Come introdurre la relatività nella scuola secondaria superiore

(seconda parte)

Leggi di trasformazione

Il titolo appare solenne, ma vuol dire una cosa semplice: se osserviamo *lo stesso fenomeno* da due diversi riferimenti S e T, in generale per le grandezze in gioco troveremo *valori diversi* in S e in T.

Pensiamo per es. alla velocità; ma è vero anche in altri casi: energia, campo magnetico ...

Ci possono essere particolari grandezze che non cambiano valore: le chiameremo *invarianti*.

Attenzione: "invariante" non vuol dire che non cambia *nel tempo*, ma che mantiene lo stesso valore *in diversi riferimenti*.

Esempi? La massa, la carica elettrica ... (ce ne sono altri, ma è meglio non divagare).

Una *legge di trasformazione* è semplicemente la *regola* con cui una certa grandezza cambia da S a T.

Tempo assoluto e velocità della luce

È facile vedere che *se il tempo è invariante* (assoluto) allora *non può essere invariante la velocità della luce*, e viceversa.

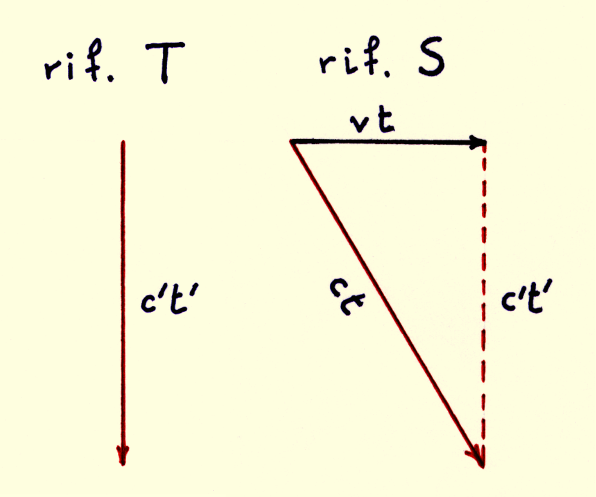
In un treno che va a velocità costante, da sinistra verso destra, facciamo propagare della luce, in senso orizzontale, trasversalmente al treno.

Possiamo considerare due riferimenti inerziali: quello T del treno, e quello S della stazione. Che cosa si vede in S e in T?

Indichiamo con c, c' le due velocità della luce in S e in T (potranno essere uguali o no: vedremo).

Indichiamo anche (per prudenza) con t, t' i tempi di percorrenza misurati in S e in T.

(La figura è vista dall'alto.)



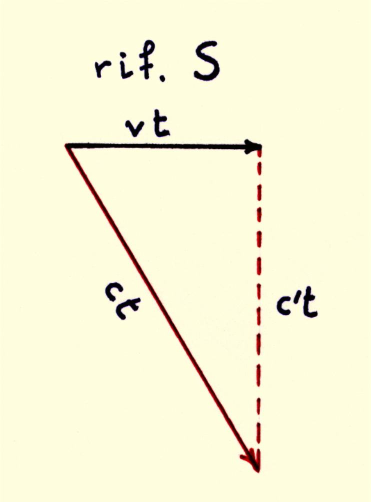
Ipotesi 1: tempo assoluto

Assumiamo il tempo assoluto: $t = t'$.

Allora nello stesso tempo t la luce ha percorso un tratto $c't$ nel riferimento T, e un tratto ct nel riferimento S.

La figura mostra che ct è più lungo di $c't$: dunque $c > c'$:

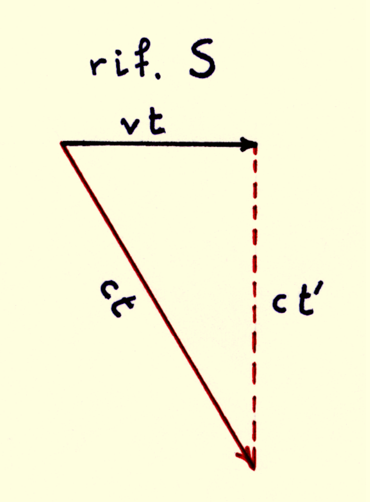
Se il tempo è assoluto, la velocità della luce non è invariante.



