LEZIONE 15

L'Universo: dati di osservazione

Passiamo ora all'argomento più moderno e senza dubbio più affascinante: la cosmologia. Si tratta però di un fascino ambiguo, in quanto spinge spesso ad affrontarlo fuori del giusto contesto, e in modo sostanzialmente non scientifico. È forse superfluo sottolineare che questo *è un argomento di fisica*, e come tale va trattato: in particolare non si può discuterne senza avere qualche idea sui dati di fatto e su come li si ottiene. Perciò incominceremo proprio da qui.

Per una prima visione d'insieme, vediamo alcuni risultati, su cui torneremo più avanti con maggior dettaglio:

- il raggio della Terra è poco inferiore a 6400 km: questa lunghezza è la base di tutte le distanze astronomiche
- la Terra dista dal Sole 500 secondi-luce $\simeq 150 \cdot 10^6\,\mathrm{km} = 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ (l'*unità astronomica* UA)
- il Sole è una stella piuttosto piccola, posta a circa $3 \cdot 10^4$ al (anni-luce) dal centro della Galassia in cui ci troviamo
- la materia visibile dell'Universo è sostanzialmente concentrata in *galassie*, in numero di $\sim 10^{11}$
- ogni galassia contiene gas, polveri e stelle; queste ultime in numero di $\sim 10^{11}$, e distanti fra loro alcuni anni-luce in media
- distanza media fra le galassie: $\sim 10^7$ al; tuttavia le distanze sono tutt'altro che uniformi, poiché le galassie sono raccolte in *ammassi*
- l'Universo visibile ha "dimensioni" dell'ordine di 10^{10} al.

La scala delle distanze: la parallasse

Dalle dimensioni della Terra a quelle dell'Universo vi sono molti ordini di grandezza: ne segue che non è possibile applicare lo stesso procedimento di misura in tutti i casi. Un metodo di misura arriva fino a un certo limite, oltre il quale viene rimpiazzato da un altro: i due metodi debbono avere un campo di applicazione comune, affinché sia possibile la "saldatura." Si hanno così tanti "scalini" che formano la scala delle distanze, da quelle terrestri a quelle cosmologiche.

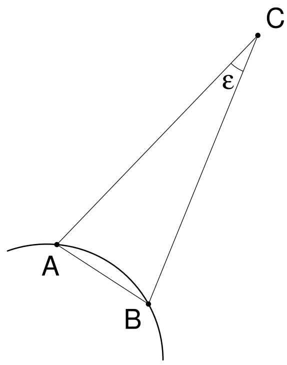

fig. 15–1

I primi due scalini sono la *parallasse diurna* e la *parallasse annua.* Se A e B (fig. 15–1) sono due osservatori sulla superficie terrestre, la loro distanza è nota. Nel caso semplice di un triangolo isoscele, con angolo in C piccolo, sarà con buona approssimazione $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} \cdot \varepsilon$ (se ε è espresso in radianti) e perciò la misura di ε fornisce quella di BC.

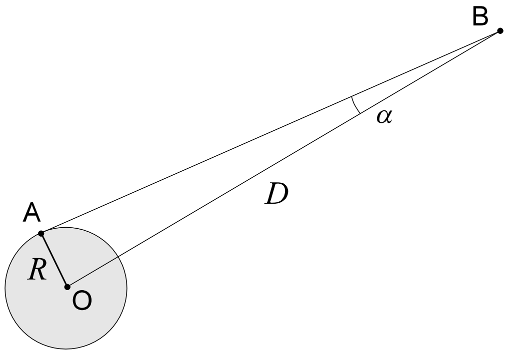

fig. 15–2

Più esattamente, si chiama parallasse diurna di un oggetto celeste l'angolo α in fig. 15–2, dove O è il centro della Terra e l'angolo in A è retto. Si vede che

$$R = D \sin\alpha \simeq D\,\alpha$$

perché l'angolo α nella maggior parte dei casi è piccolo. Perciò $D = R/\alpha$.

Esempi:

- per la Luna $\alpha \simeq 1°$
- per il Sole $\alpha \simeq 9''$.

Con la parallasse diurna si possono determinare soltanto le distanze dentro il sistema solare, e in particolare è stata determinata storicamente la distanza Terra-Sole. In realtà esistono diversi altri metodi; oggi le misure più precise sui pianeti si fanno mediante echi radar (il primo eco radar dalla Luna è stato ricevuto nel 1946).

