi_{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Con un po' di passaggi questa si semplifica in

$$\frac{R_{\mathrm{r}}^2 \cos^2 \xi_{\mathrm{r}}}{q_{\mathrm{r}} \cos \xi_{\mathrm{r}} - \sin \xi_{\mathrm{r}}}\, d\xi_{\mathrm{r}} = \frac{R_{\mathrm{e}}^2 \cos^2 \xi_{\mathrm{e}}}{q_{\mathrm{e}} \cos \xi_{\mathrm{e}} - \sin \xi_{\mathrm{e}}}\, d\xi_{\mathrm{e}}. \tag{6}$$

A questo punto differenziamo la (3):

$$d\tau = R^{3/2}(1 + \cos 2\xi)\, d\xi$$

e sostituendo nella (6) otteniamo

$$\frac{d\tau_{\mathrm{r}}}{d\tau_{\mathrm{e}}} = \frac{\cos \xi_{\mathrm{e}}\, \sin(\alpha_{\mathrm{r}} - \xi_{\mathrm{r}})}{\cos \xi_{\mathrm{r}}\, \sin(\alpha_{\mathrm{e}} - \xi_{\mathrm{e}})} \tag{7}$$

dove α_{e}, α_{r} sono definite da

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

La (7) risolve il problema, dato che

$$\frac{\lambda_{\mathrm{r}}}{\lambda_{\mathrm{e}}} = \frac{T_{\mathrm{r}}}{T_{\mathrm{e}}} = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{r}}}{\Delta\tau_{\mathrm{e}}} = \frac{d\tau_{\mathrm{r}}}{d\tau_{\mathrm{e}}}.$$