Ipotesi 2: velocità della luce invariante

Se $c = c'$ allora la stessa figura, essendo sempre $ct > c't'$, ci mostra che dev'essere $t > t'$:

Se la velocità della luce è invariante, il tempo non è assoluto.



La scelta di Einstein

Sappiamo che Einstein sceglie la seconda ipotesi: velocità della luce invariante, tempo non invariante.

La sua motivazione l'abbiamo già detta: ritiene che il PR debba valere anche per l'elettromagnetismo.

Oggi abbiamo motivi molto più forti, perché il campo dei fenomeni e dei sistemi fisici conosciuti si è molto allargato.

Due esempi:

– *le navicelle spaziali*

– *le stelle.*

L'orologio a luce

Le figure mostrano un "orologio a luce": consiste di una sorgente L, di uno specchio S e di un rivelatore R. Il tempo che la luce impiega ad andare e tornare è $\Delta\tau = 2\,h/c$.

L'orologio è montato sul treno T: quello che si vede nel rif. S della stazione è mostrato a destra.

Nel tempo di andata e ritorno della luce il rivelatore R si è spostato di un tratto $\Delta x = v\Delta t$, dove Δt è il tempo che la luce impiega a percorrere il tratto LSR.

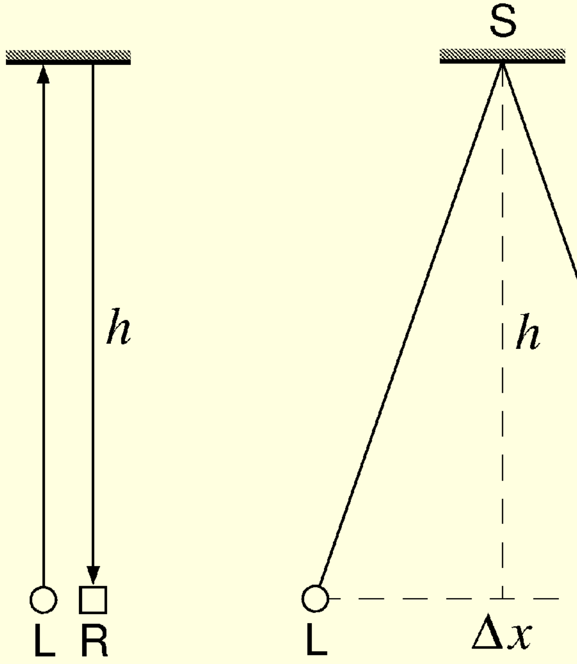
Dal teorema di Pitagora:

$$(c\,\Delta t/2)^2 = (\Delta x/2)^2 + h^2$$

da cui

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2/c^2.$$

Attenzione: Δt è il tempo segnato da un orologio *fermo nel rif.* S



Il tempo proprio come invariante

Interpretazione: abbiamo due *eventi*, L e R.

Le loro separazioni spaziale (Δx) e temporale (Δt) cambiano da un rif. all'altro.

Però l'espressione

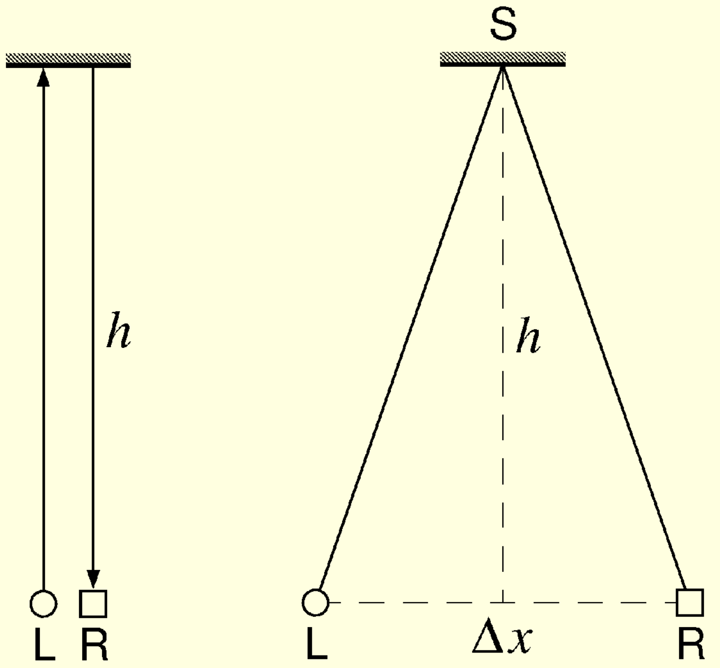
$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 / c^2$$

resta la stessa in ogni riferimento: è un *invariante*.

