LEZIONE 5

Il principio di equivalenza

Cominciamo col dire che il PE esiste già nella fisica newtoniana, anche se non veniva espresso in questi termini prima di Einstein. Galileo dice: tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione. È bene ricordare che Galileo non parla mai esplicitamente di *forza* di gravità: per questo bisogna arrivare a Newton.

È Newton che mette insieme l'esistenza di una forza universale (la gravità), la scoperta di Galileo, e il suo secondo principio, per concludere: la forza di gravità è proporzionale alla massa del corpo su cui agisce: $F = mg$.

Notate: a questo punto g non indica più l'accelerazione di caduta dei gravi, ma l'intensità del campo gravitazionale. Infatti $F = mg$ è l'esatta analoga di $F = qE$ per le forze elettriche. O viceversa: si postula (così fa Newton) che la forza sia proporzionale alla massa, e allora dalla seconda legge si dimostra che l'accelerazione è la stessa per tutti i corpi.

Si usa anche esprimere la proprietà della gravitazione (proporzionalità alla massa del corpo su cui agisce) dicendo che massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali. La motivazione per introdurre due masse la ritengo fin troppo nota per doverla ripetere; tuttavia nello spirito della RG, e in fondo anche per ragioni didattiche, ritengo meglio non introdurre due masse per poi subito ridurle a una. Applicherei il ben noto rasoio di Occam: "entia non sunt multiplicanda præter necessitatem." Visto che una massa basta, perché introdurne due?

Si dice: perché a priori potrebbero anche essere diverse. Ma che vuol dire "a priori"? Noi costruiamo i nostri schemi teorici in base a quello che i fatti sperimentali ci mostrano. I fatti sperimentali mostrano che la forza di gravità è proporzionale alla massa, e non c'è altro da dire.

Anche se non è strettamente necessario per il resto del discorso, faccio notare che a questo punto la proporzionalità della forza di gravità alla massa della sorgente segue dal terzo principio. Infatti se la forza che A esercita su B è proporzionale alla massa di B, e questa è anche (in modulo) la forza che B esercita su A, ecco che quest'ultima forza è proporzionale alla massa del corpo sorgente.

Si può chiedere perché?

Torniamo al punto centrale. Ci si può porre una domanda: perché mai $F = mg$? Nella fisica prima di Einstein questo è un fatto accertato (più avanti discuteremo le verifiche sperimentali) ma senza spiegazione. È vero che si può dire che la ricerca di "spiegazioni" non è necessaria: abbiamo i fatti sperimentali, dai quali ricaviamo una legge. Tuttavia la ricerca di spiegazioni non è sterile, e proprio questo esempio lo dimostra. Einstein si chiede: che motivo c'è che due cose così diverse come gravità e inerzia risultino così strettamente imparentate? È da qui che nasce la sua scoperta: assumere il PE come legge universale della fisica, e trasformare la gravità in un fatto geometrico. Ma su questo torneremo ampiamente.

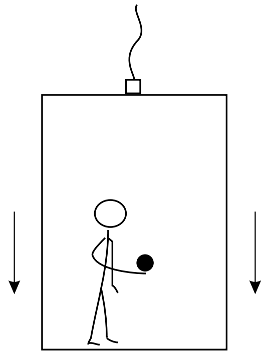

fig. 5–1

Un'altra conseguenza della proporzionalità discende dal fatto che anche le forze apparenti in un rif. accelerato sono proporzionali alla massa (non occorre più distinguere se inerziale e gravitazionale: sono una cosa sola) per cui in un rif. in "caduta libera" (ascensore di Einstein, fig. 5–1) la forza di gravità si cancella. Infatti la forza di gravità agente su un corpo vale $m\vec{g}$, ma c'è poi la forza apparente $-m\vec{a}$. Però l'accelerazione $\vec{a}$ dell'ascensore vale proprio $\vec{g}$, quindi le due forze hanno uguale modulo e versi opposti. Brevemente si dice: nell'ascensore che cade le cose sono "senza peso."

Faccio notare che l'esposizione che ho appena dato indica una linea didattica (a parte la digressione sulle due masse, che invece ho suggerito di dimenticare).

Illustrazioni sperimentali

L'importanza dell'ultimo risultato è tale che sono opportune numerose illustrazioni sperimentali. Ne indico due che si possono fare con mezzi semplicissimi:

1. la bottiglia bucata
2. tavoletta e barrette.

