Gli obbiettivi del problema e i modi per raggiungerli *

E. Fabri, U. Penco

Dipartimento di Fisica, Università di Pisa

Come sempre ci sarebbero molte considerazioni di carattere generale da fare per introdurre l'argomento; ma per tenere il discorso entro limiti ragionevoli ridurremo al minimo la premessa.

Che i problemi in fisica siano una cosa importante, quelli che si occupano di insegnamento della fisica non l'hanno scoperto oggi: è una cosa nota a tutti, non solo in Italia ma in tutto il mondo; ma è anche noto a tutti che in Italia la pratica del problema come strumento didattico è abbastanza scarsa, in parte crediamo perché, non essendoci nelle nostre scuole un voto per lo scritto di fisica, l'insegnante non giudica importante preoccuparsi dei problemi. Questo può essere comprensibile, ma lascia intendere che la didattica viene misurata un po' troppo in base alla struttura degli esami finali. Tuttavia sulla questione dell'esame finale torneremo in seguito.

Un'altra premessa da fare è la seguente: abbiamo ritenuto opportuno basare il discorso, in larga misura, su un certo numero di esempi; più avanti, guardando quei testi, si vedrà che in prevalenza — non tutti — li abbiamo tratti dalle prove di maturità delle scuole sperimentali.

I motivi sono diversi. Il primo è di ordine pratico: esisteva la raccolta pubblicata da Bagnolesi [1]; un ottimo lavoro di presentazione dei testi completi di soluzioni, che ci è riuscito comodo utilizzare. In secondo luogo, abbiamo considerato inopportuno scegliere esempi di problemi traendoli da libri di testo: questo perché è difficile giudicare un problema e discuterlo se non s'inquadra nella struttura del testo. Di più: non dovrebbe essere neppure possibile discutere un problema se non si conosce l'organizzazione didattica del testo di cui fa parte. Nella realtà succede spesso che i problemi siano abbastanza indifferenti rispetto al contenuto del testo, ma non dovrebbe essere così. Al contrario, i problemi di maturità sono per loro natura relativamente "invarianti," nel senso che sono — o dovrebbero essere — problemi che devono andare bene a tutti.

Ultima ragione per cui ci è sembrato giusto concentrarci sui problemi della maturità è che, proprio in vista della possibile futura introduzione di un esame scritto di fisica, è facile prevedere che anche per l'esame di fisica accadrà quello che già da tanti anni succede per la matematica: i problemi dati agli esami danno

---

* Relazione al VI Convegno nazionale AIF "Ettore Orlandini": *Il ruolo del problema nella didattica della fisica*; Pisa, 6–5–1992. Pubblicata in *La Fisica nella Scuola*, **27**, suppl. al n. 4 (1994), pag. 6. La presente versione differisce per una revisione linguistica del testo e per l'aggiunta di un'appendice con le risposte a due interventi nella discussione.

un po' il tono, lo standard di quello che si deve fare nel corso. Anche se la cosa è discutibile, si finisce per lavorare in funzione dell'esame; quindi è importante essere particolarmente attenti a quello che già ora accade in materia di problemi per la maturità.

* * *

Dopo queste necessarie premesse, entriamo nel vivo dell'argomento. Per prima cosa, abbiamo tentato una classificazione delle funzioni che può avere un problema nella didattica della fisica. Non ci sentiamo di asserire che la nostra classificazione sia fatta proprio bene: le classificazioni di questo tipo sono sempre un problema serio, prima di tutto perché richiedono un notevole sforzo di ripensamento e di organizzazione mentale. Così in questa circostanza abbiamo speso un po' di tempo a discutere: che categorie di problemi si possono individuare e come potrebbero essere classificati; che significati, che funzioni hanno, ecc.

Funzioni del problema:

- Addestramento
- Esercitazione su argomenti noti
- Introduzione a nuovi argomenti
- Valutazione
- ...

Non bisogna confonderle, anche se spesso **possono coesistere**.
L'importante è operare in modo cosciente.

Problemi nei testi:

è chiara la distinzione delle funzioni?
(Guide per insegnanti)

Problemi per concorsi:

categoria a parte; **non hanno** (a rigore) **funzione didattica**

Problemi finali (*maturità* ...):

dovrebbero costituire **modello** di ciò che ci si aspetta.

È venuta fuori la modesta e imprecisa classificazione che appare nella finestra: modesta perché non è molto raffinata, imprecisa perché — come vedremo fra un attimo — può non essere del tutto chiaro in che misura quelle categorie siano ben distinte. Si vede poi che termina con dei puntini, per intendere che ci potrebbero essere altre categorie che ci sono sfuggite o che andrebbero distinte dalle precedenti.

La ragione per cui abbiamo ritenuto opportuno mostrare comunque il nostro tentativo di classificazione è quella riportata subito sotto: sebbene una classificazione di questo tipo sia sempre difficile, tuttavia la consapevolezza che le funzioni cui può essere adibito un problema nella didattica sono molteplici deve essere presente al docente, in modo che quando propone dei problemi ai suoi allievi, eviti per quanto possibile di confondere funzioni distinte.

Almeno in linea teorica, quando uno prepara un problema o lo sceglie da un libro di testo, dovrebbe porsi qualche domanda: "*Questo problema perché lo do? con quali scopi? che cosa mi sto proponendo?*" E siccome gli scopi sono diversi, anche a seconda del momento dell'attività didattica, una scelta può essere più adatta di un'altra in funzione di quegli scopi.

Per esempio, mentre è abbastanza facile pensare al problema come esercitazione su cose fatte, o come strumento di valutazione, è meno tradizionale usare un problema come modo per preparare una discussione di nuovi argomenti; ma è certamente possibile. È chiaro però che sono cose nettamente distinte: non sarebbe utile e corretto che un problema venisse usato contemporaneamente a scopo di valutazione e per introdurre nuovi argomenti; porterebbe un po' di confusione e di fatto creerebbe poi delle difficoltà nella valutazione stessa. Ciò non toglie che in certi casi invece queste funzioni possano coesistere, e non è detto che un problema debba essere rigidamente adibito ad una sola funzione; l'importante — ripetiamo — è che l'insegnante sia consapevole di quello che fa.

Da questo punto di vista ci siamo anche posti una domanda: quando un insegnante non inventa un problema da sé, ma lo prende da un libro di testo, ci trova indicato il ruolo, il significato, la funzione che quel problema vuole avere? Naturalmente non ci possiamo aspettare che nello stesso libro che usano gli studenti ci sia scritta pure la funzione del problema; ma se quel testo è corredato di una guida per insegnanti, è là che si dovrebbe poter trovare un'indicazione del perché, a che scopo e con che obbiettivi è stato proposto quel problema.

Noi non abbiamo potuto fare un esame di libri di testo ed eventuali guide, prima di tutto per ragioni di tempo; abbiamo però la sensazione che questo non succeda spesso; che normalmente non sia data una chiara indicazione del significato e del ruolo che hanno i vari problemi.

Una categoria un po' a parte è costituita dai problemi che possono essere dati o usati per concorsi: per citare una situazione tipica si pensi all'attività, in corso da qualche anno anche in Italia, di selezione per la partecipazione alle Olimpiadi internazionali di Fisica. I problemi delle Olimpiadi sono chiaramente del tipo "concorso," attraverso i quali si vogliono individuare gli studenti in qualche modo migliori. Ovviamente questa è una funzione del tutto diversa, tanto che abbiamo scritto — esagerando un po' — che a rigore problemi di questo genere non hanno una funzione didattica.

Con ciò vogliamo almeno mettere in guardia gli insegnanti: non è detto che un problema preparato per selezionare i ragazzi brillanti che devono partecipare a una competizione, sia anche automaticamente di per sé il miglior problema a scopo di didattica generale in una classe non selezionata. Qualche volta si può fare, ma con un po' d'attenzione.

Infine — riprendendo una cosa che avevamo in parte anticipato — ci sono i "problemi finali," cioè quelli che servono come valutazione conclusiva di un corso di studi; da noi l'esame di maturità, tipicamente.

Questi hanno le caratteristiche citate prima, cioè sono problemi che devono essere in certo modo indipendenti da com'è stata insegnata la materia dai vari insegnanti nelle diverse scuole. Però, nello stesso tempo, essi costituiscono lo standard: danno agli insegnanti l'indicazione di quello che si vuol intendere come "sapere la fisica." Di conseguenza è anche giusto che l'insegnante guardi a quei problemi come "modelli" e adegui il suo insegnamento in modo da mettere i ragazzi in grado di risolverli. Ecco perché è particolarmente critico come quei problemi vengono costruiti e formulati.

* * *

Un'altra distinzione che si può fare in materia di problemi è nella loro utilizzazione. Per quanto a prima vista la cosa possa apparire banale, anche l'uso del problema ha dei riflessi su come va costruito e presentato. Ecco un elenco (v. finestra qui sotto) che, come prima, è probabilmente incompleto e non necessariamente esclusivo.

Modi di utilizzo:
- scritto
- discussione
- interrogazione
- per casa
- ...

Scritto: **più accurato nell'enunciato** (ma può essere aperto).

Interrogazione: **situazione più aperta** (feedback) ma **orientata alla valutazione**.

Per casa e/o discussione: **aperta al massimo**, adatta per **nuovi argomenti**.

La cosa più consueta è pensare al problema come una prova scritta: si dà il testo, i ragazzi devono risolvere il problema per iscritto e consegnare la soluzione. Ma si può usare un problema anche in altri modi, per esempio se ne può fare argomento di discussione collettiva nella classe: si formula il problema, si raccolgono interventi, si chiedono contributi e si costruisce man mano la soluzione. Si può invece usare per un'interrogazione del singolo, che viene chiamato alla lavagna a risolvere il problema. Ancora: si può assegnare come lavoro a casa. Queste modalità non si escludono a vicenda, perché un insegnante potrebbe anche assegnare il lavoro a casa e poi farne oggetto d'interrogazione, oppure assegnare il lavoro a casa per poi aprire una discussione coinvolgendo tutta la classe, ecc.