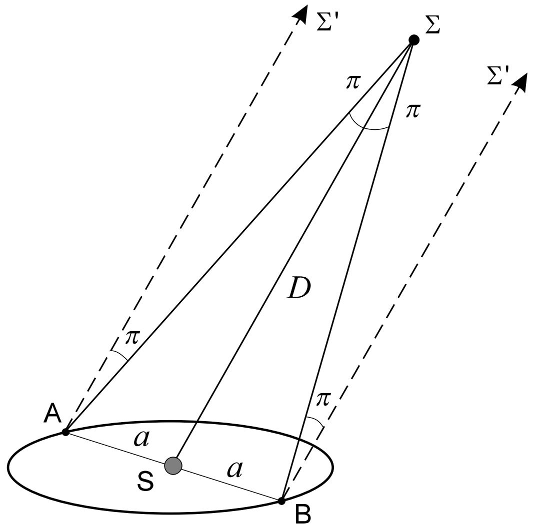

fig. 15–3

La conoscenza dell'unità astronomica permette di allungare la base della parallasse: in fig. 15–3 i punti A e B sono gli estremi di un diametro dell'orbita terrestre, S è il Sole, Σ una stella vicina, Σ′ una molto lontana. Si vede che

$$a = \overline{\mathrm{SA}} = \overline{\mathrm{S\Sigma}} \cdot \pi = D\,\pi$$

e perciò $D = a/\pi$. L'angolo π (parallasse annua) si determina confrontando, nel corso di un anno, la direzione di Σ con quella di Σ′. Per tutte le stelle $\pi < 1''$; l'unità *parsec* (pc) è la distanza D quando $\pi = 1''$:

$$1\,\mathrm{pc} \simeq 2.06 \cdot 10^5\,\mathrm{UA} \simeq 3 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} \simeq 3.3\,\mathrm{al}.$$

Oggi la parallasse annua si può determinare da terra fino a 100 pc, e grazie ai telescopi su satelliti fino a circa 1000 pc; al di là l'angolo è troppo piccolo per essere misurato in modo attendibile. Si stima che questo raggio includa qualche centinaio di milioni di stelle.

La distanza ricavata dalla luminosità

Si dice *luminosità assoluta* di una stella la potenza totale irradiata: ad es. la luminosità assoluta del Sole integrata su tutte le lunghezze d'onda (*bolometrica*) è $4 \cdot 10^{26}$ W. A parità di luminosità assoluta, stelle poste a distanza diversa appaiono diversamente brillanti, in proporzione inversa al quadrato della distanza:

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}\,.$$

Si può perciò definire una *luminosità apparente*, che per una data stella è la luminosità assoluta che dovrebbe avere una stella fittizia messa a una distanza convenzionale fissa, per apparire ugualmente brillante di quella data. Come distanza convenzionale si assume 10 pc (non chiedetemi perché) e perciò

$$L_{\mathrm{app}} = L_{\mathrm{ass}} \left(\frac{10\,\mathrm{pc}}{D}\right)^2.$$

Per qualsiasi stella le osservazioni forniscono facilmente I e quindi L_{app}; se si conoscesse L_{ass} se ne potrebbe ricavare D. Ciò in molti casi è possibile dall'esame delle caratteristiche spettrali della luce emessa.

I criteri che si usano sono abbastanza complessi, ma una descrizione sostanzialmente corretta, anche se molto semplificata, è la seguente: *stelle che emettono luce di uguale distribuzione spettrale hanno la stessa luminosità assoluta.* In questa forma abbreviata sono incluse sia la *classe spettrale* (che si ricava dalle righe spettrali presenti) sia la *classe di luminosità* (che si ottiene ad es. dall'intensità e dalla forma delle righe).

Così se si conosce — attraverso la parallasse — la distanza di una di queste stelle, se ne può ricavare quella di molte altre. In tal modo si arriva a oltre 10^4 pc, ma ancora non si esce dalla Galassia.

Variabili regolari e novæ

Tra i molti tipi di stelle variabili ve ne sono due che hanno importanza per il nostro discorso: le *Cefeidi* e le *novæ*. Le Cefeidi sono una classe di variabili *regolari*, che cioè variano di luminosità in modo periodico (con periodi di alcuni giorni). Hanno acquisito interesse cosmologico quando si è scoperto che il periodo di una Cefeide è correlato alla sua luminosità assoluta. Una volta stabilita una "curva di taratura" con Cefeidi di distanza nota, la semplice misura del periodo permette di conoscere la luminosità assoluta, e di qui si risale alla distanza. Con le Cefeidi si possono misurare distanze fino a circa 1 Mpc: siamo fuori dalla nostra Galassia, e si raggiungono altre galassie, quelle del cosiddetto "gruppo locale," che conta una ventina di membri.

Le novæ (da non confondere con le *supernovæ* di cui parleremo più avanti) sono variabili *cataclismiche*, cioè stelle che aumentano bruscamente e fortemente di luminosità (probabilmente in seguito all'apporto di materia da un'altra stella con cui la nova forma un sistema binario) e tornano poi alle condizioni originarie entro un tempo che si misura in giorni. Il tempo di smorzamento è correlato con la luminosità al massimo. Poiché una nova al massimo è assai più luminosa di una Cefeide, può essere vista a distanza maggiore: si arriva così a $\sim 50\,\mathrm{Mpc}$, includendo l'ammasso di galassie detto "della Vergine" dalla costellazione in cui si trova. In tal modo possiamo misurare le distanze di migliaia di galassie, ma siamo ancora lontani dalla scala cosmologica.