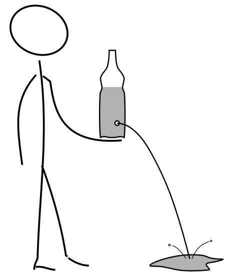

fig. 5–2

1\. Si prende una bottiglia di plastica (da acqua minerale); si riempie d'acqua e si fanno dei forellini sulla parete, vicino al fondo. Se la bottiglia è stappata, l'acqua zampilla dai forellini (fig. 5–2).

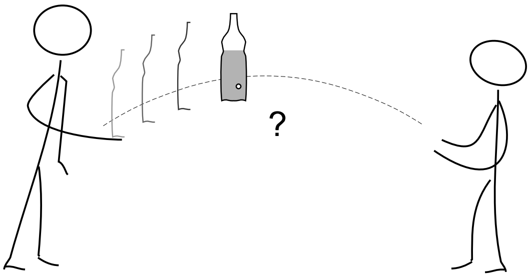

fig. 5–3

Ora si lascia cadere la bottiglia, o la si lancia a un compagno (senza farla ruotare): si constata che durante il volo l'acqua non esce (fig. 5–3). Dunque quando la bottiglia è in volo (caduta libera) nel suo rif. la gravità non c'è più.

Questo è ovvio: la pressione dell'acqua sovrastante, dovuta alla gravità, spinge l'acqua fuori. C'è anche la legge di Torricelli che dice come la velocità del getto dipende da g e da h (altezza del liquido): $v = \sqrt{2gh}$.

2\. Si prepara una tavoletta di legno, due barrette metalliche e un robusto elastico (fig. 5–4). L'elastico va da A a B, passando sotto la tavoletta. La tensione dell'elastico dev'essere tale da non riuscire a sollevare le barrette, ma per poco. In queste condizioni il peso delle barrette è maggiore della tensione dell'elastico (più esattamente, si debbono confrontare i momenti) e le barrette restano appoggiate sulla tavoletta.

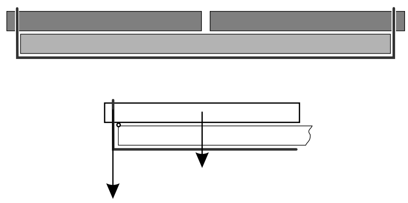

fig. 5–4

Si lascia cadere la tavoletta ... e le barrette schizzano via, a grande distanza (fig. 5–5), mostrando che nel rif. in caduta libera il peso delle barrette non c'è più, e l'elastico è libero di agire come una fionda.

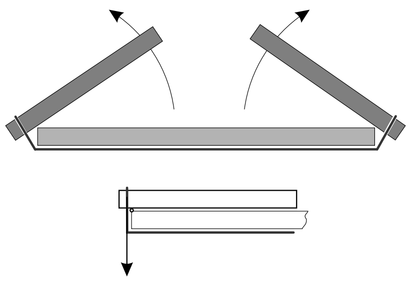

fig. 5–5

Riferimenti in caduta libera

Attenzione: quando parliamo di rif. in caduta libera non intendiamo dire solo in moto verticale (questo è già mostrato dalla bottiglia, che può essere lanciata "a parabola"). In generale, intendiamo che il rif. (laboratorio) si muove sotto l'azione della sola gravità. Il laboratorio può essere ad es. in orbita attorno alla Terra (satellite artificiale). È per questo che in un satellite "i corpi sono senza peso"; non perché siamo lontani dalla Terra.

Ci sono in proposito due errori molto comuni fra i ragazzi. Il primo è di credere che il satellite sia fuori del campo gravitazionale terrestre. A questo si debbono fare due obiezioni: la prima è che il campo si estende anche molto lontano dalla Terra, com'è provato, tra l'altro, dal moto della Luna; la seconda è che molti satelliti artificiali distano qualche centinaio di km dalla superficie della Terra, ossia una distanza piccola rispetto al raggio della Terra. E dato che il campo va come $1/r^2$...

Il secondo errore, che a noi può sembrare assurdo, ma che è facile constatare, consiste nel credere che non ci sia gravità perché c'è il vuoto. Si fa cioè confusione tra pressione atmosferica e gravità. Questo errore è forse causato (o aggravato) dal presentare la pressione atmosferica come qualcosa che spinge dall'alto verso il basso, senza approfondire il discorso. Tra l'altro, è vero il viceversa: nel caso di un'atmosfera planetaria, a differenza di un gas racchiuso in un recipiente, è la gravità la causa della pressione: se non ci fosse la gravità non potrebbe esistere un'atmosfera stabile (e infatti sulla Luna, a causa di una gravità alquanto minore, un'atmosfera non si è potuta formare).