Quello che vorremmo mettere in evidenza è che, anche qui, se un problema viene pensato per un tipo d'impiego o per un altro, deve — o dovrebbe — avere delle caratteristiche diverse, dovrebbe essere pensato in modo diverso.

Per esemplificare: un problema preparato per uno scritto deve essere particolarmente accurato; l'insegnante cioè deve studiare bene l'enunciato che vuol proporre, perché lo studente, trovandosi davanti un testo scritto, deve ricavare da quello tutte le informazioni necessarie per risolvere il problema.

La nostra esperienza — penso agli esami scritti dell'università, ma la situazione è analoga nella scuola superiore — ci dice che quando diamo un problema per l'esame, i ragazzi devono avere un testo che si capisca, dove non ci siano errori, dove non ci siano affermazioni confuse o comunque poco chiare; non è bello — anche se ogni tanto succede — che poi, nel corso dell'esame, uno debba dire: "*Un momento, ragazzi, scusate un attimo; guardate che nella tale domanda ... c'è una cosa da chiarire*"; oppure "*nella formula ... non dovete leggere* 3 *ma dovete leggere* 4"; oppure ancora: "*Attenzione: nel testo non è detto che le masse sono uguali*," e cose di questo tipo. Sarebbe bene aver pensato a tutto prima.

È bene notare che la necessità di un enunciato il più possibile accurato non esclude che il problema possa essere di tipo "aperto," ma questa è una cosa su cui torneremo fra un momento.

Nel caso che un problema venga usato per un'interrogazione, la situazione si presenta come più aperta, nel senso che c'è un colloquio tra l'insegnante e lo studente che sta rispondendo all'interrogazione; quindi ci saranno domande, risposte, nuove domande e il problema si può chiarire e precisare man mano, perché c'è una sorta di *feed-back*, un ritorno indietro: il ragazzo non ha capito, l'insegnante spiega meglio quello che vuole ecc. La situazione è quindi meno formalizzata, ma al tempo stesso è strettamente finalizzata, orientata alla valutazione.

Il caso del problema proposto per casa oppure per la discussione in classe — cose che non si escludono — è forse la condizione aperta al massimo, in cui possiamo dire: "*Provate a pensare un po' a questa situazione, poi ne riparliamo.*" Chiaramente in tal caso si può proporre un enunciato non completamente definito; ed è anche la situazione ideale per lo sviluppo di nuovi argomenti: si può proporre di pensare a cose che non sono state sistematicamente e organicamente trattate.

Concludendo, questa elencazione serviva non tanto a dare delle regole precise di comportamento, quanto per indicare certi criteri che è utile avere presenti quando si lavora sui problemi.

* * *

Veniamo adesso a un argomento un po' più specifico, al quale sarà dedicata una parte significativa di questa relazione: l'abbiamo chiamato "importanza dei numeri" (v. finestra qui sotto).

Importanza dei numeri:
- pratica con le unità
- stime di ordini di grandezza
- scelta di approssimazioni e schematizzazioni
- confronto con la realtà.

Come vanno trattati i dati?

Sono da considerare come risultati di misure, con errore implicito nel numero di cifre?

Esaminando la pratica corrente si vede un uso più libero, che ci sembra preferibile:
- trattare i dati numerici come **convenzionali**, ossia **non affetti da errori**
- condurre i calcoli con le sole **precauzioni elementari** (cancellazioni)
- **eccezione**: solo se il problema propone una **situazione sperimentale** preoccuparsi della "propagazione degli errori."

Criterio metodologico sottostante:

una cosa sono gli **errori di misura**, e un'altra le **approssimazioni numeriche**.

Che il lavorare coi numeri sia una componente essenziale nella risoluzione di un problema può sembrare banale, tanto che qualcuno potrebbe anche dire: "*E come si fa a fare problemi senza numeri?*" Nei problemi ci sono sempre i numeri: "Un corpo di massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ si muove lungo un piano inclinato, d'inclinazione $\alpha = 35°$ ecc." Già, ma si tratta di vedere che ruolo hanno, come vengono usati.

Per cominciare proviamo a chiederci: perché i numeri nei problemi? Per rispondere, anche qui, distinguiamo diverse categorie. Alcune di queste sono ovvie, altre forse lo sono un po' meno ma crediamo siano chiarissime.

- Pratica con le unità di misura: ci sembra che non occorra dare particolari spiegazioni.
- Stime di ordini di grandezza: è un po' meno ovvia, e non è molto usuale; non è questo il tipo di problemi che di solito si trovano nei libri; anche per questo motivo vedremo in modo più dettagliato qualche esempio.

– Scelta di approssimazioni e schematizzazioni: anche questo è un aspetto interessante e delicato e forse potrà apparire anche difficile; faremo degli esempi, e ci aspettiamo eventualmente qualche critica.
– Confronto con la realtà: è in parte legato ai precedenti, come si potrà vedere dagli esempi.

Passiamo dunque a discutere alcuni esempi che abbiamo preparato. Il primo è relativo al punto "stime di ordini di grandezza."

ESEMPIO 1 – (da E. Rogers: *Teaching Physics for the Inquiring Mind*)

> Facendo ragionevoli ipotesi sulle dimensioni ecc., calcola la pressione che c'è nella canna di un fucile mentre parte un proiettile.
>
> L'esplosivo della cartuccia produce in brevissimo tempo una grande quantità di gas molto caldo; la pressione del gas spinge il proiettile nella canna. Fai opportune stime sulle dimensioni della canna e su tutte le altre grandezze che ti occorrono, e calcola la pressione media del gas nel tempo in cui il proiettile sta nel fucile.
>
> Volutamente non ti vengono forniti dati numerici: dovrai inventare tu i valori che ti sembrano ragionevoli, e ricavarne una risposta numerica. Poiché farai delle ipotesi e delle stime, dovrai esporle chiaramente, prima di usarle. Poiché sono soltanto stime, ci si aspetta solo una risposta grossolana; perciò verrà accettata qualunque risposta ragionevole, *purché tu abbia spiegato come ci sei arrivato*.
>
> Enuncia in modo chiaro i valori dei dati che assumi e i principi fisici dei quali fai uso; descrivi poi il ragionamento che hai fatto.

Come si vede, questo problema non è preso né da un libro di testo, né dalla raccolta della maturità, e non l'abbiamo inventato noi; è un problema di Eric Rogers [2], quel grande della didattica della fisica, morto da poco tempo. I più giovani forse non l'avranno mai sentito nominare, però chi conosce i films del PSSC, e in particolare quelli sulla legge di Coulomb, l'ha visto: l'"attore" in quei film era Eric Rogers.

Scorriamo il testo. Questo modo di presentare un problema è assolutamente non tradizionale per noi, per diverse ragioni. Una è che si tratta di una situazione decisamente aperta, in cui non è detto esattamente quello che si deve fare; non si dice: "Calcola questo, usa questa legge, ecc." Inoltre non ci sono dati numerici, poiché è lo studente che se li deve trovare in qualche modo. Va da sé che lo studente deve essere stato abituato a fare questo tipo di lavoro, e non è assolutamente immaginabile che senza aver creato le condizioni necessarie si possa improvvisamente sottoporre a uno studente un problema così concepito.

Ma è soprattutto un'altra la caratteristica di questo problema: la lunga spiegazione di quello che ci si aspetta. "Io mi aspetto che tu faccia questo e faccia quest'altro; questo me lo dovrai spiegare, verrà valutato positivamente questo e non quest'altro, ecc."

In altre parole, pensando al problema come una sfida tra l'insegnante e l'allievo, questi deve rispondere alla sfida, ma gli si dice in modo chiaro ed esteso quali sono le regole del gioco; la sfida non è al buio: "Tu, questo devi fare, questo mi devi spiegare, questo mi devi dire."

Purtroppo adesso non c'è assolutamente il tempo di discutere l'utilità e il valore del problema e nemmeno come si dovrebbe risolvere; lo lasciamo come esempio di formulazione molto originale di un testo.

Sempre su questo argomento — "stime degli ordini di grandezza" — proponiamo un secondo esempio che ha un'altra origine: questo è un problema pensato da uno di noi (E.F.) — ma non è un'invenzione particolarmente originale — in occasione del concorso del premio Salcioli(1) l'anno scorso.

ESEMPIO 2 – (Premio Salcioli 1991 – triennio)

Un tubo cilindrico, di sezione $2\,\mathrm{cm}^2$, porta acqua a una fontana, da cui esce con la portata di $0.1\,\mathrm{litri/s}$.

a) Se in un litro d'acqua ci sono $3.3 \cdot 10^{25}$ molecole, quante molecole escono dalla fontana ogni secondo?

b) Come si calcola la velocità media di una molecola?

La lampada del faro di un'automobile assorbe una corrente di $6\,\mathrm{A}$. I conduttori che portano la corrente hanno una sezione di $1\,\mathrm{mm}^2$.

c) Calcola la velocità media degli elettroni nei fili.

d) Come si spiega, dato che la velocità degli elettroni è così modesta, che i fari si accendono subito?

Nota: In questo problema mancano volutamente certi dati, che devi conoscere o stimare. Non sono richiesti calcoli precisi: è sufficiente l'ordine di grandezza.

Circa l'enunciato basta solo notare che le prime due domande, *a*) e *b*) che si riferiscono all'acqua, sono solamente a scopo di aiuto per indirizzare alla soluzione della vera domanda, che è la *c*).

Discutendone nella Commissione giudicatrice, si ritenne opportuno suggerire una strada per affrontare l'argomento e allora si aggiunsero le prime due domande. Anche questo problema, pur avendo uno stile molto diverso dal precedente, ha in comune la caratteristica di non fornire tutti i dati numerici necessari. In realtà qui alcuni dati ci sono — la corrente di $6\,\mathrm{A}$ e la sezione del conduttore di $1\,\mathrm{mm}^2$ — ma chiaramente non sono sufficienti. Mancano due cose: la carica dell'elettrone e la densità numerica degli elettroni nel metallo. Senza queste due informazioni il problema non si risolve.