$\Delta\tau$ è il *tempo proprio*.

Possiamo anche pensare a un terzo rif. U (per es. un altro treno che incrocia T). Nel rif. U avremo $\Delta x'$ e $\Delta t'$, ma sarà ancora

$$\Delta\tau^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 / c^2.$$



La distanza euclidea

La formula del tempo proprio ricorda quella della distanza nel piano euclideo, in coordinate cartesiane:

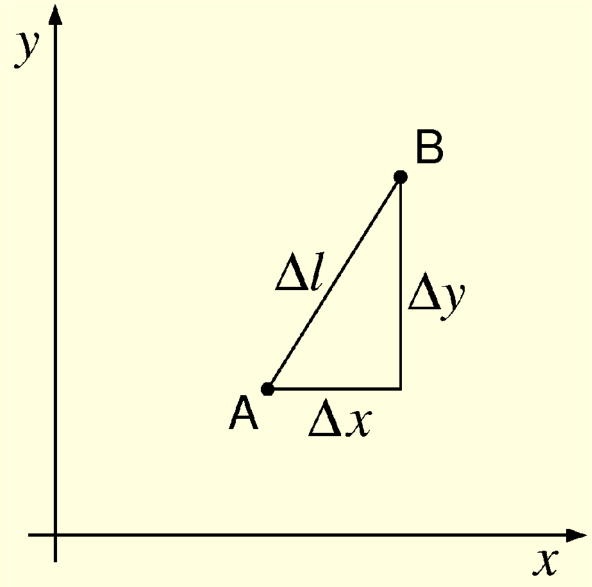
$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Ci sono due differenze: il fattore c^2 e il segno.

La prima è solo questione di unità di misura; la seconda invece è importante (vedremo).

Nella geometria euclidea la distanza è *invariante*.

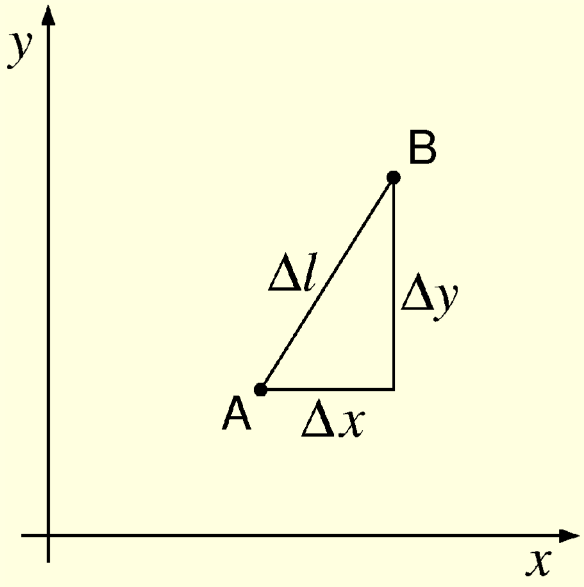
Che cosa significa questo?

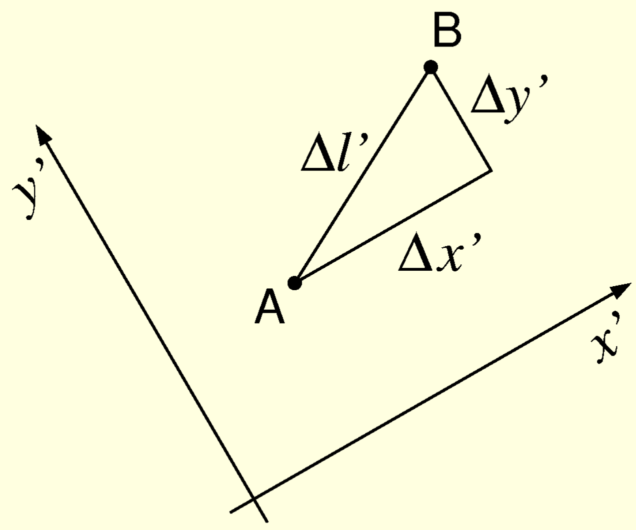


Se riferiamo lo stesso segmento AB a nuovi assi (x',y'), cambieranno tanto Δx come Δy, ma avremo ancora

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Δl (distanza) è un *invariante* della geometria del piano euclideo.