Tornando al rif. in caduta libera: questo può anche essere una sonda spaziale, che percorre una traiettoria complicata, eventualmente passando vicino a diversi pianeti. Sapete che questi passaggi in vicinanza dei pianeti vengono frequentemente sfruttati per aumentare la velocità delle sonde ("effetto fionda"): quindi il moto di una tale sonda è tutt'altro che semplice. Certo non è un'orbita kepleriana. Ma qualunque sia il suo moto, se è dovuto alla sola gravità, parleremo sempre di "caduta libera."

Ancora: il rif. in caduta libera può essere un pianeta: ad es. la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, e per questo motivo sulla Terra la forza di gravità del Sole "non si sente." In altre parole: la Terra è un rif. accelerato ($a = 6 \cdot 10^{-3}$ m/s^2) ma la forza apparente dovuta a quest'accelerazione è compensata dalla forza di gravità del Sole, e la Terra può essere trattata come RI (approssimativamente, se si trascurano gli effetti di marea; ne riparleremo).

Il problema del palloncino

Da un altro punto di vista, le forze apparenti in un rif. accelerato possono essere viste come una "gravità apparente," che però non si distingue da quella "reale." Esempio: un bambino sta seduto in un treno e tiene il filo di un palloncino. Il treno frena: da che parte si sposta il palloncino (fig. 5–6)?

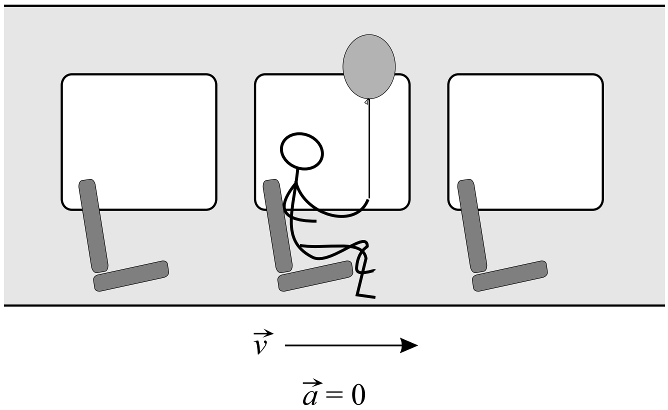

fig. 5–6

Risposta:

1) Oltre al campo "reale" $\vec{g}$ c'è ora il campo "apparente" $\vec{g}_1$, e la gravità risultante è $\vec{g}' = \vec{g} + \vec{g}_1$.
2) Il filo del palloncino sta "verticale," ossia nella direzione della gravità risultante.
3) Il palloncino si sposta *all'indietro* (fig. 5–7).

Ci si può chiedere: ma che cosa fa spostare il palloncino? Rispondo con un'altra domanda: che cosa lo fa stare in alto nelle condizioni consuete? La spinta di Archimede. E come mai c'è la spinta di Archimede? Perché la pressione dell'aria non è la stessa su tutta la superficie del pallone: in basso è maggiore (perché l'aria *pesa*) e perciò la risultante delle forze dovute alla pressione atmosferica è diretta verso l'alto.

Nel treno che frena, che cosa accade all'aria? Viene spinta in avanti dalla forza apparente; quindi la sua densità e pressione aumentano, se pure di pochissimo, nella parte anteriore dello scompartimento, oltre che dall'alto verso il basso. Perciò ora la risultante delle forze di pressione non è più verticale (verso l'alto) ma ha anche una componente all'indietro. E il palloncino si dispone in modo che la tensione del filo possa equilibrare questa forza (o meglio, l'eccesso di questa forza sul "peso" del pallone).