---

(1) La sezione AIF di Pisa per onorare la memoria del socio prof. Giuseppe Salcioli, prematuramente scomparso l'anno precedente, ha indetto nel 1991 un concorso riservato a studenti di scuola media superiore — biennio e triennio separatamente — basato sulla soluzione di un certo numero di problemi di Fisica.

Rispetto a un problema per noi più tradizionale, la difficoltà per lo studente è spostata a un altro livello, quello di capire quali sono i dati di cui ha bisogno. Ad esempio la carica dell'elettrone in realtà era fornita in una tabella a parte, comune a tutti i problemi, insieme alla costante di Avogadro e ad altre costanti inutili.

La cosa però — un po' come nell'esempio precedente — era in parte esplicitata come si vede dalla Nota. In particolare il solutore non si doveva preoccupare di sapere esattamente quanti elettroni ci sono in un centimetro cubo di metallo; l'importante era saperne stimare l'ordine di grandezza o comunque ricavarlo a partire da altri dati.

Sempre sulla questione della stima degli ordini di grandezza, c'è anche l'Esempio 3: la notazione che trovate qui, dove c'è scritto "originale," vuol dire semplicemente che è un problema elaborato da noi e che abbiamo usato in questi due anni nel corso di Fisica I, come discussione in classe, cioè durante le esercitazioni, in modo aperto.

ESEMPIO 3 – (originale)

Stimare la velocità di caduta delle gocce di pioggia (ordine di grandezza). Suggerimenti:

– Se si va in bicicletta sotto la pioggia ...
– Le tracce lasciate dalla pioggia sui vetri laterali di una macchina ...

Scegliendo una ragionevole altezza delle nuvole e trascurando in un primo tempo la resistenza dell'aria, che velocità si trova? Il risultato indica che ...

Mostrare che se la resistenza dell'aria aumenta con la velocità, certamente le gocce non possono superare una velocità limite. Poiché la velocità stimata è molto minore di quella che si avrebbe in assenza di aria, ne segue che le gocce raggiungono questa velocità limite poco tempo dopo la partenza, e poi ...

Come si conduce una discussione di questo genere? Uno si mette davanti ai ragazzi e comincia: "*Ragazzi, con che velocità cade la pioggia?*" La reazione tipica degli studenti, anche universitari, è: "*Boh!? E chi lo sa?*" Dopo di che bisogna indurli a pensare: "*Pensate se non c'è qualche maniera di arrivarci.*"

Allora si comincia, gli studenti per un po' ci pensano, qualcuno spara delle cose senza senso, qualcun altro comincia a dire: "*Ah, già ... però! Se io vado in bicicletta ..., ecc.*" E pian piano si costruisce una serie d'ipotesi e di procedimenti con cui si può fare una stima. Ripetiamo che è una stima, non una misura, ma l'importante è che alla fine della discussione ci si è fatta un'idea di quale sia l'ordine di grandezza della velocità delle gocce di pioggia. (In ogni caso non si potrebbe fare altro che una stima, anche perché le gocce di pioggia non cadono tutte alla stessa velocità in tutte le piogge, e quindi solo l'ordine di grandezza ha senso in una situazione di questo tipo.)

Raggiunto questo primo obbiettivo, si può proseguire indagando altri aspetti, che si collegano alla questione delle schematizzazioni e approssimazioni. Quindi si chiede ancora: "*Calcolate con che velocità cadrebbero le gocce se non ci fosse la resistenza dell'aria.*"

Tra parentesi, a questo punto emerge sempre una nuova difficoltà: gli studenti tipicamente non sanno a che altezza stanno le nuvole: "*Boh!*" di nuovo. È forse il caso di sottolineare che anche studenti che si sono iscritti a un corso di laurea in fisica all'università, di fronte a domande come questa appaiono disarmati.

Superata in qualche modo anche la nuova difficoltà, lo studente fa il conto e scopre che se le gocce cadessero senza la resistenza dell'aria raggiungerebbero una velocità di qualche ordine di grandezza maggiore di quella stimata precedentemente; ci si convince così che la resistenza dell'aria non solo è importante ma è assolutamente dominante in queste condizioni.

Non ci dilunghiamo sul resto del problema; lo scopo dell'esempio era di delineare lo schema del ragionamento, così come avete visto. Da un lato si cerca di fare una stima quantitativa (ordine di grandezza) di una certa grandezza fisica di cui inizialmente non si sa nulla; poi si confronta il risultato ottenuto con un modello teorico, il più semplice possibile, nel nostro caso quello della caduta libera; si vede allora che il modello teorico non rispecchia assolutamente i fatti osservati, e che quindi bisogna introdurre una correzione importante, la resistenza dell'aria. Anche l'aspetto "confronto con la realtà" appare così legato alla trattazione quantitativa, cioè numerica, del problema.

* * *

L'ultimo esempio ha già toccato, in una certa misura, la seconda categoria: "scelta di approssimazioni e schematizzazioni." Vediamo in che senso.

Qualunque questione fisica si affronti — non solo in un problema ma anche nello stesso lavoro di ricerca — è inevitabile fare delle schematizzazioni; questo perché la realtà del mondo, anche dentro il laboratorio, è sempre troppo complicata per poterla trattare in modo completo. Così è normale sentir dire: "*Trascuro questo ... schematizzo quello ... suppongo un campo uniforme ... immagino che la temperatura vari lentamente ....*" Insomma, a seconda dell'esperimento o della situazione, le schematizzazioni possono cambiare ma ci sono sempre; così pure le approssimazioni, cioè qualche cosa che si può ritenere poco importante rispetto ad altro.

Nell'esempio visto prima, si sarebbe potuto pensare che la resistenza dell'aria fosse trascurabile — e questa sarebbe stata un'approssimazione — salvo poi constatare che quella particolare approssimazione non è ammissibile.

Il punto che vogliamo sottolineare è questo: bisogna abituare gli studenti a saper fare le schematizzazioni e le approssimazioni adeguate, e come primo passo a saper riconoscere e padroneggiare le schematizzazioni entro le quali imparano a risolvere i problemi. Per questo riteniamo che sarebbe opportuno che le schematizzazioni richieste per la soluzione di un problema fossero o indicate esplicitamente oppure ricavabili facilmente dai dati.

Per rimanere all'ultimo esempio, le due possibilità sono: o voi dite nel testo del problema: "La schematizzazione da fare è questa: si trascuri la resistenza dell'aria ...," oppure mettete le cose in modo che dall'enunciato del problema sia chiaro che è lo studente che deve capire se potrà o no trascurare la resistenza dell'aria. In questo secondo caso se la deve vedere lui, ma deve poterlo capire.

Ci pare di notare che invece la tendenza prevalente sia un'altra: guardando in giro un certo numero di problemi, abbiamo trovato che di regola non si dice quale schematizzazione sia da adottare, in quanto la si dà come tacitamente sottintesa. In poche parole, c'è una certa specie di tradizione non scritta che certe cose si fanno (sempre e solo) in un certo modo. Ma per spiegarsi meglio è opportuno vedere degli esempi.

Problema assegnato alla Maturità sperimentale nel 1980, n. 3: è un problema abbastanza classico, sulla deflessione di elettroni in un campo elettrico; potrebbe trattarsi delle due placchette deviatrici di un tubo a raggi catodici.

ESEMPIO 4 – (Maturità sperimentale 1980 – 3)

In un tubo a raggi catodici un pennello di elettroni accelerato da una ddp U_0 forma una immagine puntiforme sul fondo del tubo. La lunghezza delle piastre piane deflettrici è l, la loro distanza è d; il fascio passa tra di esse a distanza $d/2$ da ciascuna. La distanza dell'estremo delle piastre dallo schermo è L e la ddp tra le piastre è U.

Si determini lo spostamento provocato sull'immagine puntiforme dalla ddp U. Per quale valore di U lo spostamento sarà di $1\,\mathrm{cm}$ quando sia: $U_0 = 100\,\mathrm{volt}$, $l = 2\,\mathrm{cm}$, $L = 20\,\mathrm{cm}$, $d = 1\,\mathrm{cm}$.

[...]

La cosa da mettere in rilievo è questa (ed ecco perché i dati numerici sono importanti): la lunghezza delle piastre piane deflettrici è $2\,\mathrm{cm}$ mentre la loro distanza è $1\,\mathrm{cm}$. Non viene detto nulla di più, ma è chiaro dalle domande che ci si aspetta che lo studente supponga uniforme il campo elettrico tra le due piastrine e nullo immediatamente fuori. Infatti altre schematizzazioni non sarebbero certo percorribili al livello di scuola superiore.

Purtroppo è ben noto che con quella geometria e con quelle dimensioni ($2\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$) tali assunzioni non rispondono assolutamente al vero, e comunque lo studente non è in grado di valutare in che misura il risultato così ottenuto possa avvicinarsi alla situazione reale.

Quindi viene dato qui un enunciato in cui si dà per scontato che chi risolve il problema adotti una certa schematizzazione, ma nello stesso tempo si danno dei numeri che sono incompatibili con quella schematizzazione. Questa è una cosa che non si dovrebbe fare; è certamente un esempio negativo.

Vediamo l'esempio successivo.

ESEMPIO 5 – (Maturità sperimentale 1985 – 3)

Un corpuscolo carico con massa pari a $3\,\mathrm{g}$ è tenuto sospeso in aria in un punto P da un campo elettrico uniforme diretto verticalmente, dal basso verso l'alto, del valore di $1000\,\mathrm{N/C}$.

Si vuol conoscere:

– quant'è la carica del corpuscolo e di che segno è.

Si spieghi cosa si intende per campo elettrico in P.

Si indichino le due energie potenziali possedute dal corpuscolo, si specifichi in che rapporto stanno e se ne dia una valutazione tenendo conto che il corpuscolo si trova a $100\,\mathrm{m}$ dal livello del mare.

