E. Fabri *settembre 2008* [*]

Impulso trasportato da un'onda su una corda

Il problema

Voglio mostrare in modo diretto, su un modello concreto, che anche un'onda trasversale trasporta impulso nella direzione in cui si propaga. Il modello è il seguente: corda di densità lineare λ e sottoposta a una tensione τ, su cui si propaga un treno d'onde trasversale.

L'idea della dimostrazione è questa: se la corda è fissata a un estremo, e verso quell'estremo si propaga un treno di durata finita, questo si rifletterà nel punto fisso. Se il treno trasporta impulso, nella riflessione verrà ceduto al vincolo un impulso doppio di quello trasportato.

Ma come si calcola l'impulso ceduto? Dato che la corda è tesa, sul vincolo agisce sempre una forza, che avrebbe valore costante (pari alla tensione della corda) se su questa non ci fosse alcun'onda. Se il treno d'onde trasporta impulso, mi aspetto che questo si manifesti in una *variazione* della forza agente sul vincolo. Integrando nel tempo questa variazione, si avrà appunto il doppio dell'impulso trasportato dal treno d'onde.

Impostazione

Assumo che la corda sia infinita a sinistra e fissata a destra; prendo l'asse x con origine dove la corda è fissata (quindi la corda occupa la semiretta $x < 0$).

Il treno d'onda si propaga verso destra e si riflette in $x = 0$: sia $f(x)$ il profilo del treno, essendo f diversa da zero solo per $|x| < a$. La soluzione ha la forma

$$y(x,t) = f(x - vt) - f(-x - vt)$$

dove $v = \sqrt{\tau/\lambda}$. Si vede che la riflessione inizia a $t = -a/v$ e termina a $t = a/v$.

In $x = 0$ la pendenza della corda è

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = 2\,f'(-vt).$$

Calcolo dell'impulso

Posso supporre che la tensione della corda non vari per effetto dell'onda che

[*] Versione originaria: novembre 2007. Modificato l'inizio e aggiunta la relazione con l'energia.

si propaga (un'eventuale variazione sarà di secondo ordine rispetto all'ampiezza dell'onda). La forza applicata a un certo istante sul vincolo sarà

$$F(t) = -\tau \cos\alpha \simeq -\tau\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\right) = -\tau\left(1 - 2\,[f'(-vt)]^2\right).$$

Si vede che la forza in presenza dell'onda è in modulo *minore* di quella della corda a riposo. Come ho già detto, la differenza (in grandezza e verso) integrata nel tempo darà l'impulso trasmesso al vincolo, che è il doppio dell'impulso P trasportato dal treno d'onda. Dunque

$$P = \tau \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(-vt)]^2\, dt = \frac{\tau}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2\, dx.$$

Confronto con l'energia trasportata

Per un'onda progressiva l'energia totale dell'onda (metà cinetica e metà potenziale) vale, com'è noto:

$$E = \tau \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2\, dx$$

e quindi

$$P = E/v.$$