Le galassie lontane

Nelle galassie più lontane non si riesce a distinguere singole stelle, e questo obbliga a cambiare il tipo di "lampada campione" usato come indicatore di distanza: dalle stelle all'intera galassia. Lo studio di numerosi ammassi porta a scoprire una certa regolarità, e a fare l'ipotesi che nei diversi ammassi la galassia più luminosa abbia sempre la stessa luminosità assoluta. Poiché le distanze nell'ammasso della Vergine sono note, si arriva così a valutare le distanze degli altri ammassi dalla misura della luminosità apparente della galassia più brillante di ciascun ammasso. In tal modo si raggiungono distanze di $\sim 2 \cdot 10^9\,\mathrm{pc} \simeq 7 \cdot 10^9\,\mathrm{al}$: questa è veramente una scala cosmologica.

Un altro metodo usato su scala cosmologica si basa sulle *supernovæ*. Queste sono vere e proprie esplosioni, in cui una stella, giunta alla fine della sua evoluzione, si espande violentemente e disperde gran parte della sua materia nello spazio (resta solo un piccolo nucleo, che può andare a formare una stella di neutroni o forse un buco nero). Nella fase di esplosione la stella aumenta enormenente di luminosità, ed è visibile a grande distanza: con tecniche analoghe a quelle descritte per le novæ, ossia basate sull'andamento della *curva di luce*, si può ricavare una stima della luminosità assoluta, e quindi della distanza.

Va però detto che sulle distanze misurate con questi metodi esiste ancora grande incertezza, che si riflette, come vedremo, sull'interpretazione delle osservazioni e sul confronto con i modelli cosmologici.

La massa delle galassie e la densità di materia

Per discutere i modelli cosmologici è essenziale conoscere la densità della materia nell'Universo. Ciò richiede di conoscere la massa delle galassie: dobbiamo dunque sapere come si determina questo parametro.

Ricordiamo prima di tutto come si trova la massa del Sole $M_\odot$. La velocità orbitale della Terra è $v_\oplus = 2\pi r_\oplus / T_\oplus$ dove $r_\oplus$, $T_\oplus$ sono raggio e periodo dell'orbita (trascuriamo l'eccentricità). La forza necessaria per il moto circolare della Terra (forza centripeta) è $F = M_\oplus v_\oplus^2 / r_\oplus$, ed è fornita dall'attrazione del Sole:

$$\frac{M_\oplus v_\oplus^2}{r_\oplus} = \frac{G M_\odot M_\oplus}{r_\oplus^2}$$

da cui
$$M_\odot = \frac{v_\oplus^2 r_\oplus}{G} = \frac{4\pi^2 r_\oplus^3}{G\,T_\oplus^2}. \tag{15–1}$$

Le grandezze $r_\oplus$, $T_\oplus$ sono note da misure astronomiche; la costante di gravitazione G si ottiene da misure di laboratorio (Cavendish) e ne risulta
$$M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}.$$

È interessante osservare che da questo dato, e dal raggio del Sole, pure ben noto, si può calcolare la *densità media*: $\bar{\varrho} = 1.4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, poco maggiore di quella dell'acqua.

Nello stesso modo si può determinare la massa di un pianeta che abbia almeno un satellite: ad es. Saturno, usando il suo satellite maggiore, Titano. Avremo
$$M_\mathrm{S} = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{T}^3}{G\,T_\mathrm{T}^2} \tag{15–2}$$
o anche, dividendo la (15–2) per la (15–1)
$$\frac{M_\mathrm{S}}{M_\odot} = \left(\frac{T_\oplus}{T_\mathrm{T}}\right)^2 \left(\frac{r_\mathrm{T}}{r_\oplus}\right)^3. \tag{15–3}$$

E se il pianeta non ha satelliti, come ad es. Venere? Non c'è altro modo che ricorrere alle perturbazioni che esso produce sul moto di altri pianeti.

Possiamo ottenere la massa della nostra Galassia usando il fatto che il Sole gira intorno al centro di questa, con un periodo $T_\odot = 2.5 \cdot 10^8$ anni, a una distanza $r_\odot = 10^4\,\mathrm{pc}$. Naturalmente il tempo $T_\odot$ è troppo lungo per determinarlo direttamente, ma si può misurare $v_\odot$, e poi $T_\odot = 2\pi r_\odot / v_\odot$. Applicando la (15–3), con la Galassia al posto di Saturno e col Sole al posto di Titano:
$$\frac{M_\mathrm{G}}{M_\odot} = \left(\frac{T_\oplus}{T_\odot}\right)^2 \left(\frac{r_\odot}{r_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{1}{2.5 \cdot 10^8}\right)^2 \left(10^4 \cdot 2 \cdot 10^5\right)^3 \simeq 1.3 \cdot 10^{11}$$
(ricordate che $1\,\mathrm{pc} \simeq 2 \cdot 10^5\,\mathrm{UA}$).