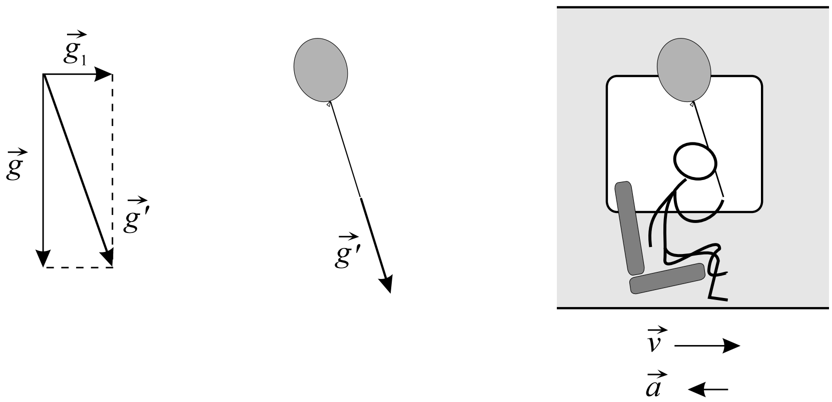

fig. 5–7

Verifiche storiche del PE

A. Galileo (la scoperta).

Ne abbiamo già parlato, e non c'è niente da aggiungere.

B. Newton e il pendolo.

Nei *Principia* Newton afferma di aver sperimentato con pendoli di uguale lunghezza, le cui masse erano diverse per grandezza e costituzione, e di aver verificato (dice entro 10^{-3}) che il periodo dipende solo dalla lunghezza.

C. Newton e i satelliti di Giove.

Sempre nei *Principia*, Newton osserva che i satelliti si muovono attorno a Giove *come se il Sole non ci fosse*, e ne conclude che la forza di attrazione del Sole su Giove, e quelle sui satelliti, stanno in proporzione alle masse. Più esattamente, Newton osserva che se le cose non stessero così, il centro dell'orbita di un satellite non potrebbe coincidere col centro di Giove, come invece accade; e dà anche una stima quantitativa della deviazione conseguente. In termini moderni: nel rif. di Giove la forza di attrazione del Sole sui satelliti *è compensata* dalla forza apparente del rif. Oppure: nel rif. di Giove, che è *in caduta libera*, il campo gravitazionale del Sole *si cancella.*

Problemi

1. Se la forza di attrazione del Sole influenzasse la caduta dei gravi, di quanto si sposterebbe il punto di caduta di un sasso lasciato dalla Torre Pendente (52 m) tra la mattina e la sera (fig. 5–8)?

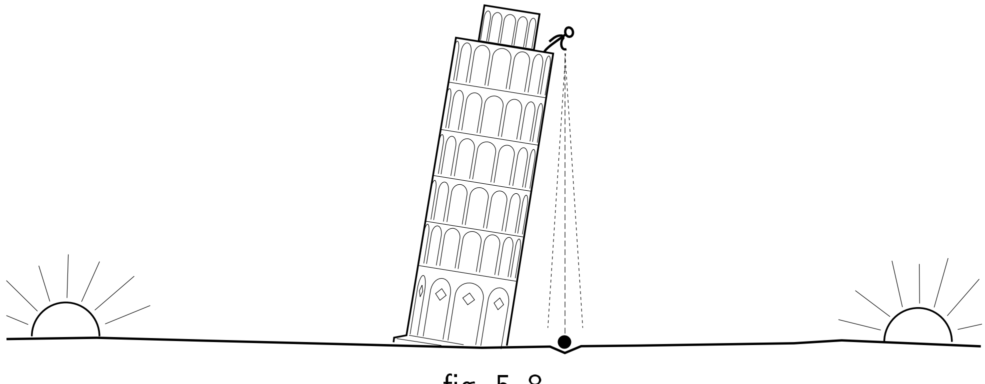

fig. 5–8

2. Risolvere il problema del palloncino:
   - *a*) Calcolare la differenza di pressione tra il punto più alto e il più basso per un palloncino di diametro 20 cm.
   - *b*) Stimare la differenza nella pressione dell'aria fra le due pareti (anteriore e posteriore) di uno scompartimento, mentre il treno frena con accelerazione $0.2\,g$.

3. Un bambino seduto nello scompartimento di un treno tiene in mano un piccolo pendolo, ossia una pallina pesante appesa a un filo, e si diverte a farlo oscillare in un piano parallelo alla direzione di marcia del treno. Trova che il periodo è esattamente di un secondo quando il treno sta fermo in stazione.

Quanto vale il periodo se il treno viaggia a 120 km/h in linea retta, in piano, e senza scosse?

A un certo momento il treno comincia una lunga frenata, con accelerazione costante di modulo $1\,\mathrm{m/s^2}$. Qual è la posizione di equilibrio del pendolo durante la frenata? Quanto vale in queste condizioni il periodo di oscillazione?

Risolvere il problema:

a) nel modo tradizionale

b) usando il PE.