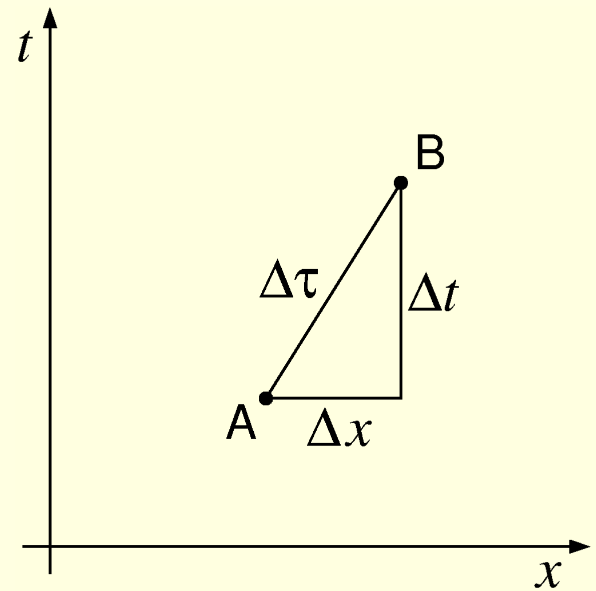
Le carte (geografiche) dello spazio-tempo

La figura è un *diagramma spazio-tempo* (con una sola dimensione spaziale) in cui sono rappresentati due eventi, A e B, separati da Δx e Δt.

L'intervallo di tempo proprio, dato dalla formula

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 / c^2$$

è *invariante* come la distanza nel piano euclideo: possiamo dunque interpretarlo come una "distanza" nello spazio-tempo.



Le virgolette stanno a ricordare che si tratta di una distanza un po' speciale, a causa di quel segno meno.

Prima di tutto: nella figura non si deve usare la geometria euclidea, a cominciare del teorema di Pitagora!

Infatti $\Delta\tau < \Delta t$, sebbene sia un'ipotenusa...

Un esperimento coi raggi cosmici

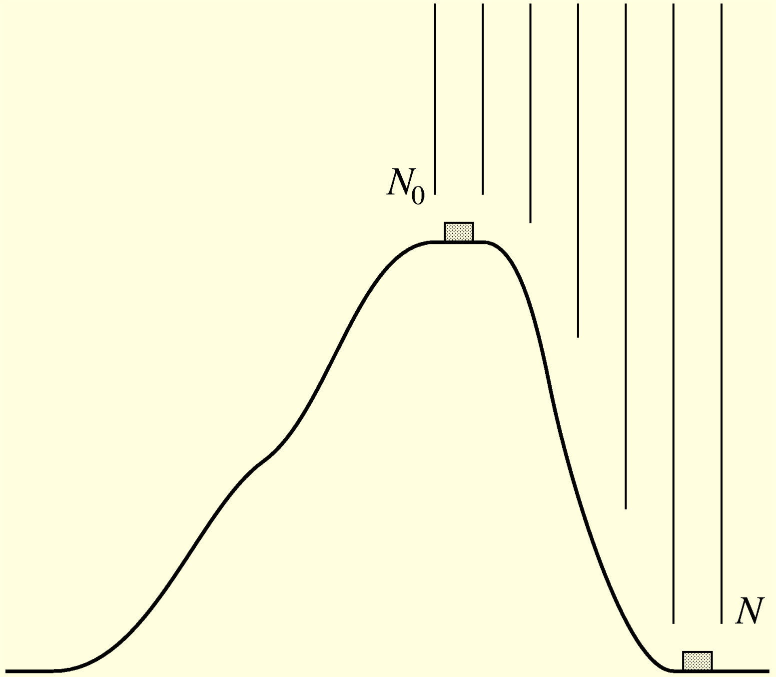
Si misura il numero di mesoni μ che arrivano per unità di tempo e di superficie sulla cima di un monte di altezza $h = 1800$ m: sia N_0. Sia invece N il numero di quelli che arrivano al livello del mare.