Nella nostra discussione limitiamoci alla prima domanda (non perché non ci sarebbe da dire sulle altre, ma solo per ragioni di tempo). Per mostrare cosa succede quando uno ha pratica con i numeri e le grandezze della fisica, basterà dire che appena letto questo problema, ci siamo chiesti: "*Salute! e che carica ci vuole?*"

Pur senza fare conti, basta appunto un po' di pratica per riconoscere che un campo elettrostatico di $1000\,\mathrm{N/C}$ è debole, e che se si vuole che riesca a contrastare la forza di gravità su un oggetto che ha massa $3\,\mathrm{g}$ ci vuole un bel po' di carica. Se poi si vanno a fare i conti, si trova che la carica risulta di circa $30\,\mu\mathrm{C}$, che può sembrare ancora una carica piccola solo a chi non ha mai fatto alcuna esercitazione numerica in elettrostatica. Ma provate a valutare le dimensioni di un tale corpuscolo di $3\,\mathrm{g}$ di massa, e il potenziale che avrebbe con quella carica. Facendo una stima ragionevole della dimensione (con una densità di $2 \div 3\,\mathrm{g/cm^3}$ il diametro sarebbe poco più di $1\,\mathrm{cm}$ ... si può chiamare ancora "corpuscolo"?) viene fuori un potenziale di alcune decine di milioni di volt.

Verrebbe da chiedersi: a chi può venire in mente un problema come questo? Il peggio è che lo studente ingenuo non si fa nessuna domanda; magari conosce benissimo le formulette, conosce la relazione tra campo elettrico e forza, mette insieme le cose e risolve tutto. Purtroppo sotto c'è una situazione fisica assolutamente non reale, e se lo studente è un po' più acuto e se ne rende conto, lo si mette in difficoltà. Paradossalmente un problema così danneggia gli studenti più bravi.

ESEMPIO 6 – (Maturità sperimentale 1989 – 1)

Due fili rettilinei paralleli indefiniti, distanti $2d$ l'uno dall'altro, sono percorsi in verso opposto da una stessa corrente d'intensità i. Si consideri in un piano perpendicolare ai fili la retta che rappresenta l'asse del segmento avente per estremi le intersezioni dei due fili con il piano.

Si determini il vettore induzione magnetica $\vec{B}$ in un punto generico della retta suddetta.

Si dica quanto vale l'intensità di $\vec{B}$ in un punto di detto piano le cui distanze dai due fili si possono ritenere uguali.

Un ulteriore esempio è quello che precede. Anche qui abbiamo una situazione abbastanza canonica: due fili paralleli sono percorsi da correnti uguali in senso opposto e si chiede di calcolare il campo magnetico in vari punti dello spazio. Ma ci ha lasciato assai perplessi la domanda finale con la frase misteriosa: "le cui distanze ... si possono ritenere uguali."

Noi siamo arrivati a pensare che probabilmente significa "a grande distanza"; ma se è a grande distanza cosa vuol dire? che allora, essendo le distanze uguali, i due campi si cancellano esattamente e il campo totale è zero? Questo non è rigorosamente vero, il campo considerato non è zero in nessun punto; si tratta di un campo che va a zero più rapidamente di quello dato da un filo solo (come $1/r^2$ anziché $1/r$, per la precisione).

Qui appare fortemente criticabile da una parte la formulazione oscura, da cui non si capisce che cosa si vuole esattamente; dall'altra la mancanza d'informazioni sul tipo di schematizzazione che s'intende suggerire: se ci si aspetta che si mettano le distanze uguali e quindi si risponda *tout court* "campo nullo" o si richiede un'approssimazione più raffinata e lo studio del campo $\sim 1/r^2$. Se propendiamo per la prima ipotesi è solo perché, come prima, l'altra ci pare al di là delle possibilità di uno studente alla maturità.

Ancora un ultimo esempio su questo argomento; in positivo, anche perché avendolo scritto uno di noi (E.F.) riteniamo che sia un buon problema...

ESEMPIO 7 – (originale)

Un astronauta sulla Luna (senza atmosfera) spara un colpo di pistola verso l'alto, in direzione verticale. Il proiettile esce dall'arma alla velocità di $700\,\mathrm{m/s}$. A che altezza arriva? (Si può trascurare la rotazione della Luna; il campo gravitazionale alla superficie vale $1.62\,\mathrm{N/kg}$).

Cosa c'è sotto? Si tratta di capire se per questo calcolo il campo gravitazionale della Luna può essere supposto uniforme oppure no. Sfortunatamente — ed è questo il bello del problema — uno non lo può sapere finché non fa i conti: se quel proiettile sale di $100\,\mathrm{m}$, considerato che il raggio della Luna è di circa $1700\,\mathrm{km}$, potremo senz'altro ritenere che il campo gravitazionale per quel tratto non cambia apprezzabilmente; se invece il risultato è di $1000\,\mathrm{km}$ le cose si complicano, il campo non può essere più ritenuto uniforme e bisogna risolvere il problema tenendo conto della variazione del campo, o meglio usando la conservazione dell'energia con la forma esatta del potenziale gravitazionale.

La cosa su cui vogliamo mettere l'accento è che se non si fa uso esplicito dei valori numerici non si può sapere quale sia la schematizzazione adeguata. L'uso dei numeri in questo problema è dunque decisamente diverso dal solito: tradizionalmente si cerca prima di risolvere un problema in modo formale, e solo da ultimo si ricavano i risultati quantitativi a partire dai dati numerici. Tanto che, se uno studente non arriva a questo punto, magari per mancanza di tempo (così dice lui ...) si tende a giustificarlo: "*Non ha fatto i calcoli numerici ... ma sostanzialmente ...*"; di fatto ciò non avrà un grosso peso nella valutazione.

Qui invece si chiede di comportarsi in maniera diversa, cioè di seguire un procedimento di approssimazioni successive: provare dapprima a mettere dei numeri supponendo il campo uniforme, per accorgersi che viene una distanza molto grande; quindi la schematizzazione di campo uniforme non è corretta e la soluzione va ricercata in un altro modo.

* * *

Parlando di numeri, del loro uso e del loro trattamento nella soluzione del problema c'è un altro aspetto, controverso ma forse non abbastanza dibattuto, che vale la pena di affrontare: il problema del "numero di cifre." Quante sono le cifre significative di un certo valore numerico, come si devono trattare, come tener conto di errori; che cosa fare? Soprattutto: che cosa dobbiamo chiedere agli studenti, che cosa vogliamo da loro, quando fanno i conti?

La domanda che si vede nell'ultima finestra (*come vanno trattati i dati*?) deriva da un atteggiamento che abbiamo notato in diverse occasioni, cioè che i dati numerici di un problema siano da trattare come se fossero risultati di misure, in cui l'errore non è dato esplicitamente ma è sottinteso, indicato in modo implicito dal numero di cifre scritte. Però, riflettendo sulla questione, e cercando di capire qual è la pratica corrente, quella che in realtà poi quasi tutti usiamo (compresi i libri quando mostrano soluzioni di problemi) abbiamo visto che di solito non si fa così: l'uso dei numeri è molto più libero e — come appare preferibile — non si rilevano rigide applicazioni di regole prefissate.

È possibile definire e giustificare una linea di comportamento? Noi vorremmo indicare una proposta, una regola semplice e pratica cui attenersi. Siamo presoché certi che la nostra proposta incontrerà dei dissensi, ma poi discuteremo.

La proposta è di trattare i dati numerici come "convenzionali" ossia *non affetti da errori.* In altre parole i dati che si usano per fare dei conti nei problemi non dovrebbero essere visti come risultati di misure, salvo un caso — un'eccezione — su cui torneremo tra un attimo. Quindi generalmente non si deve intendere che il numero di cifre possa dare un'indicazione di un errore associato. Di conseguenza si dovrebbe richiedere di condurre i calcoli "con le sole precauzioni elementari," con ciò intendendo di fare attenzione ad alcuni possibili trabocchetti, il più classico dei quali è la cosiddetta *cancellazione*: se in un calcolo numerico si sottraggono due numeri quasi uguali, si deve essere ben consapevoli che con questo sicuramente si sta perdendo precisione nel risultato.

Il numero di cifre da tenere nei singoli passaggi non dovrebbe rappresentare un problema; tra l'altro oggi esistono calcolatori tascabili di tutte le specie, per cui non hanno proprio più senso tutte quelle preoccupazioni circa le cifre da tenere. I calcolatorini non se ne curano minimamente: le cifre se le tengono dentro; uno fa i calcoli, moltiplica, divide, somma, sottrae, poi alla fine tira fuori il risultato finale e basta; non c'è problema di come sono conservati i risultati intermedi.

Per capire il significato della prescrizione tradizionale, di tenere solo un certo numero di cifre nei calcoli intermedi, occorre ricordarne l'origine. Essa è nata quando i calcoli si facevano sostanzialmente a mano (senza calcolatori, neppure tascabili, ma al più coi logaritmi). Si poneva allora il problema di lavorare col minor numero di cifre possibili, sia per risparmiare tempo, sia per fare meno errori. D'altra parte si doveva anche evitare che con un numero di cifre troppo ridotto si finisse per introdurre ulteriori errori, che avrebbero peggiorato l'incertezza già insita nei dati di partenza.

Il punto è questo: ci sono due aspetti concettualmente indipendenti che è bene tenere distinti ma che spesso invece vengono confusi in questa problematica delle cifre significative.

Il primo riguarda l'incertezza dei dati di partenza (gli *errori di misura*), che è un problema di natura fisica: i risultati di una misura sono affetti da incertezze a causa della fisica stessa del problema e dipendono da come abbiamo fatto le misure (strumento usato, disturbi non eliminati, errori sistematici ... tutte cose che bisogna conoscere per dare l'esatto significato al numero che viene fuori). L'altro è un problema puramente matematico: i numeri vengono rappresentati con un *numero di cifre* necessariamente *finito* e ciò comporta un'approssimazione. Maggiore è il numero di cifre usate, migliore è la precisione della rappresentazione e l'approssimazione dei dati e dei risultati del calcolo; in linea di principio uno può fare i conti con l'approssimazione che vuole, però resta il problema pratico. Ma i calcolatorini di oggi lavorano con 12 o 13 cifre, che sono sempre largamente sufficienti; quindi il problema matematico non c'è più e possiamo fare i calcoli in piena libertà.

