INDUZIONE ELETTROMAGNETICA LEGGE DI FARADAY

Elio Proietti

Abstract (Versione giugno 2012)

Comunemente (cfr. ad es. [1] §7.3) la legge del flusso di Faraday viene ricavata matematicamente per il caso del "flusso tagliato" (campo magnetico stazionario e circuito in movimento) calcolando la circuitazione della forza di Lorentz. Assunta poi su base sperimentale la validità generale di tale legge ed applicando la medesima al caso di un circuito fermo in un campo magnetico variabile, se ne trae matematicamente la 3a equazione di Maxwell:
F.Lorentz $\rightarrow$ L.Faraday (per il circuito in moto in un campo stazionario)
L.Faraday $\rightarrow$ 3a Maxwell (per il circuito fermo in un campo variabile)
Tale sdoppiamento teorico induce un personaggio del calibro di Feynman a commentare la legge del flusso di Faraday come segue ([3] Vol.2 §17.2): "We know no other place in physics where such a simple and accurate principle requires for its real understanding an analysis in terms of two different phenomena". A prescindere da tale strano commento, quest'articolo si propone di sottoporre l'esatta relazione tra la legge del flusso di Faraday e la 3a equazione di Maxwell ad una disamina rigorosa.
Tutte le formule elettromagnetiche sono scritte nel sistema di Gauss.

1 Circuitazione della forza elettromagnetica

Forza elettromagnetica $\boldsymbol{F}$ agente su una carica q:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{1}$$

Circuitazione di $\boldsymbol{F}/q$ lungo una curva chiusa γ ferma o mobile [1]:

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_\gamma \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot \boldsymbol{dl}} \tag{2}$$

Per interpretare fisicamente la circuitazione $\mathcal{E}$ occorre materializzare la curva γ con un *filo conduttore* (fermo o in moto con γ) al quale le cariche di conduzione q siano vincolate [2]. In tali condizioni la circuitazione $\mathcal{E}$ prende il nome di *forza elettromotrice* e corrisponde al lavoro compiuto dalla forza elettromagnetica su una carica unitaria che percorra il circuito; tale definizione è operativa, in quanto la fem è misurabile, in linea di principio, inserendo un voltmetro nel circuito γ.

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \qquad \textit{circuitazione } \mathcal{E} = \textit{forza elettromotrice } \mathcal{F} \textit{ (solo nei circuiti a spira } \gamma\textit{)} \tag{3}$$

[1] Se curva chiusa γ è in moto, la circuitazione si intende calcolata in una posizione istantanea.

[2] Sono quindi escluse quelle "eccezioni alla regola del flusso" (Feynman [3] Vol.2 .17-4) nelle quali le cariche di conduzione seguono a tratti un percorso non obbligato o si muovano in un mezzo il cui moto non sia descritto cinemeticamente da quello di una curva γ.

2 Flusso concatenato

Il flusso del campo $\boldsymbol{B}$ attraverso ad una superficie orientata S (generalmente non piana) di contorno γ è definito dall'integrale:

$$\boxed{\Phi_S(\boldsymbol{B}) = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dS} \tag{4}$$

Il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ è solenoidale:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{5}$$

Il flusso $\Phi_S(\boldsymbol{B}) = \Phi_\gamma(\boldsymbol{B})$ è detto *concatenato con la spira* γ, essendo uguale per tutte le superfici S aventi il medesimo contorno γ. Il versore $\boldsymbol{n}$ che orienta la superficie S nel calcolo del flusso concatenato è convenzionalmente orientato in modo *destrorso* rispetto al verso del circuito γ.
Per un campo $\boldsymbol{B}$ solenoidale si può definire il potenziale vettore $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} \tag{6}$$

ed il flusso concatenato può scriversi nella forma:

$$\Phi_S(\boldsymbol{B}) = \Phi_\gamma(\boldsymbol{B}) = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\ \cdot\boldsymbol{n}\, dS = \oint_\gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{7}$$

3 Variazione del flusso concatenato

T. 1 *Se $\boldsymbol{B}$ è un campo solenoidale variabile nel tempo t ed il circuito γ è in moto, la derivata del flusso $\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})$ rispetto al tempo vale:*

$$\boxed{\frac{d\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})}{dt} = \iint_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\, dS + \oint_\gamma \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{dl}} \tag{8}$$

ovvero in forma equivalente:

$$\frac{d\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})}{dt} = \oint_\gamma \left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}\right)\cdot d\boldsymbol{l} \tag{9}$$