I muoni hanno velocità vicina a c.

La vita media di un muone fermo è $\tau = 2\ \mu$s.

Il tempo che i muoni impiegano a percorrere l'altezza h è circa 6 μs; ci si aspetterebbe quindi $N / N_0 = e^{-6/2} \simeq 0.05$, e invece si trova $N \simeq N_0$.

L'esperimento è descritto nel film PSSC:
La dilatazione del tempo.



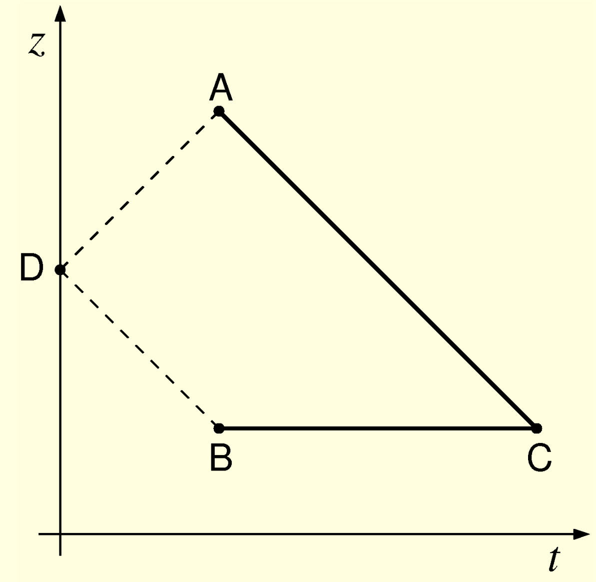
La spiegazione

In figura appaiono 4 eventi: A e B sono simultanei nel riferimento terrestre, perché sono l'arrivo di due segnali luminosi emessi in D, a mezza altezza.

BC è la linea oraria di un orologio fermo a bassa quota; AC è quella di un muone. AB $= h = \Delta z$ è il dislivello.

Abbiamo $\Delta t =$ BC $= h / v$ (v velocità del muone) mentre il tempo proprio del muone (lunghezza di AC) è dato da:

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta z^2 / c^2 = \Delta t^2 (1 - v^2 / c^2).$$



Dato che v è poco minore di c, si vede che

$$\Delta\tau \ll \Delta t.$$

Massa invariante e inerzia dell'energia

Supponiamo di avere già stabilito la relazione fondamentale

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

dove m è la massa *invariante*, ossia quella che si misura con $F = ma$ in un rif. nel quale la velocità è $\ll c$.

L'inerzia dell'energia si riferisce a *questa* massa. Dobbiamo ora vedere come si dimostra e che cosa significa.

Supponiamo ancora di aver già dimostrato che la relazione tra q. di moto e velocità è:

$$p = m \gamma v$$

dove γ ha la nota espressione

$$\gamma = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2}.$$

L'inerzia dell'energia

Questa è la denominazione più corretta, al posto della consueta “equivalenza massa-energia.”

Einstein intitola un lavoro del 1905:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?

In breve: se a un corpo *fermo* cediamo energia in modo che *resti fermo*, *la sua massa aumenta*.

Esempi:
– si scalda un corpo
– si carica la molla di un orologio
– si porta un atomo in uno stato eccitato.