C'è però, ovviamente, un'importante eccezione: un problema può proporre esplicitamente una situazione sperimentale. "È stata misurata una certa grandezza ...", oppure "Con quale errore si deve misurare una certa cosa per ottenere un certo risultato?" In quel caso è necessario, e non solo opportuno, preoccuparsi della propagazione degli errori, sia pure in modo non del tutto rigoroso, cosa che non sarebbe proponibile al livello scolastico di cui stiamo parlando. Ma su questo non vogliamo dilungarci.

Per quanto detto ci è sembrato opportuno proporre una politica che mira principalmente a tenere distinti i due aspetti citati. L'approccio si basa su un criterio metodologico, sul quale forse bisognerebbe parlare più a lungo ma che brevemente può esprimersi così: "Nella soluzione di un problema *non ci sono* errori di misura di cui tener conto, a meno che non lo si dica esplicitamente nell'enunciato; al contrario le approssimazioni numeriche ci sono per forza. In ogni caso però, se il calcolo viene fatto con un calcolatore tascabile, si può essere certi di aver conservato molte più cifre di quanto occorre in qualunque problema si possa immaginare, salvo casi veramente straordinari o scelti apposta."

* * *

Chiuso così l'argomento "numeri," torniamo alla questione "problemi aperti e problemi chiusi" cui abbiamo già accennato, esaminando alcuni esempi.

Cominciamo col dire che finora non è stata data alcuna definizione di problema aperto, mentre forse non tutti intendiamo esattamente la stessa cosa. Nella finestra qui sotto vedete solo un accenno di definizione: secondo noi un problema è aperto quando la situazione che viene descritta non è ben definita, per almeno due ragioni, che possono anche essere presenti contemporaneamente.

Problemi aperti e problemi chiusi

"Aperto" significa **situazione non ben definita**, tanto nei dati quanto nelle domande.

Però: **un problema aperto non è un indovinello!** Non si deve chiedere di "leggere nel pensiero"...

Problemi belli e problemi brutti

Questione di gusti? Non del tutto...

Problema bello: coglie ciò che riteniamo **importante** nella fisica che vogliamo insegnare.

Problema brutto: **banale**, poco significativo, o addirittura **trasmette un messaggio errato**.

La prima è che nel problema non vengano forniti — in tutto o in parte — i dati necessari: pensate a quel problema di Rogers che in poche parole dice: "*Veditela te quanto è grossa la canna del fucile ... qual è la massa del proiettile ... insomma, quello che ti serve per risolvere il problema te lo devi cercare da solo.*" La seconda è che le domande stesse non siano del tutto definite; quindi non questioni del tipo: "Calcola la tal cosa ...," ma per esempio: "Dimmi che succede se ...," e lo studente, prima di pensare alla risposta, deve precisare la stessa domanda.

Abbiamo qui forse la situazione di massima apertura, e possiamo immaginare come questo sia il tipo di problemi che gli insegnanti vedono col massimo sospetto, nel senso che sono considerati difficili da inventare, difficili da proporre, difficili da correggere e da valutare. Siamo perfettamente d'accordo, ma bisogna anche riconoscere che sono i problemi dove c'è più fisica. Dico di più: l'ideale di un insegnamento della fisica sarebbe di mettere gli studenti in grado di affrontare *questo* tipo di problemi. Del resto non bisogna dimenticare che quando un fisico fa il suo lavoro questi sono i problemi che ha: lui non ha davanti il problema coi dati, le equazioni ... e una domanda precisa. Almeno la domanda se la deve inventare lui, il fisico che lavora.

Però un'altra cosa va pure detta: che un problema aperto è una cosa e un indovinello è un'altra. In altre parole problema aperto non significa porre una qualunque domanda possa saltare in testa e pretendere che lo studente debba indovinare quello che ci si aspetta come risposta. Lo studente non deve essere chiamato a leggerci nel pensiero. Questa precisazione abbiamo voluto farla perché a volte capita di trovarsi in una situazione da "indovinello," come si può vedere attraverso un paio di esempi.

ESEMPIO 8 – (da P. Tipler: *Invito alla Fisica*)

È possibile, in linea di principio, che la Terra riesca a sottrarsi all'attrazione gravitazionale del Sole?

Questo problema costituisce un'eccezione, tra gli esempi che proponiamo, in quanto è tratto da un libro di testo [3]. Non sarebbe giusto prendersela con quel particolare libro di testo, perché per puro caso l'avevamo sotto mano; in realtà non abbiamo alcun motivo per dire né che sia particolarmente brutto né che sia particolarmente bello.

Comunque sia, quella domanda ci ha incuriositi: veramente qui non si riesce a capire che cosa ha in mente l'autore.

Cosa può pensare allora uno studente? Già l'affermazione "in linea di principio ..." appare oscura, e poi che vuol dire "riesca a sottrarsi all'attrazione gravitazionale del Sole?" Forse che qualcuno con un razzo possa dare una bella spinta alla Terra? ... oppure che lo possa fare da sola? ... Oltretutto c'è pure l'espressione poco felice: "... la Terra *riesca* a sottrarsi," come se la Terra un bel giorno potesse dire: "*Mi sono stufata ... mi voglio sottrarre all'attrazione del Sole.*"

Va detto che trattandosi di un testo tradotto, alcune colpe possono anche essere del traduttore; però complessivamente questo è proprio il tipo di problema che chiameremmo "indovinello."

Eccone un altro (Esempio 9) che invece fa parte di una prova d'esame per la maturità: qua si tratta soprattutto della domanda *b*), davvero oscura (a parte la prosa faticosa).

ESEMPIO 9 – (Maturità sperimentale 1986 – 3)

Due fili di rame di sezione circolare sono lunghi $8\,\mathrm{m}$ ed hanno diametro pari a $0.2\,\mathrm{mm}$. La resistività del rame è $\varrho = 1.7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

Si vuol conoscere:

a) quali correnti li attraversino se si applica agli estremi di ogni filo la ddp di $12\,\mathrm{V}$.

b) se si possano ipotizzare casi in cui le correnti, nella situazione sopra indicata, siano significativamente differenti.

c) se si sostituisce il rame con l'alluminio (la conducibilità del secondo è circa i due terzi di quella del primo), come si comportano le correnti nel primo caso.

Nella domanda *a*) si è detto che la differenza di potenziale è la stessa; inoltre la resistività dei conduttori è la stessa, la lunghezza, la sezione, il diametro sono gli stessi: poi si ipotizza che le correnti possano essere differenti. Abbiamo un vago sospetto di quello che poteva avere in testa chi ha pensato questo problema, ma non ne siamo affatto sicuri. Lo consideriamo un indovinello, appunto perché non si capisce cosa si chiede, si può solo tirare a indovinare.

Esempi di problemi aperti che invece consideriamo più positivi li abbiamo già indicati e non serve tornarci. Ma nel ragionare su tutti questi esempi ci è venuto in mente di sottolineare una distinzione di tipo diverso: trasversale, com'è di moda dire adesso.

L'idea indicata nella finestra è forse più scivolosa, più difficile da esprimere: una classificazione potrebbe essere quella di problemi "belli" e problemi "brutti." Nella pratica — lo sappiamo tutti — uno legge un problema e dice: "*Questo è bello ... mi piace*"; ne legge un altro e pensa: "*Mamma mia, quant'è brutto questo problema.*" Notare che non è detto che brutto significhi sbagliato, né che bello equivalga a valido. Allora che cosa abbiamo in mente quando diciamo problema bello e problema brutto? È solo una questione di gusti?

Pensandoci un po' sono venute fuori alcune risposte che voi potete condividere o no. Non crediamo però che sia del tutto una questione di gusti: chiameremmo "bello" un problema se troviamo che nell'enunciato e nelle domande del problema si coglie quello che ci sembra sia importante nella fisica che vogliamo insegnare. Al contrario lo chiameremo "brutto" se il problema è banale, poco significativo o, peggio ancora, se in un certo modo l'uso di quel problema contraddice ciò che ci siamo proposti nell'insegnamento: mentre abbiamo cercato d'insegnare certe cose in un certo modo, non possiamo assegnare un problema che trasmette agli studenti un messaggio secondo cui ciò che conta è una cosa diversa.

A questo proposito ci pare interessante proporvi una citazione di Rogers [4]. La questione che pone Rogers è: cosa cerchiamo quando prepariamo delle prove, un esame: vogliamo vedere se lo studente *conosce* certe cose o se *ha capito* certe cose?

> " [...] Se il nostro obbiettivo è la comprensione, come la gran parte degli insegnanti di *qualsiasi* corso di fisica dichiarano, dobbiamo esaminare con molta attenzione le nostre prove d'esame.
>
> Supponiamo di aver tenuto un corso di grande respiro, nel quale abbiamo insegnato nel modo migliore argomenti scelti per mostrare la natura delle leggi fisiche, per illustrare il carattere delle argomentazioni teoriche, per chiarire che pensare in modo scientifico significa ragionare correttamente su dati selezionati con cura. Se poi all'esame finale poniamo la domanda "quanto tempo impiega un sasso a cadere da fermo in un pozzo profondo 12 metri?" avremo smentito le nostre dichiarazioni.

Poco male se c'è una sola domanda di questo tipo; anzi essa può mettere a suo agio lo studente che dai suoi studi precedenti abbia tratto la convinzione che la fisica consiste nel "mettere i numeri nella formula giusta." Può anche servire come mezzo "disciplinare" per costringere a leggere e a studiare. Inoltre incoraggia il principiante, proponendogli un compito iniziale modesto, che non richiede praticamente nessuno sforzo mentale.