■ La formula (8) corrisponde alla (5.137) p.206 del Jackson [2].
Nelle edizioni antecedenti di questa monografia, la dimostrazione era lunghetta, ma condotta con metodi abbastanza elementari. La dimostrazione che segue è invece rapida ed elegante, grazie all'uso di metodi matematici più sofisticati, in parte tratti dal Jackson [2].
Su un punto P della spira γ avente velocità istantanea $\boldsymbol{v}$ agisce il campo $\boldsymbol{B}$.
Si prendono le mosse dalla relazione fra la derivata totale e quella locale:
$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$
Come noto (ad esempio cfr. [4] Cap.4) sussiste la relazione differenziale:
$\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{B}$
Qui però $\boldsymbol{v}$ non è un campo (funzione di x, y, z) e va trattato come un vettore costante:
$\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{B}$
Un'ulteriore semplificazione nasce dal fatto che il campo $\boldsymbol{B}$ è solenoidale ($\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$), sicchè

riassumendo si può scrivere che:
$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v})$
La derivata del flusso concatenato assume così la forma:
$\frac{d}{dt}\Phi_\gamma(\boldsymbol{B}) = \frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\, dS + \iint_S \mathrm{rot}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v})\, dS$
Basta ora applicare il T. di Stokes all'ultimo integrale per ottenere la (8):
$\frac{d}{dt}\Phi_\gamma(\boldsymbol{B}) = \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\, dS + \oint_\gamma \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dl}$
La forma equivalente (9) si ricava ponendo $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ conformemente alla (6) ed applicando ancora il teorema della circuitazione:
$\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \frac{\partial\, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \mathrm{rot}(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_\gamma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{l}$ ■

Sommando membro a membro la (2) con la (9) moltiplicata per $1/c$ si ottiene:

$$\boxed{\mathcal{E} + \frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})}{dt} = \oint_\gamma (\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) \cdot d\boldsymbol{l}} \tag{10}$$

Questa è una relazione *matematica* comunque valida tra la circuitazione $\mathcal{E}$ della forza elettromagnetica, il flusso concatenato $\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})$ ed il campo $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$:
- con $\boldsymbol{B}$ (solenoidale) variabile o stazionario;
- con la spira γ in quiete o in moto.

4 Legge di Faraday e 3a legge di Maxwell

Se il campo magnetico è stazionario il secondo membro della (10) si annulla [3] e si ottiene la *legge di Faraday* (per il caso del "flusso tagliato"):

$$\boxed{\mathcal{E} = -\,\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})}{dt}} \qquad \textit{legge di Faraday} \tag{11}$$

"La fem $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ indotta in un circuito a spira γ è proporzionale alla variazione di flusso magnetico concatenato $\Delta\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})$ ed è inversamente proporzionale all'intervallo di tempo Δt nel quale tale variazione si verifica."
L'esperienza mostra che nasce una fem indotta $\mathcal{F}$ ogniqualvolta si verificano variazioni di flusso, dovute al moto del circuito γ e/o alla variabilità del cambo $\boldsymbol{B}$ nel tempo. Pertanto si ammette che la legge di Faraday (11) abbia *validità generale*.
Dunque per la legge fisica del flusso dovuta a Faraday il primo membro della (10) è sempre identicamente nullo, perciò deve essere tale anche il secondo membro:

$$\oint_\gamma (\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{rot}(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0 \tag{12}$$

Poichè $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})}{\partial t} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ si perviene alla *terza equazione di Maxwell*:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0} \qquad \textit{terza equazione di Maxwell} \tag{13}$$

Il carattere generale della trattazione matematica svolta mostra che la legge del flusso di Faraday (11) per la circuitazione $\mathcal{E}$ [4] e la terza equazione di Maxwell (13)

[3] Poichè $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ non dipende dal tempo e poichè $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$ (circuitazione nulla).
[4] Ovvero per la fem $\mathcal{F}$ nei circuiti a spira.

sono *completamente equivalenti*, non importa se la spira γ sia in quiete o in moto, nè importa se il campo solenoidale $\boldsymbol{B}$ sia stazionanrio o variabile:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_\gamma(\boldsymbol{B})}{dt} \tag{14}$$

5 Potenziale elettromagnetico

Vista la (6) ed introducendo con la (12) il potenziale scalare V, si può esprimere il campo elettromagnetico $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ in funzione del potenziale elettromagnetico $(\boldsymbol{A}, V)$:

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}} \tag{15}$$

E' bene notare che l'esistenza del potenziale elettromagnetico $(\boldsymbol{A}, V)$ è una *conseguenza della coppia di equazioni di Maxwell*:
$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
Reciprocamente, se valgono le formule (15), allora la coppia di equazioni di Maxwell è identicamente soddisfatta.

Il potenziale elettromagnetico $(\boldsymbol{A}, V)$ non è univocamente individuato.
Detto ϕ un campo scalare arbitrario, la trasformazione:

$$\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\ \phi \qquad V' = V - \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{16}$$

lascia evidentemente il campo elettromagnetico $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ invariato.
Nella fisica delle particelle questa è nota come una *trasformazione locale di gauge*.
Poichè ogni quantità osservabile può essere espressa in termine dei campi $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$, un requisito fondamentale di ogni teoria formulata in termini di potenziali è quello di soddisfare la cosidetta *invarianza di gauge*, cioè che le predizioni di quantità osservabili fatte dalla teoria siano invarianti rispetto a siffatte trasformazioni di gauge.

Riferimenti bibliografici

[1] E.M.Purcell
La fisica di Berkeley - Vol.2 Parte seconda
Zanichelli (1973)

[2] J.D.Jackson
Elettrodinamica classica
Zanichelli (2001)

[3] R.P.Feynman
La fisica di Feynman
Zanichelli (2003)

[4] E.Proietti
Tensori
Monografia privata