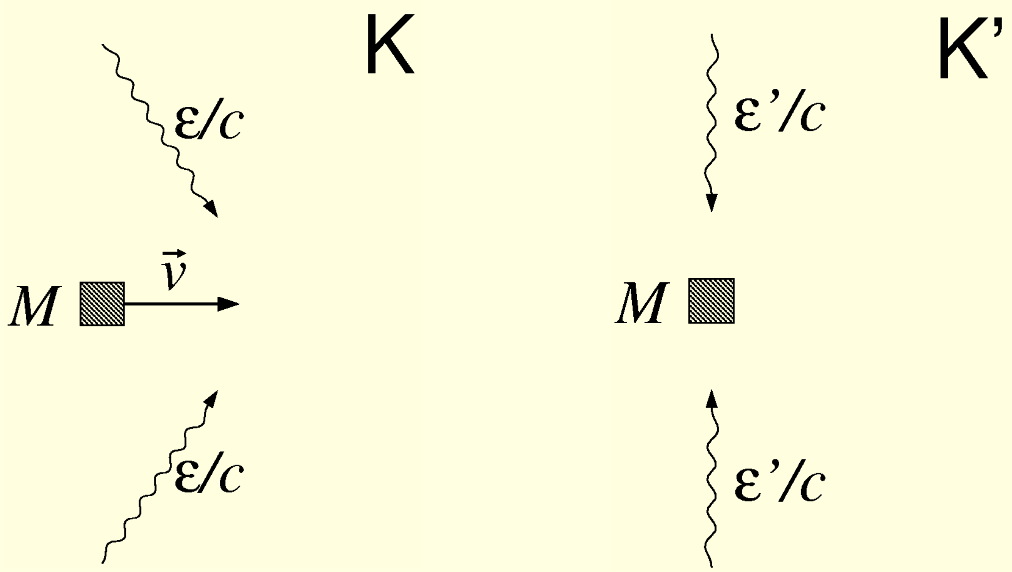
Viceversa:
– un corpo cede calore all'esterno
– il Sole emette radiazione
– l'atomo torna allo stato fondamentale.

Un esperimento ideale

Abbiamo un corpo di massa M, nero (assorbitore ideale). Su di esso mandiamo due pacchetti di radiazione (es. impulsi laser) uguali, che provengono da direzioni opposte nel rif. K' in cui M è fermo. Sia ε' l'energia di ciascun pacchetto.

Nel rif. K (laboratorio) M si muove verso destra, con velocità v. I pacchetti di radiazione si muovono obliquamente (e hanno energia ε diversa da ε', che non occorre conoscere).

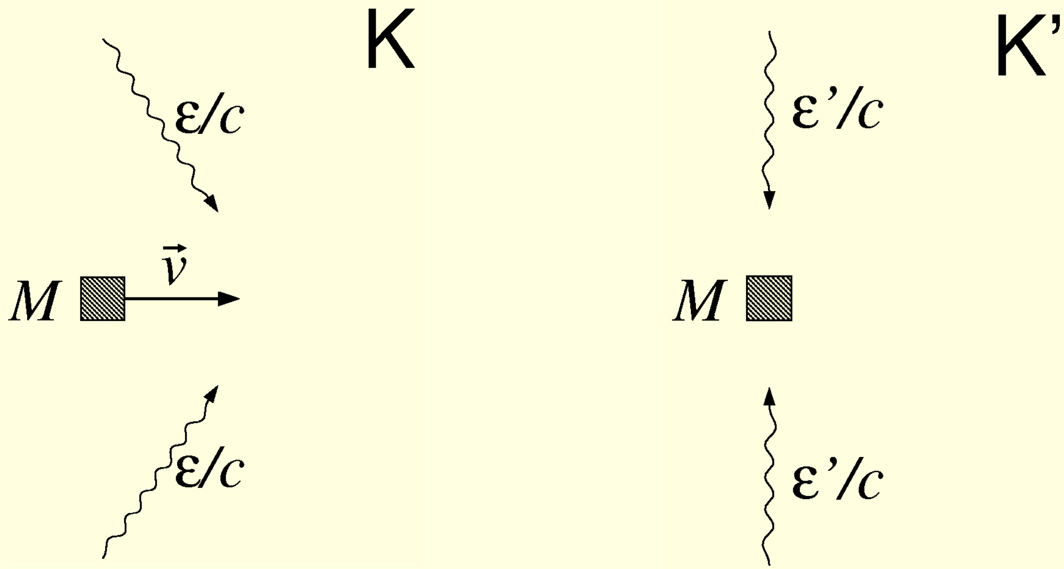
La radiazione viene assorbita da M. Vogliamo studiare il fenomeno da entrambi i riferimenti.



Iniziamo dal rif. K'.

Qui M è inizialmente fermo; la q. di moto si conserva, quindi M *rimane fermo* anche dopo aver assorbito la radiazione.

Ne segue che anche in K la sua velocità, che era inizialmente v, dovrà restare *invariata*.