A titolo di cortesia faremmo quindi bene a inserire qualche domanda di questo tipo; ma se ne metteremo parecchie, nelle prove in corso d'anno o nell'esame finale, avremo rovinato il corso: gli studenti si prepareranno in funzione di quelle domande; gli studenti dell'anno successivo lo verranno a sapere e daranno scarso peso alle questioni più profonde, alle discussioni filosofiche: il consiglio che gli verrà trasmesso sarà "**imparati le formule e studiati le leggi la notte prima dell'esame**."

Un collega in visita da un'altra scuola, che desideri informazioni sul nostro corso, farà bene a chiederci per prima cosa: "*Posso vedere i tuoi problemi d'esame?*." Dopo di che inarcherà le sopracciglia e se ne andrà via assai dubbioso. [...]"

Ora la questione del sapere a memoria le formule può essere controversa, anche da un punto di vista spicciolo, in questi termini: lo studente che svolge un compito o che sostiene un esame scritto può portarsi un libro? Gli si può permettere di avere accesso alle formule, a dati numerici ecc.? Si può discutere su questo, e infatti le posizioni di diversi insegnanti possono essere opposte. Qual'è la posizione di Rogers? Lui dice [5]:

" [...] Per convincere gli studenti che non mi aspetto da loro che sappiano semplicemente mettere certi numeri in certe formule, io uso impegnarmi pubblicamente, all'inizio del corso, che *in tutte le prove le formule occorrenti saranno liberamente disponibili*. Difatti molte formule (senza spiegazioni) si trovano stampate sui moduli che usiamo per gli esami. Ciò nonostante, la matricola diffidente alla vigilia della prima prova impara a memoria

$$s = v_0\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2$$

e si trova di fronte alle seguenti domande:

Nella relazione $s = v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$

a) che cosa è v_0 ?

b) che cosa esprime $v_0\, t$?

c) spiega da dove viene il fattore $1/2$.

Dunque la formula è *data*, ma su di essa vengono poste domande 'imbarazzanti.'

[...]"

Potrebbe essere interessante seguire ogni tanto questa strada; perché non provare? Non facendo solo richieste del tipo: "Calcola questo ... Si determini la tal cosa ..." ma dando problemi dove si chiede: "Perché compare il fattore 1/2 in quella formula? Che cosa vuol dire quel certo simbolo?" e così via.

* * *

Per finire vorremmo accennare all'argomento che si legge nella finestra. Quando un insegnante ha dato un problema — si tratti per esempio di un compito scritto — e lo deve correggere, valutare, esprimere il suo giudizio in un voto, a volte sorgono delle difficoltà.

Difficoltà nel valutare una soluzione

Spesso ci si trova in difficoltà: lo studente **spiega cose ovvie**, poi **omette spiegazioni** che riteniamo **importanti**.

Due osservazioni:

- Può darsi che il difetto sia nell'enunciato del problema.
- Insegnare significa, in una certa misura, **educare al consenso**.

Però è una questione di **misura**:

- SÌ regole del gioco
- NO catechismi
- NO "lettura del pensiero."

Consiglio finale:

Chi prepara un problema dovrebbe sempre **far provare la soluzione a un collega**.

Per esempio può accadere che lo studente si dilunghi a spiegare cose che noi reputiamo ovvie ("*Se le poteva risparmiare ...*," commentiamo), e magari invece non riporta delle spiegazioni che noi pensavamo essenziali: come ci dobbiamo comportare? Su questo si possono fare alcune osservazioni.

La prima è che dovremmo cercare di capire, con onestà, se il difetto non sia nell'enunciato stesso del problema; sulla linea dell'Esempio 1 che abbiamo visto sopra, sarebbe bene che l'enunciato del problema mettesse più in chiaro "le regole del gioco," cioè quello che si vuole e quello che non si vuole dallo studente, quello che si dà o no per scontato. È molto probabile che ciò comporti di allungare l'enunciato, e questo certamente è un inconveniente, ma può essere utile proprio per ovviare alle difficoltà che si possono presentare dopo.

Un'altra osservazione — che meriterebbe di essere sviluppata meglio — è che insegnare significa anche, in qualche misura, "educare al consenso," intendendo con ciò che chi studia deve pure imparare quali sono le cose da noi ritenute importanti e quali no, quali sono accettate come pacifiche, quali quelle su cui c'è da discutere ecc.: banalizzando si potrebbe dire che lo studente deve imparare a riconoscere quali sono le cose che il professore vuole gli siano dette! Al di là della battuta questo aspetto fa parte inevitabilmente di qualunque forma d'insegnamento, di qualunque materia, e la fisica non fa eccezione.

Resta naturalmente una questione di misura, perché non bisogna nemmeno che l'insegnamento assuma forma di catechismo; come nell'Esempio 4 in cui "i condensatori sono sempre piani e ideali, e quindi il campo elettrico dentro un condensatore è sempre uniforme e zero fuori," come se le dimensioni non fossero cosa di cui preoccuparsi. E non bisogna neppure pretendere, come abbiamo già detto, che lo studente impari a leggere nel pensiero del docente.

Ecco un esempio che può essere caratteristico. Immaginate di dare un problema in cui c'è una particella che si muove in un campo magnetico uniforme, con velocità iniziale perpendicolare al campo, così da avere una traiettoria circolare; se nel problema serve di calcolare il raggio di questa traiettoria, può capitare che lo studente usi direttamente la formula; la sa, magari l'ha imparata a memoria, che altro deve fare?

ESEMPIO 10 – (Maturità sperimentale 1983 – 3)

> Un fascio di protoni, ciascuno dei quali possiede una energia cinetica E_c, è proiettato in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$.
>
> Nella ipotesi che la direzione del fascio sia perpendicolare a $\vec{B}$, si determini in funzione di B, il raggio e il periodo del moto circolare risultante.
>
> [...]

L'insegnante potrebbe obiettare: "*Ma io volevo che la ricavasse*" oppure "*volevo che mostrasse che l'ha capita.*" Va bene, ma questo, ancora una volta, significa non aver chiarito le regole del gioco.

A quell'insegnante diremmo: se tu vuoi che te la ricavi, dillo; e se vuoi assicurarti che l'ha capita, invece di limitarti a chiedere quant'è il raggio, aggiungi — alla maniera di Rogers — un'altra domanda, per esempio: "Come mai nel raggio, alla fine del conto, entra la massa della particella?" Oppure: "Perché la massa della particella ha importanza per determinare il raggio della traiettoria?"

Porre una domanda in questi termini e vedere che cosa risponde lo studente può essere più indicativo che non chiedere di dare la dimostrazione, perché la dimostrazione lo studente può anche copiarla dal libro o averla imparata a memoria, senza averla capita.

A proposito delle difficoltà che possono derivare dall'enunciato di un problema, la nostra esperienza personale di tantissimi anni, dopo avere preparato innumerevoli problemi per prove d'esame, è quella che vedete nella finestra: chi prepara un problema — ma anche chi prende un problema da un testo — dovrebbe *sempre* provare a farsi la soluzione, e se ha inventato lui il problema dovrebbe sempre passarlo ad un collega perché lo risolva.

Si potrà dire che è una perdita di tempo, che è noioso, ed è in parte vero; ma abbiamo imparato, e tante volte a nostre spese, che quando lo si trascura questa precauzione spesso ci s'accorge — troppo tardi — di aver preso una svista, di aver dimenticato di dire qualcosa, o di averlo detto in modo poco chiaro. E allora ci si trova nella spiacevole situazione di dover dire in aula: "*Ragazzi, guardate che qui andava inteso che ...*"

Appendice 1. Discussione: sintesi delle risposte di E.F.

Risposta a un intervento di Paolo Violino:

A proposito della questione del numero di cifre significative nei calcoli, avevo premesso due cose: una era che un certo dissenso me l'aspettavo; l'altra che per spiegarmi bene avrei avuto bisogno di molto più tempo.

Devo dire che mentre preparavamo questa relazione, la questione ci ha dato da pensare. Tra noi ci siamo chiesti: quando ci troviamo davanti alla risoluzione di un problema svolto da uno studente, quand'è che ci va bene e quand'è che non ci va bene e perché?

Per capirlo abbiamo cominciato a individuare i casi estremi. È ovvio che se uno studente mi scrive un risultato con 10 cifre (in una situazione normale) io gli faccio un segnaccio; però anche il comportamento opposto non mi va bene.

Mi spiego con un episodio capitato a uno scritto dato l'anno scorso. Nell'enunciato del problema era detto più o meno: "Un acceleratore lineare per elettroni è lungo 2 km ... ecc." C'era scritto proprio 2; poi il problema continuava...

Uno studente, che incidentalmente era il migliore che ho avuto l'anno scorso e ha poi superato brillantemente l'esame, nella soluzione mi ha scritto testualmente: "*Siccome il dato è fornito con una sola cifra, io farò tutti i conti con una sola cifra.*"

Confesso che leggendo questa dichiarazione mi sono messo a ridere, perché secondo me era pura mancanza di buon senso. Chiaramente se io dico 2 km non mi sto impegnando su come ho misurato, o con quale errore; avrei forse dovuto scrivere 2.000 km? Nel problema non cambiava assolutamente nulla se l'acceleratore misurava esattamente 2.000 o 2.005 o 2.010 km; la lunghezza serviva solo per calcolare il tempo proprio degli elettroni (era un problema di relatività). Quindi il valore esatto non era affatto rilevante; era però importante che fosse dell'ordine di 2 km. Insomma da quel dato non si poteva arguire che tutti i conti andavano fatti con una cifra.

Perciò dico che tutta la questione va affrontata con un certo buon senso; dalla nostra esperienza abbiamo visto che normalmente i dati dei problemi vengono forniti con 2 o 3 cifre, e che di solito ci dichiariamo soddisfatti se chi fa i conti ci dà un risultato con 2 o 3 cifre.