Dunque la massa della Galassia sarebbe pari a circa 100 miliardi di Soli: è solo questo che s'intende quando si dice che nella Galassia ci sono 100 miliardi di stelle, visto che nessuno le ha contate!

È bene osservare che applicando la (15–3) alla Galassia abbiamo in realtà fatto un'approssimazione. La (15–3) vale per un satellite che gira intorno a un corpo di forma sferica: la Galassia non è sferica, e inoltre il Sole ne fa parte. L'approssimazione è lecita se si ammette che gran parte della massa della Galassia sia concentrata in un nucleo centrale, abbastanza sferico, mentre il Sole è una stella piuttosto "periferica."

Lo stesso metodo si può applicare ad altre galassie, a condizione che si possa determinare il moto di qualche stella. La distanza dal centro non è un problema, quando si conosca la distanza della galassia da noi; la velocità si ottiene dall'esame dello spettro della stella, con l'effetto Doppler.

A questo punto, per stimare la densità della materia nell'Universo basta sapere quante sono le galassie per unità di volume, e conoscerne la massa media. Naturalmente è essenziale l'ipotesi che non ci sia massa apprezzabile al di fuori di quella concentrata nelle galassie. Mettendo insieme tutti i dati, si ottiene una stima di $10^{-28}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

La massa mancante

Non posso chiudere questo argomento senza accennare al "problema della massa mancante." Abbiamo visto sopra come si determina la massa della Galassia, nell'ipotesi che questa sia concentrata nel nucleo. Negli ultimi anni, proprio misurando le velocità di stelle nelle galassie a spirale, a varie distanze dal centro, si sono accumulate le prove che debba esservi della materia distribuita anche molto al di fuori del nucleo. Si tratta di materia non luminosa, e non è affatto chiaro quale sia la sua natura.

Ma come sappiamo che questa massa esiste? Riprendiamo la (15–2), scritta per una galassia:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} \tag{15–3}$$

dove r è il raggio dell'orbita circolare di una stella della galassia, e T il suo periodo. Si vede che per le diverse stelle r^3/T^2 è costante (terza legge di Keplero). Introducendo la velocità della stella, che si misura più direttamente:

$$M = \frac{v^2 r}{G}. \tag{15–4}$$

da cui $v \propto 1/\sqrt{r}$.

Misurando v per stelle a diverse distanze dal centro della galassia, ci si aspetta dunque un andamento come quello tratteggiato in fig. 15–4 (il tratto iniziale crescente è dovuto al fatto che in vicinanza del centro non tutta la massa della galassia è efficace nel produrre il campo gravitazionale). Invece le osservazioni, su molte galassie, danno risultati come quello accennato con la linea intera: velocità pressoché costante anche a grandi r. Questo mostra che la massa nella (15–4) non è affatto costante, ma cresce come r, sebbene alla periferia della galassia la luce visibile indichi una densità di stelle molto minore che nel nucleo. Si tratta dunque di materia *oscura*.

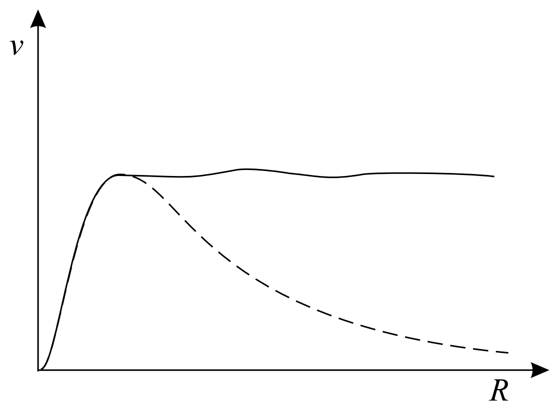

fig. 15–4

Anche negli ammassi di galassie c'è evidenza di materia oscura: infatti in vari casi le velocità relative delle galassie sono troppo alte perché l'ammasso possa essere tenuto legato dalla sola azione gravitazionale della materia visibile. Tutto ciò porta a ritenere che la stima fornita sopra per la densità di materia nell'Universo sia sbagliata per difetto almeno per un fattore 10, ma il problema è completamente aperto.