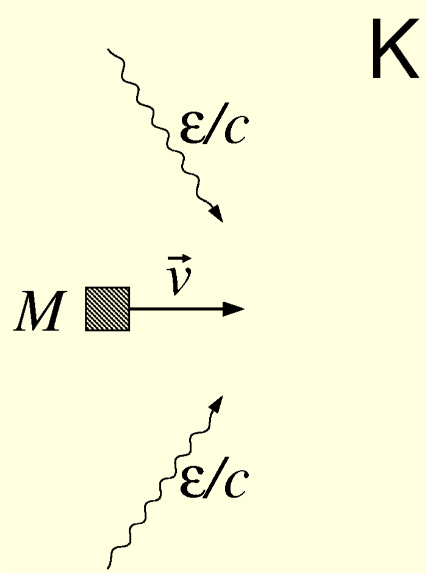


Ragioniamo invece applicando la conservazione della q. di moto in K. Sia α l'angolo che la direzione della radiazione forma con la verticale; sappiamo che un pacchetto di energia ε ha q. di moto (modulo) ε / c.

Dunque se v_{f} è la velocità finale di M, avremo:

$$M \gamma_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{f}} = M\gamma v + 2\,(\varepsilon / c) \sin \alpha$$

che è in contraddizione con $v_{\mathrm{f}} = v$!



Dov'è l'errore?

L'idea di Einstein è che l'errore stia nell'aver dato per scontato che la massa resti invariata. Proviamo infatti a supporre che la massa finale M_f sia diversa da M; allora potremo salvare $v_f = v$.

Scriviamo

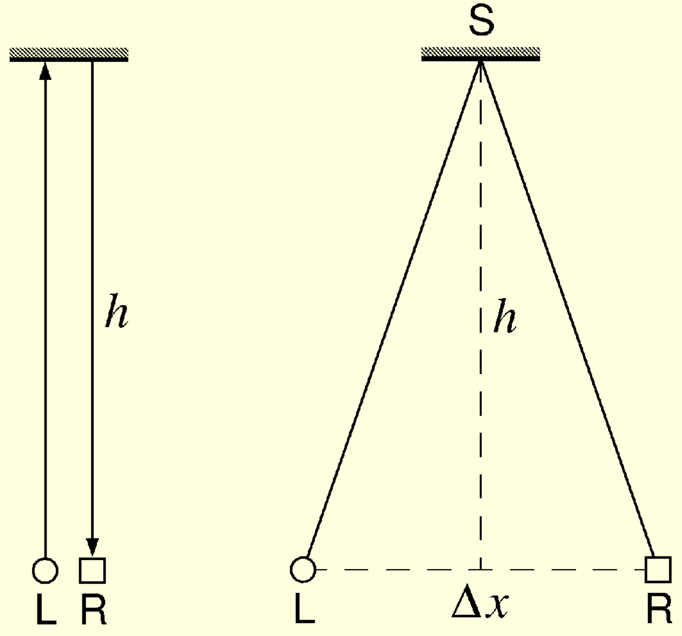
$$M_f \gamma v = M\gamma v + 2(\varepsilon / c) \sin\alpha$$

Per arrivare al risultato finale abbiamo ancora bisogno di determinare α, ma per questo basta ripensare all'orologio a luce: si vede che $\sin\alpha = v / c$. Allora

$$M_f = M + 2\varepsilon / (\gamma c^2).$$

Ma il corpo M ha giusto assorbito l'energia 2ε, che possiamo quindi sostituire con ΔE:

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2).$$



Interpretazione

Siamo arrivati a

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2) \quad (*)$$

che in parole si esprime così:

Quando un corpo che si muove con velocità v assorbe un'energia ΔE senza cambiare velocità, la sua massa aumenta come indicato dalla (*).

In particolare, dato che per un corpo fermo $\gamma = 1$:

Quando un corpo fermo assorbe un'energia ΔE restando fermo, la sua massa aumenta di

$$\Delta M = \Delta E / c^2.$$

Nelle parole di Einstein:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia.

Commenti importanti

1. Abbiamo stabilito la relazione $\Delta M = \Delta E / c^2$ con un particolare esperimento ideale, ma la sua validità è *universale*.

Infatti possiamo dare energia al corpo per una strada e poi toglierla per un'altra strada. Se la variazione di massa non fosse sempre la stessa, ci troveremmo ad avere uno stato finale del corpo uguale a quello iniziale, ma con massa diversa...