Certamente qualche volta questo limite può non essere sufficiente, ma solo in casi molto particolari; ecco perché ho scritto "in linea generale un risultato numericamente corretto all'1% è accettabile." Con "numericamente" intendo dire che le inevitabili approssimazioni che si fanno nel calcolo numerico abbiano salvato 2 o 3 cifre significative, cosa che di solito è garantita con gli attuali calcolatorini.

Credo che chiunque corregge problemi d'esame si comporti così; nessuno si mette a guardare se le cifre del risultato finale sono tutte rigorosamente accettabili in conseguenza dell'ipotetica incertezza sui dati iniziali.

Violino ha poi affermato che non gradirebbe sentirsi rispondere che l'area di un tavolo di 1 m di raggio è "$\pi\,\mathrm{m}^2$," dal momento che π, come numero irrazionale, ha infinite cifre. A me questo sembra uno degli "idola" dei fisici, per cui i numeri rappresentabili con un numero finito di cifre sono belli, mentre π non è bello perché ha infinite cifre. Ma π è un numero come un altro; il fatto che noi adoperiamo un certo tipo di rappresentazione che ci obbliga a scriverlo con infinite cifre non lo fa essere più brutto. Così se uno studente in un risultato mi scrive "$\sqrt{2}$" io non trovo niente da ridire, a meno che non sia necessario sapere quanto vale $\sqrt{2}$ in rappresentazione decimale, per esempio perché deve confrontarlo con qualcos'altro.

Naturalmente, come avevo già detto, c'è un'eccezione: se la domanda fosse formulata in questo modo: "Ho misurato un tavolo circolare con un metro da sarti, ed ho trovato che il raggio è 1 m. Quant'è l'area?" In questo caso Violino ha perfettamente ragione, perché viene descritto un esperimento, viene specificato lo strumento di misura e lo studente deve sapere che con quello strumento non potrà ottenere la misura se non con una certa incertezza e non può darmi il risultato con 10 cifre, ma nemmeno con 3.

Comunque sono convinto che su questo argomento ci sarebbe ancora moltissimo da discutere; a me premeva soprattutto mettere l'accento sulla confusione che continuamente viene fatta tra gli errori di misura e le approssimazioni numeriche: si tratta di due cose totalmente indipendenti.

Risposta a un intervento di Cristiano Lucchesini:

Sono state poste un buon numero di questioni. La prima osservazione, secondo me la più profonda, meriterebbe una lunga discussione: "*C'è qualche difficoltà di tipo propriamente cognitivo, di atteggiamento, di maturazione intellettuale che si riscontra nello studente alle prese con un problema? Il modo di affrontare il lavoro che si richiede per risolvere un problema di fisica ha qualcosa di speciale?*"

Io non so dare una risposta — e anche se la sapessi dare non credo che la potrei dare in pochi secondi — però probabilmente c'è qualcosa di vero. So che nel caso della matematica degli studi ci sono: la risoluzione di problemi di matematica mobilita delle capacità intellettuali che sono diverse da quelle richieste per lo studio o la comprensione dei procedimenti deduttivi.

Nella fisica si aggiunge forse qualcosa di più, perché c'è l'aspetto generale del problema come situazione in cui uno, bene o male, deve trovare da sé la strada della soluzione: questa è la caratteristica e la difficoltà fondamentale del problema. In proposito si potrebbe anche tentare una distinzione tra "problema" ed "esercizio": parlerei di esercizio quando la strada è già tracciata e si sa quello che si deve fare. Inoltre, nel problema di fisica è richiesta la conoscenza di dati di fatto (se è un buon problema dovrebbe essere così); può essere necessario, come si è visto, trovare le adatte schematizzazioni o approssimazioni; se invece vengono suggerite, le si devono comunque conoscere; si richiede quindi un lavoro diverso, non più completamente definito e probabilmente di difficoltà superiore.

Certamente non si può pretendere che gli studenti sappiamo risolvere i problemi se non li abbiamo educati a farlo, cioè se non abbiamo insegnato in maniera tale che essi vedano il problema come un elemento centrale dello studio e della comprensione della fisica.

Dal nostro punto di vista — dal mio sicuramente — la fisica è problemi, tanto che tradizionalmente qui a Pisa, ma credo anche altrove, gli esami (parlo degli esami universitari) si fanno quasi sempre attraverso problemi. È rarissimo che si chieda: "*Dimmi l'enunciato tale o dimostrami la cosa talaltra.*" Quindi per noi la comprensione della fisica si valuta attraverso problemi, scritti e orali. Però è chiaro che per questo ci vuole un addestramento, un'abitudine.

Il problema è accessibile? non è accessibile? quando, a che età? Tutta una bellissima serie di questioni. La mia debole opinione — debole perché non sono particolarmente esperto in queste cose — è che sui problemi si possa cominciare a lavorare abbastanza presto, che non ci sia un'età prima della quale non è possibile proporre problemi di fisica. Però, di nuovo, si tratta di vedere che insegnamento si è fatto, se i ragazzi sono stati stimolati ad affrontare la fisica in quella maniera. Certamente da noi in Italia si fa pochissimo in questa direzione.

Appendice 2. Qualche considerazione sugli esempi proposti

Esempio n. 1

Per stimare la pressione media del gas nella canna del fucile ipotizziamo, in prima approssimazione, che il lavoro fatto dal gas mentre il proiettile viene accelerato sia pari all'energia cinetica finale del proiettile: questo equivale a trascurare ogni forma di attrito, cosicché la pressione sarà certamente sottostimata.

Indichiamo con

$\bar{p}$	la pressione media del gas nel fucile
r	il raggio interno della canna
ℓ	la lunghezza della canna
m	la massa del proiettile
v	la velocità finale del proiettile.

Si ha

$$\bar{p}\,\pi r^2 \ell = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 \quad \text{da cui} \quad \bar{p} = \frac{m\, v^2}{2\pi r^2 \ell}\,.$$

Si tratta adesso di dare delle ragionevoli stime numeriche per le grandezze citate; ponendo

$$\begin{aligned} m &\simeq 10\,\mathrm{g} \\ v &\simeq 800\,\mathrm{m/s} \\ r &\simeq 4\,\mathrm{mm} \\ \ell &\simeq 80\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

si ricava $\bar{p} \simeq 8 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa} \simeq 800\,\mathrm{atm}$.

Una via del tutto diversa ed indipendente si può seguire, partendo da dati relativi alle reazioni esplosive. Questi non sono certamente familiari a uno studente: il conto che segue va dunque inteso come una verifica dell'attendibilità della stima precedente.

Il calore di esplosione q per vari tipi di materiali è compreso tra 700 e $1500\,\mathrm{cal/g}$ e il volume v_0 di gas prodotto per unità di massa varia da 270 a $1000\,\mathrm{cm^3/g}$, a temperatura e pressione standard. In questa seconda parte indichiamo con m la massa della polvere da sparo.

Dal secondo dato si può ricavare la quantità di sostanza (*vulgo*: numero di moli) per unità di massa, cioè l'inverso della massa molare del gas prodotto, perché essendo

$$p_0\, V_0 = p_0\, v_0\, m = n\, R\, T_0 \quad \text{si ha} \quad \frac{n}{m} = \frac{p_0\, v_0}{R\, T_0}.$$

Per un valore intermedio $v_0 = 500\,\mathrm{cm^3/g}$ si trova $M = 45\,\mathrm{g/mol}$ che lascia intendere si possa trattare di un gas triatomico.

Il calore di esplosione dà invece una stima dell'energia interna del gas prodotto e quindi della temperatura di questo:

$$U = q\,m = n\,C_{\rm V}\,T \quad \text{da cui} \quad T = \frac{q\,m}{n\,C_{\rm V}}$$

ove si potrà porre $C_{\rm V} \simeq 4\,R$.

Trascurando ora gli scambi di calore e il lavoro fatto dal gas e assumendo quindi che la temperatura si mantenga costante, scriviamo

$$\bar{p}\,\bar{V} = n\,R\,T$$

indicando con $\bar{V}$ il volume del gas a metà percorso del proiettile, cioè $\pi r^2 \ell/2$.

Semplificando si ottiene

$$\bar{p} = \frac{2\,q\,m\,R}{C_{\rm V}\,\pi r^2 \ell} = \frac{q\,m}{2\,\pi r^2 \ell}\,.$$

Coi seguenti valori numerici

$$\begin{aligned} q &\simeq 10^3\,\text{cal/g} \simeq 4 \cdot 10^3\,\text{J/g} \\ m &\simeq 5\,\text{g} \end{aligned}$$

si trova che la temperatura del gas raggiunge i 5600 K e si ricava infine

$$\bar{p} \simeq 2.6 \cdot 10^8\,\text{Pa} = 2600\,\text{atm}.$$

Per quanto detto, questa è certamente una stima per eccesso.

L'obbiettivo del problema era di stimare l'ordine di grandezza della pressione del gas: l'accordo fra le due strade seguite è fin troppo buono, e possiamo dire che la pressione sarà compresa tra 1000 e 2000 atm.

Esempio n. 2

Chiamiamo σ la sezione del tubo, q la portata della fontana, n il numero di molecole per unità di volume di acqua e v la velocità media delle molecole. Allora

a) Il numero di molecole che escono per unità di tempo è

$$N = n\,q = 3.3 \cdot 10^{24}\,\text{s}^{-1}.$$

b) Essendo $q = \sigma\,v$ si ha $v = q/\sigma = 0.5\,\text{m/s}$.

c) Consideriamo un conduttore di rame (densità $\delta = 9 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$, massa atomica $M = 6 \cdot 10^{-2}\,\text{kg/mol}$, un elettrone di conduzione per ogni atomo). Se e è la carica dell'elettrone (in modulo $1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$), una corrente i corrisponde a $N = i/e \simeq 4 \cdot 10^{19}$ elettroni al secondo.

D'altra parte abbiamo detto che nel rame il numero di elettroni (di conduzione) per unità di volume corrisponde al numero di atomi per unità di volume, cioè $n = N_\mathrm{A}\, \delta/M$ essendo N_A la costante di Avogadro ($6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$): $n \simeq 9 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$.