La legge di Hubble

La questione di cui vogliamo ora occuparci nasce quando ci si mette a studiare le galassie e si cerca di raccogliere informazioni sulle loro distanze e sul loro moto. In un primo tempo, finché ci si limita alle galassie più vicine, si trova che si muovono in maniera abbastanza caotica, e non sembra che dai loro moti si possa estrarre una legge semplice. Negli anni '20, ad opera principalmente di Hubble (e grazie al telescopio di due metri e mezzo di Monte Wilson, costruito proprio per consentire osservazioni di questo genere) si scoprì che la luce di galassie lontane è *spostata verso il rosso* (redshift cosmologico) e che lo spostamento è proporzionale alla distanza della galassia. Questa è la *legge di Hubble*.

È importante aver chiaro che la legge di Hubble è di tipo statistico, e può essere scoperta — e soprattutto ben verificata — solo quando si hanno a disposizione un numero sufficientemente grande di galassie abbastanza lontane. Per le galassie vicine l'effetto è più difficile da vedere: in primo luogo perché se lo spostamento è proporzionale alla distanza, per quelle vicine sarà piccolo. Poi perché a questo spostamento che possiamo dire sistematico, si sovrappone un effetto di "agitazione termica": i moti casuali, disordinati, delle galassie possono essere così grandi da produrre un effetto Doppler che maschera il redshift cosmologico. Di qui la necessità di un grosso telescopio: se non si riesce a guardare abbastanza lontano, il redshift non è abbastanza grande.

Vediamo qualche numero. Le velocità tipiche delle galassie di un ammasso sono dell'ordine di $10^3\,\mathrm{km/s}$, e producono quindi uno spostamento Doppler disordinato (rumore) $\Delta\lambda/\lambda = v/c \sim 0.003$. Dato il valore della costante di Hubble (v. dopo) per avere un redshift nettamente al disopra del rumore, per es. 0.01, occorre andare a distanze $> 50\,\mathrm{Mpc}$.

La costante di Hubble

Per stabilire una legge del genere bisogna evidentemente misurare, per ciascuna galassia, il redshift e la distanza. Delle due la distanza è la più difficile da misurare, perché — come abbiamo visto — occorre procedere per passi successivi: prima si determinano le distanze delle stelle; poi da queste si comincia a risalire alle galassie più vicine; da quelle più vicine s'impara qualcosa che permette di passare alle galassie più lontane, ecc. Il risultato è che la misura della distanza è assai indiretta, e perciò soggetta a una quantità di possibili errori.

Sta di fatto che ancor oggi l'incertezza delle distanze è il punto debole di tutto l'argomento. Quando si sente dire che un certo parametro cosmologico è incerto per $\pm 20\%$, la difficoltà essenziale è sempre quella: la determinazione della distanza diventa tanto più difficile, e tanto più incerta come fondamento, quanto più si va lontano. E purtroppo le grandi distanze sono le più utili per capire la struttura dell'Universo.

Invece non è difficile determinare il redshift: la luce che viene da una galassia è la somma della luce emessa da tutte le stelle della galassia, e nella luce delle stelle ci sono le righe di assorbimento. Queste righe sono dovute a determinati atomi o ioni, e le loro lunghezze d'onda sono conosciute da misure di laboratorio. Un esempio può essere la riga H_α, la prima riga della serie di Balmer dell'idrogeno: la sua lunghezza d'onda di laboratorio è ben nota. È lecito assumere che nelle condizioni delle stelle che costituiscono le galassie la lunghezza d'onda non cambi, perché gli atomi d'idrogeno sono sempre gli stessi.

Occorre sottolineare questo principio fondamentale: la fisica degli atomi d'idrogeno nelle stelle di una galassia lontana milioni o miliardi di anni luce è la stessa che conosciamo sulla Terra. Il *principio di uniformità* delle leggi di natura in tutto l'Universo è essenziale per il nostro argomento: senza di esso non faremmo un passo avanti.

Dunque la lunghezza d'onda λ_e della riga H_α nella luce della galassia è la stessa che noi misuriamo in laboratorio. D'altra parte noi osserviamo la galassia allo spettroscopio e misuriamo la lunghezza d'onda λ_r della luce ricevuta: risulta $\lambda_\mathrm{r} > \lambda_\mathrm{e}$. Ripeto che non possiamo misurare λ_e nella galassia: assumiamo di conoscerla perché l'identifichiamo con la lunghezza d'onda della riga H_α dell'idrogeno in laboratorio. Quindi abbiamo due misure: una è fatta sulle righe spettrali degli elementi in laboratorio; l'altra si ricava dallo spettro della luce che viene dalla galassia. Confrontando questa con quella, si può calcolare la variazione relativa

$$z = \frac{\lambda_\mathrm{r} - \lambda_\mathrm{e}}{\lambda_\mathrm{e}} \tag{15–5}$$

che si chiama "parametro di redshift." Redshift, ossia spostamento verso il rosso, appunto perché la lunghezza d'onda è aumentata.