4. Supponiamo, per semplificare, che la forza tra Giove e un satellite sia elastica. Se per il satellite, ferma restando la massa, la forza di attrazione del Sole fosse dell'1 per mille maggiore di quella che è, di quanto si sposterebbe il centro dell'orbita?

Periodo di Io: 1.77 giorni
periodo di Giove: 11.86 anni
raggio dell'orbita di Giove: $7.78 \cdot 10^8$ km.

Risposte

Problema 1. (Caduta di un sasso dalla Torre Pendente):

L'idea del problema è di supporre che sul sasso che cade agisca, oltre al campo gravitazionale della Terra, anche quello del Sole; ma che invece non agisca la forza apparente dovuta al moto orbitale (accelerato) della Terra.

Allora la risposta è facile: il campo gravitazionale della Terra è diretto in verticale e vale 9.8 N/kg. Quello del Sole vale $6 \cdot 10^{-3}$ N/kg e cambia direzione nel corso del giorno, ma alla mattina e alla sera è orizzontale. Perciò l'angolo del campo risultante rispetto alla verticale è $\alpha \simeq 6 \cdot 10^{-3}/9.8 \simeq 6 \cdot 10^{-4}$ rad.

La traiettoria di caduta sarebbe ancora rettilinea, ma formerebbe l'angolo α con la verticale, e il punto di caduta si sposterebbe quindi di $52 \times 6 \cdot 10^{-4} = 3.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 3.2\,\mathrm{cm}$: verso est la mattina, verso ovest la sera. Uno spostamento facilmente osservabile.

Problema 2. (Il problema del palloncino):

a) Nell'atmosfera la variazione di pressione con l'altezza è $\Delta p = \varrho g \Delta z$ (asse z orientato verso il basso). Per ϱ possiamo assumere $1.3\,\mathrm{kg/m^3}$, e con $\Delta z = 20\,\mathrm{cm}$ otteniamo $\Delta p = 2.5\,\mathrm{Pa} \simeq 2.5 \cdot 10^{-5}$ atm.

b) Il calcolo è lo stesso di sopra, solo che al posto di g dovremo mettere il campo gravitazionale apparente, pari in modulo all'accelerazione del treno. Se lo scompartimento è largo 2 metri, avremo $\Delta p = 5.1\,\mathrm{Pa}$.

Problema 3. (Il bambino e il pendolo):

La prima risposta è banale: per il PR non cambia niente rispetto al treno fermo. Rsolviamo ora la seconda parte del problema, prima nel modo tradizionale, poi usando il PE.

a) Soluzione tradizionale: Oltre alla forza di gravità agisce sul pendolo una forza apparente $-m\vec{a}$, orizzontale e diretta nel verso in cui il treno avanza. Il pendolo si dispone secondo la risultante, che forma con la verticale l'angolo $\operatorname{arctg}(a/g) = 5.8°$.

Quanto al periodo, basta sostituire nella solita formula, al posto di g, $\sqrt{g^2+a^2}$, e si trova

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{g^2}{g^2+a^2}\right)^{1/4} = 0.9974.$$

Il periodo durante la frenata diminuisce dunque a $0.9974\,\mathrm{s}$.

Problema 4. (Satelliti di Giove):

Stiamo supponendo che la forza che lega Io a Giove sia del tipo $\vec{F} = -k\,\vec{r}$: determiniamo k. Sarà $k\,r = m\,\omega^2 r$, quindi $k = m\,\omega^2$.

Nelle condizioni reali, la forza di attrazione del Sole è esattamente compensata dalla forza apparente, che ha modulo $m\,\Omega^2 R$, dove ho indicato con Ω la velocità angolare di Giove, con R il raggio della sua orbita.

Nell'ipotesi del problema resterebbe invece un eccesso di attrazione solare

$$\delta F = \varepsilon\, m\, \Omega^2 R,$$

con $\varepsilon = 0.001$. Questa forza sposterebbe il centro dell'orbita di Io di un tratto

$$\frac{\delta F}{k} = \varepsilon \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 R = 0.13\,\mathrm{km}$$

ben difficile da vedere anche con gli strumenti di oggi.

Nei *Principia* Newton affronta il problema e dà il risultato di un calcolo che non riporta. Secondo questo calcolo, l'effetto dovrebbe essere di 6 ordini di grandezza maggiore, e quindi assai evidente, anche con gli strumenti di allora. Dato che invece il moto dei satelliti di Giove appare circolare intorno al pianeta, ne conclude che Giove e satelliti vengono attratti dal Sole con forze esattamente proporzionali alle loro masse.