2. Abbiamo usato un esperimento ideale; questo non significa che "nella realtà" le cose vadano diversamente...

Un esperimento ideale usa la fisica conosciuta: è solo un modo per descrivere una deduzione teorica.

Se accettiamo la tale e tale legge generale, allora ne segue necessariamente che ...

La cosiddetta “massa relativistica”

L'inerzia dell'energia *non ha niente a che fare* con la “massa relativistica.”

Questa viene introdotta per salvare la relazione $p = mv$, che nella dinamica relativistica non vale se m è la *massa invariante*: quella che figura in

$$E^2 - c^2p^2 = m^2c^4.$$

In realtà la massa relativistica non è che l'energia di un corpo in moto, divisa per c^2. Apparentemente sembra giustificare la “famosa relazione” $E = mc^2$.

Ma è del tutto inutile: nessun fisico la usa mai, e serve solo a creare confusione.

La relazione valida in generale è

$$E = m\gamma c^2$$

dove si legge che *ci sono due modi distinti* per cambiare l'energia di un corpo:

a) cambiarne la velocità, col che cambia γ

b) cedergli energia senza cambiare la velocità (es. dell'esperimento ideale), col che cambia m.

Che succede quando si scalda un corpo?

Per es. un pezzo di ferro...

Succede che la sua massa *aumenta* (di pochissimo: nessuna bilancia potrebbe rivelarlo).

Ma a livello microscopico?

Gli atomi del ferro sono sempre in movimento: oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio. Se si aumenta la temperatura, l'ampiezza media delle oscillazioni cresce: crescono quindi tanto l'energia cinetica cone quella potenziale.

E le masse?

Le masse (invarianti) degli atomi *non cambiano*; eppure la massa del pezzo di ferro aumenta...

Dobbiamo quindi concludere che la massa *non è additiva*:

in generale la massa di un sistema non è uguale alla somma delle masse delle parti componenti.

Massa non additiva e difetto di massa

Nel caso del pezzo di ferro, o anche di un gas, la massa del sistema è *maggiore* della somma di quelle dei componenti.

Ma può anche essere *minore*: è quello che accade
– in una *molecola* rispetto agli *atomi* che la formano
– in un *atomo* rispetto a *nucleo ed elettroni*
– in un *nucleo* rispetto ai *protoni e neutroni*.

In tutti questi casi si parla di *difetto di massa*.

Per atomi e molecole il difetto di massa è piccolissimo e non misurabile: 10^{-9} o 10^{-10} della massa.

Per i nuclei invece è dell'ordine di 10^{-3} e può essere misurato con grande precisione.

Ma in linea di principio *non c'è nessuna differenza*.

Un esempio più complicato: una reazione chimica

In un recipiente (a pareti robuste e isolanti) mettiamo due moli d'idrogeno e una di ossigeno, a temperatura e pressione ambienti. Il volume totale è quindi circa 67 litri.

Con la solita scintilla inneschiamo la reazione che produce acqua:

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O.$$

Domanda: Confrontare la massa totale prima e dopo la reazione.

Risposta 1: Dato che due molecole di H_2O hanno massa minore di una molecola di O_2 più due di H_2, la massa sarà *diminuita*.

Risposta 2: Dato che il sistema è isolato, l'energia e quindi la massa *non cambia*.

La risposta esatta è la 2.

Spiegazione e numeri

L'entalpia di reazione è 572 kJ.

Questo è il calore che occorre sottrarre perché la reazione avvenga a temperatura e pressione costanti: in queste condizioni si formerebbero 36 grammi di acqua liquida (36 cm^3).

La massa diminuirebbe in corrispondenza:

$$572 \text{ kJ} / c^2 = 6.4\times10^{-12} \text{ kg} = 6.4\times10^{-9} \text{ g}.$$

La diminuzione è dovuta in buona parte al difetto di massa delle molecole di H_2O, ma anche all'ulteriore legame delle molecole nell'acqua liquida.

Se invece si lascia il sistema isolato, la temperatura e la pressione salgono moltissimo.
Ma dato che l'energia non è cambiata, non cambia neppure la massa.

N.B. L'esperimento è irrealizzabile, per varie ragioni...