L'interpretazione più elementare è che il redshift sia dovuto a un moto di allontanamento della galassia con una certa velocità, sia cioè anch'esso un effetto Doppler: allora il redshift sarà uguale, al primo ordine, a v/c. Se la velocità di allontanamento non fosse piccola rispetto a quella della luce, si dovrebbe far uso della formula relativistica, che è un po' più complicata; ma per il momento non ce ne preoccupiamo. (Ho messo le mani avanti parlando di "interpretazione più elementare," perché non è quella che meglio si accorda con i modelli cosmologici; basti per ora quest'avvertenza, ma ne riparleremo.)

Con ciò non intendo dire che l'effetto relativistico sia trascurabile in generale: si conoscono oggetti per i quali $z > 4$.(1) Un tale redshift sarebbe impossibile se fosse sempre $z = v/c$, perché implicherebbe una velocità maggiore di c. Tuttavia ai tempi di Hubble il campo delle distanze accessibili era tale che le velocità erano sempre piccole, e il problema non si poneva.

Se la causa del redshift è nell'effetto Doppler, z è dunque proporzionale alla velocità; d'altra parte le osservazioni ci dicono che z è proporzionale alla distanza d: quindi v è proporzionale a d. Abbiamo così trovato la legge di Hubble nella forma più consueta. In termini quantitativi:

$$v = Hd \tag{15–6}$$

dove la costante di proporzionalità H è la *costante di Hubble*. Il valore di H, quale risulta dalle osservazioni, è $(65 \pm 13)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.(1)

Unità di misura e valore di H

Questa strana unità di misura richiede una spiegazione: è conseguenza di certe convenzioni pratico-strumentali. Come si vede dalla (15–6), la costante di Hubble ha le dimensioni dell'inverso di un tempo; quindi la sua unità di misura sarebbe il $\mathrm{s^{-1}}$. Ma come abbiamo visto il megaparsec è un'unità di lunghezza: la lunghezza al numeratore e quella al denominatore si cancellano e rimane un tempo al denominatore, come doveva.

La ragione di questa unità è che in astronomia la velocità di allontanamento di una stella o di una galassia si misura comunemente in km/s, perché l'ordine di grandezza tipico delle velocità stellari è qualche decina di km/s. D'altra parte il megaparsec (abbreviato Mpc) è un'unità di distanza ragionevole per le galassie: ad es. la famosa galassia di Andromeda è a 0.7 Mpc, pari a poco più di 2 milioni di anni-luce.

Quanto al valore numerico di H, a causa delle incertezze sulle distanze oggi nessuno può darlo per certo più che entro il 20%.(1) Può sembrare una situazione poco soddisfacente, ma non bisogna dimenticare che a volte anche conoscere un numero entro il 20% è già molto importante. Tra i fisici c'è un famoso detto: "meglio un cattivo numero che nessun numero" (traduzione letterale dall'inglese: in italiano direi "anche un cattivo numero è meglio di niente"). Vuol dire che è sempre meglio conoscere il valore numerico di una grandezza entro il 20%, che dover dire: "non ne so niente."

Dato che H è l'inverso di un tempo, è interessante calcolare $1/H$, che si chiama "tempo di Hubble": si trova qualcosa come $15 \cdot 10^9$ anni. Ecco un esempio dei tempi che entrano in ballo nei discorsi cosmologici: miliardi e decine di miliardi di anni. Ma questa è una cosa su cui dovremo tornare più avanti; per adesso si tratta solo di una conversione di unità di misura, senza nessun profondo significato.

Relatività dell'effetto di espansione

La prima considerazione importante da fare è che il moto generale di allontanamento delle galassie non significa affatto che noi ci troviamo al centro dell'Universo: che la nostra posizione sia in qualche modo particolare.

(1) Oggi (2005) sono noti oggetti con redshift $z \simeq 10$. Un valore più aggiornato della costante di Hubble è $(70 \pm 3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

Questo si può vedere in maniera elementare considerando il triangolo formato dall'osservatore O sulla Terra e da due altri osservatori, O_1 e O_2, su due galassie lontane (fig. 15–5). Chiamiamo d_1 e d_2 le distanze $\overline{OO_1}$ e $\overline{OO_2}$ rispettivamente; allora la legge di Hubble ci dice che d_1 cresce col tempo, e più precisamente che

$$d_1(t) = d_1(0) + v_1 t = d_1(0)\,(1 + Ht).$$

Lo stesso vale per d_2:

$$d_2(t) = d_2(0) + v_2 t = d_2(0)\,(1 + Ht).$$

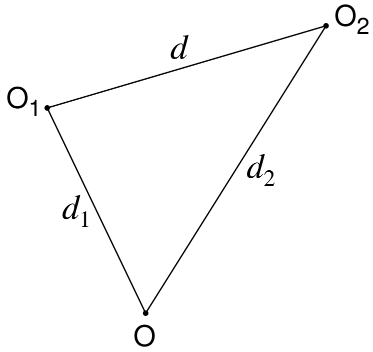

fig. 15–5

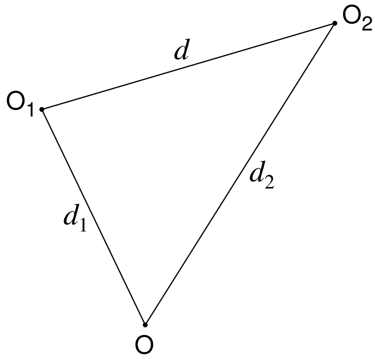

fig. 15–6

Se quindi andiamo a rifare la figura al tempo t (fig. 15–6) troviamo un nuovo triangolo simile a quello di prima, perché i due lati OO_1 e OO_2 si sono allungati in proporzione, e l'angolo compreso non è cambiato. Ne segue che anche la distanza $\overline{O_1O_2}$ è cresciuta nella stessa proporzione:

$$d(t) = d(0)\,(1 + Ht).$$

Dunque anche gli astronomi della galassia 1 troverebbero la legge di Hubble, come l'abbiamo trovata noi. E lo stesso vale per gli astronomi della galassia 2. Nessuna di queste galassie occupa una posizione privilegiata: nessuno degli osservatori può dire che l'Universo si espande intorno a lui, e che lui sta al centro: si tratta solo di un moto relativo.

Problemi

1. La massima elongazione di Venere dal Sole è 46.3°. Si è misurata l'eco radar quando l'elongazione era 35.0°, e si è trovato 381.4 s (fig. 15–7).

Supposte circolari le orbite dei due pianeti, ricavare da questi dati l'unità astronomica.

2. È stato proposto (Milgrom) che l'andamento di velocità in una galassia mostrato dalla fig. 15–4 si possa spiegare assumendo che la legge di gravitazione di Newton non valga per accelerazioni molto piccole.

Che forma dovrebbe assumere la legge per dare ragione dell'andamento costante della velocità?

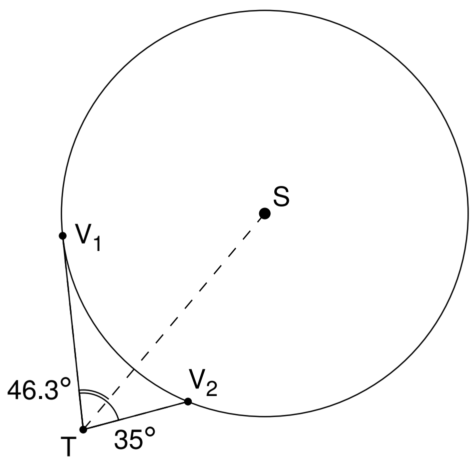

fig. 15–7

3. Che effetto avrebbe sulla costante di Hubble un errore del 20% in meno sulla stima della luminosità degli oggetti lontani?

4. Sono stati osservati oggetti con $z = 4$ (e anche maggiore). Quale dovrebbe essere la loro distanza?

Esaminare criticamente la domanda e le possibili soluzioni.

Risposte

Problema 1. (Venere e l'unità astronomica):

Indichiamo con $\alpha = 46.3°$ l'angolo di massima elongazione, con $\beta = 35.0°$ quello al quale è stata fatta la misura di eco; con a il raggio dell'orbita della Terra (unità astronomica) e con a' quello dell'orbita di Venere; con b la distanza TV_2.

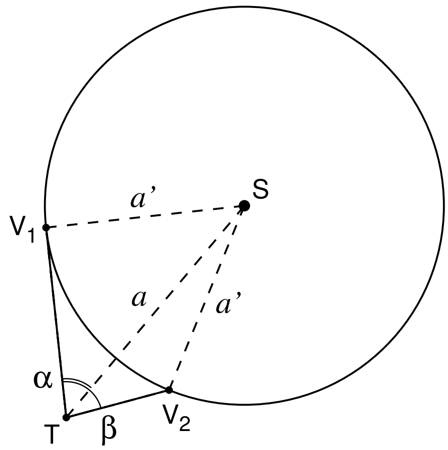

fig. 15–8

Dalla fig. 15–8 si vede che

$$a' = a \sin\alpha \qquad {a'}^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,\cos\beta.$$

Sostituendo nella seconda a' dato dalla prima:

$$a^2\cos^2\!\alpha - 2\,ab\,\cos\beta + b^2 = 0$$

$$a = b\,\frac{\cos\beta + \sqrt{\cos^2\!\beta - \cos^2\!\alpha}}{\cos^2\!\alpha}$$

(va scelto il segno + perché $a\cos^2\!\alpha > b\,\cos\beta$).

Mettendo i numeri, risulta

$$b = 5.72 \cdot 10^7\,\text{km} \qquad a = 1.508 \cdot 10^8\,\text{km} \qquad a' = 1.090 \cdot 10^8\,\text{km}.$$

Il valore "ufficiale" di a è $1.496 \cdot 10^8$ km: la differenza. inferiore all'1%, è presumibilmente dovuta all'aver trascurato l'eccentricità delle orbite.