In analogia al caso della fontana, si trova allora $v = q/\sigma = N/(n\,\sigma) \simeq 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$, con $\sigma = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$.

d) Se il tubo che porta l'acqua alla fontana rimane pieno, l'acqua comincia a sgorgare immediatamente anche se il rubinetto è posto lontano: quella che conta non è la velocità media delle molecole d'acqua ma la velocità di propagazione dell'onda di pressione (dell'ordine della velocità del suono nell'acqua).

Analogamente, poiché gli elettroni di conduzione sono presenti in tutto il conduttore, la luce si accende istantaneamente perché quella che conta è la velocità con cui si propaga il campo elettrico che determina il movimento degli elettroni (dell'ordine della velocità della luce).

Esempio n. 3

Se si va in bicicletta mentre piove si nota che, anche a bassa velocità, la schiena rimane praticamente asciutta; ciò significa che nel moto relativo la pioggia cade con un'inclinazione apprezzabile rispetto alla verticale. Se ad esempio stimiamo tale angolo α in circa 30°, con una velocità V della bicicletta dell'ordine di 5 m/s troviamo per la velocità verticale della pioggia $v \simeq V/\operatorname{tg}\alpha \simeq 9\,\mathrm{m/s}$.

Se così è, per ripararsi al meglio dalla pioggia in una giornata ventosa (un vento a $9\,\mathrm{m/s} \simeq 30\,\mathrm{km/h}$ è definito "teso"), si dovrebbe tenere l'ombrello a 45°, cosa che appare sostanzialmente conforme alla nostra esperienza.

Un'altra osservazione che dà una stima concorde con questa è che andando in macchina o in treno le tracce delle gocce sui finestrini possono essere quasi orizzontali; ciò significa che la velocità verticale della pioggia è molto minore della velocità della macchina o del treno (che può essere dell'ordine di 40 m/s).

Ora, se la resistenza dell'aria fosse trascurabile, si potrebbe calcolare la velocità della pioggia conoscendo (o stimando) l'altezza delle nuvole. Se nel paesaggio circostante c'è qualche montagna è facile vedere che la base delle nubi può essere tra i 600 e i 1000 m; per un valore h di 800 m si avrebbe una velocità $v = \sqrt{2\,g\,h} \simeq 130\,\mathrm{m/s}$ che è assolutamente inverosimile: dunque la resistenza dell'aria non è affatto trascurabile.

Posto che la resistenza dell'aria cresce almeno proporzionalmente con la velocità, l'equazione del moto della goccia di pioggia si scrive

$$m\,a = m\,g - f(v)$$

e si vede subito che deve esistere un valore particolare della velocità per cui l'accelerazione è nulla: $v = f^{-1}(m\,g)$. Se dunque questa velocità venisse raggiunta, essa si manterrebbe costante, e non potrebbe crescere ulteriormente.

Esempio n. 7

Assumiamo inizialmente che il campo possa essere trattato come uniforme: è noto che l'altezza h cui giunge il proiettile è

$$h = \frac{v^2}{2\,g}$$

avendo indicato con g l'accelerazione di gravità sulla superficie della Luna. Numericamente si avrà $h \simeq 1.51 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 151\,\mathrm{km}$. Rispetto al raggio della Luna ($R \simeq 1700\,\mathrm{km}$) h non è del tutto trascurabile (è circa il 9%), e con una semplice proporzione si può calcolare la variazione del campo di gravità:

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 0.84\,.$$

Il risultato corretto si ha usando l'espressione esatta del potenziale gravitazionale: detta M la massa della Luna,

$$V = -\frac{G\,M}{r} = -\frac{g\,R^2}{r} \quad \text{essendo} \quad g = \frac{G\,M}{R^2}.$$

Allora, imponendo la conservazione dell'energia (per unità di massa) si ha

$$V(r) = V(R) + \tfrac{1}{2}v^2 \quad \text{da cui} \quad r = \frac{2\,g\,R^2}{2gR - v^2} = 1.87 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

e infine

$$h = r - R = \frac{2\,g\,R^2}{2gR - v^2} - R = \frac{R\,v^2}{2gR - v^2} \simeq 1.66 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 166\,\mathrm{km}.$$

Vale la pena di sottolineare il fatto che la scelta della Luna non è casuale, e che lo stesso problema riferito alla Terra sarebbe più complicato.

Come riportato nel testo, sulla Luna non c'è atmosfera e questo evita di dover dire esplicitamente di trascurarne l'effetto, cosa per altro assolutamente scorretta, come si è visto nel problema della pioggia.

Un secondo motivo — più riposto, ma non meno importante — riguarda la velocità di rotazione che sulla Luna è, al massimo, di circa $4\,\mathrm{m/s}$. Al contrario la velocità di rotazione della Terra (dell'ordine di $350\,\mathrm{m/s}$ alle nostre latitudini) non è trascurabile rispetto a quella del proiettile. Anche tenendone conto nel calcolo dell'energia cinetica iniziale, bisogna notare che in un riferimento inerziale il proiettile non parte in direzione radiale e descrive un'orbita ellittica: di conseguenza alla massima distanza (apogeo) resta una componente tangenziale della velocità e l'energia cinetica non si annulla mai.

Dunque il calcolo basato sulla semplice conservazione dell'energia non è sufficiente e occorrerebbe considerare anche quella del momento angolare.

A conti fatti, l'effetto principale della rotazione terrestre è di far deviare il proiettile dalla verticale (per la forza di Coriolis) mentre l'altezza massima raggiunta non differisce molto da quella che si troverebbe trascurando la rotazione; tutto questo però non è facile da giustificare *a priori* e non ci sembrerebbe corretto proporre agli studenti una tale situazione.

Per concludere, ci pare interessante discutere brevemente questo problema anche da un diverso punto di vista, quello del "numero di cifre significative."

Notiamo subito che i due dati del problema sono forniti con tre cifre; intesi come risultati di misura essi avrebbero rispettivamente un'incertezza dello 0.07% e 0.3%, per cui l'altezza (secondo l'espressione approssimata) si scriverebbe come $(1.512 \pm 0.007) \cdot 10^5\,\mathrm{m}$. Ma è evidente che il valore della velocità del proiettile è puramente indicativo dell'ordine di grandezza: si dovrebbe allora scrivere $7 \cdot 10^2\,\mathrm{m/s}$, intendendo con questo una velocità compresa tra 650 e 750 m/s, e ricavare di conseguenza $h = (1.5 \pm 0.2) \cdot 10^5\,\mathrm{m}$.

Seguendo la regola empirica del numero di cifre si otterrebbe un risultato comunque errato: assumendo tre cifre significative dovremmo dedurre $h = 1.51 \cdot 10^5\,\mathrm{m}$, sottovalutando così l'errore; ritenendo invece la velocità nota con una sola cifra, scriveremmo $h = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{m}$, che non va d'accordo col valore trovato sopra.

Tutto questo per l'essenza del problema è dunque una complicazione inutile; assumendo invece che i dati siano *convenzionalmente* esatti e che normalmente si danno $2 \div 3$ cifre (senza associarvi alcun errore) un risultato espresso come $1.51 \cdot 10^5\,\mathrm{m}$ o come 151 km o anche 150 km sarà ugualmente accettabile.

Continuando nel problema, occorre introdurre il raggio della Luna: sopra si è scritto 1700 km, seguendo la stessa convenzione, ma quel valore ha solo due cifre corrette. Anche qui, se avessimo detto $R = 1.7 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ e avessimo avuto la pretesa di seguire la propagazione degli errori avremmo avuto dei problemi: come trattare in modo elementare l'errore nell'espressione di h, tenuto conto che gli errori nel numeratore e nel denominatore sono correlati?

Con la regola semplificata delle "due cifre significative" avremmo invece trovato $r = 1.9 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ e di conseguenza $h = r - R = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{m}$ con una sola cifra a causa della *cancellazione*; qui l'approssimazione numerica finisce anche col nascondere del tutto l'analisi che è stata fatta dal punto di vista fisico. Ci dovevamo quindi sentire obbligati a porre ad esempio $R = 1738\,\mathrm{km}$ per il raggio della Luna? Quello che vogliamo studiare non dipende dal valore più o meno preciso di R e lo studente ricorda certamente meglio un valore "arrotondato."

I risultati che abbiamo dato sopra, nella soluzione, sono invece ottenuti ignorando gli errori associati alle grandezze. Scritta l'espressione finale di h, e inseriti i dati nel calcolatorino, si ricava $1.6600239... \cdot 10^5$ m che "ragionevolmente" abbiamo arrotondato a 166 km.

Notiamo ancora che se avessimo utilizzato come risultato intermedio il valore di r approssimato con 3 cifre ($1.87 \cdot 10^6$ m) il risultato finale (h) avrebbe avuto 2 sole cifre, sempre per una questione di cancellazione; il suggerimento pratico è dunque quello di conservare il più possibile i dati nel calcolatore tascabile.

Quanto poi a chiedersi in che misura il risultato numerico finale cambia in funzione dei dati, la cosa può essere certamente interessante ma non è l'obiettivo di questo problema e anzi, come si è visto, una tale analisi — specie nella forma semplificata — potrebbe far perdere di vista alcuni aspetti essenziali.

Bibliografia

[1] R. Bagnolesi: "Prove scritte di Fisica per la Maturità Scientifica Sperimentale: Testo e proposte di soluzione"; *La Fisica nella Scuola*, **23**, p. 81 e 126 (1990); **24**, p. 31 (1991).

[2] E. Rogers: *Teaching Physics for the Inquiring Mind* (Princeton 1962) pag. 75 (traduzione nostra).

[3] P.A. Tipler: *Invito alla Fisica* (Zanichelli, Bologna 1991) vol. 1, pag. 210, quesito n. 4.

[4] E. Rogers: *loc. cit.* pag. 57 (traduzione nostra).

[5] E. Rogers: *loc. cit.* pag. 68 (traduzione nostra).