Problema 2. (Modifica alla legge di gravitazione):

Detto g il campo gravitazionale newtoniano

$$g = \frac{GM}{r^2} \tag{15–7}$$

la proposta di Milgrom è di porre, invece di $g = a$

$$g = a\,f\!\left(\frac{a}{a_0}\right) \tag{15–8}$$

dove a_0 è una nuova costante universale, con le dimensioni di un'accelerazione, e $f(x)$ è una funzione che tende a 1 quando l'argomento $x = a/a_0$ è $\gg 1$. Dobbiamo vedere che cosa si può dire sulla funzione $f(x)$.

Da $a = v^2/r$ si trae $r = v^2/a$, che con la (15–7) dà

$$g = \frac{GMa^2}{v^4}.$$

Sostituendo nella (15–8)

$$f\!\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{GMa}{v^4}.$$

$$f(x) = \frac{GMa_0}{v^4}\,x. \tag{15–9}$$

Le osservazioni ci dicono che per piccoli x il primo fattore a secondo membro per una data galassia è circa costante, quindi

$$f(x) = kx.$$

Ricordiamo però che $f(x)$ deve tendere a 1 quando x è grande. Ci sono infinite scelte possibili, per esempio

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{15–10}$$

I dati sono abbastanza ben rappresentati se si prende $a_0 \simeq 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$. Vediamo che cosa si ottiene per v se pensiamo a una galassia con $M = 10^{11} M_\odot = 2 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}$. A grandi distanze (piccoli x) la (15–10) dice $f(x) \simeq x$, e allora la (15–9) dà

$$\frac{GMa_0}{v^4} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad v = (GMa_0)^{1/4} = 1.9 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}.$$

Le velocità massime che risultano dalle osservazioni sono vicine a questo valore; si noti che v è poco sensibile alla massa della galassia (va come $M^{1/4}$).

Problema 3. (Errore nella costante di Hubble):

Se si sottostima del 20% la luminosità (assoluta) di un oggetto, si sottostima la sua distanza del 10%. Infatti a parità di luminosità apparente L è proporzionale a D^2.

Nella legge di Hubble (15–5) v si ricava dal redshift, ed è indipendente dalla distanza; se si sottostima questa, si sovrastima nella stessa proporzione H. Quindi la risposta è che la costante di Hubble verrebbe sovrastimata del 10%.

Problema 4. (Distanza di un oggetto ad alto redshift):

Ovviamente per z dell'ordine di 1 o maggiore, non si può usare la legge di Hubble senza modifiche, nella forma $v = Hd$, perché questa si basa sull'approssimazione $z = v/c$, valida solo per $v \ll c$, ossia per z piccolo.

Viene quindi naturale credere che la soluzione sia di usare l'espressione del redshift Doppler relativistico:

$$\frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{15–11}$$

(la (15–11) discende immediatamente dalla (12–21)). Dato che per definizione di z

$$\frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{e}} = 1 + z$$

risolvendo rispetto a v avremmo

$$v = c\,\frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2}$$

e quindi, usando $v = Hd$:

$$d = \frac{c}{H}\,\frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2}. \tag{15–12}$$

Col valore recente (2005) di H si ha $c/H = 4.3\,\mathrm{Gpc}$ ($1\,\mathrm{Gpc} = 10^9\,\mathrm{pc}$) e per $z = 4$ avremmo $d = 4.0\,\mathrm{Gpc}$. Si noti che usando la (15–12) $d \to c/H$ quando $z \to \infty$.

Si può obiettare però che i dati di osservazione sono z e d, non v; quindi la legge di Hubble andrebbe scritta

$$z = H'd \tag{15–13}$$

con H' costante. A piccoli z la relazione tra H e H' è

$$H' = H/c = 0.23\,\mathrm{Gpc}^{-1}.$$

Usando la (15–13) troveremmo $d = 0.92\,\mathrm{Gpc}$: che possiamo dire a questo punto? Semplicemente che nessuno dei due procedimenti seguiti è in realtà giustificato. Il primo, perché si basa sull'ipotesi che il redshift sia dovuto a un effettivo moto di allontanamento delle galassie in uno spazio-tempo piatto, dove vale la RR e quindi la formula (15–11) per l'effetto Doppler. Ma sappiamo già che lo spazio-tempo non è piatto...

Il secondo procedimento è ancor meno ammissibile, perché assume valida la (15–12) per qualunque distanza; cosa che non ha alcuna base osservativa.

Vedremo più avanti che il calcolo del redshift cosmologico a grandi distanze va fatto in tutt'altro modo: questo problema aveva soprattutto lo scopo di anticipare e preparare un tema di cui dovremo occuparci.