CAPITOLO 1

Motivazioni del corso

Col termine "astrofisica relativistica" s'intende grosso modo l'insieme delle applicazioni astronomiche e astrofisiche della relatività generale; "cosmologia" designa invece l'applicazione della teoria alla struttura e alla costituzione dell'Universo. La RG ha quasi 90 anni, ma per molto tempo è stata considerata una teoria molto astratta, con applicazioni scarse e abbastanza incerte; di fatto ristrette solo alle tre "classiche":

– il redshift gravitazionale (verificato solo dopo il 1960)
– la deflessione della luce (di cui ci sono prove sicure da meno di 30 anni)
– la precessione del perielio di Mercurio (ancora discussa in tempi relativamente recenti: v. le ricerche di Dicke sullo schiacciamento del Sole).

Negli ultimi decenni ci sono stati grandi progressi teorici, sia nella comprensione della teoria, sia nelle applicazioni, oltre a molti nuovi dati sperimentali: nel sistema solare, sulle stelle, su scala cosmologica. Altri sviluppi certamente seguiranno.

Questo corso cerca di dare un'introduzione all'argomento, nella misura in cui può essere contenuta in un corso universitario, quindi di necessità assai incompleta: l'accento sarà piuttosto sulle premesse teoriche (incluse le basi matematiche) senza delle quali nessun discorso è possibile.

Seguiremo da vicino (anche se con molti tagli) il testo ormai classico di Misner, Thorne e Wheeler: *Gravitation*. Questo libro si stacca per più versi dai classici precedenti e anche da altri pressoché contemporanei, soprattutto perché consente una comprensione più profonda della fisica, grazie all'uso di una matematica più "intrinseca" (e più moderna). Anche le notazioni saranno quelle di MTW, salvo per il segno della metrica.

Le idee della RG

Il cambiamento di paradigma introdotto da Einstein nella teoria della gravitazione è espresso da MTW con la "parabola della mela." Una formica che cerca di andare "diritta" sulla superficie di una mela determina la sua traiettoria localmente, senza nessuna informazione circa la forma della superficie (ad es. se la formica va in bicicletta, tutto quello che deve fare è tener dritto il manubrio). Ma se passa vicino al picciolo la traiettoria finisce per incontrare quella di una compagna che passi dall'altra parte (fig. 1–1). Una formica "newtoniana" dirà che c'è una forza attrattiva, prodotta dal picciolo, che agisce a distanza, e incurva la traiettoria; un formica "einsteiniana" dirà invece che è la curvatura della superficie che determina la "deviazione delle geodetiche."

La traiettoria della formica è una geodetica, ed è determinata localmente, nel senso che la sua normale principale coincide con la normale alla superficie (questa è una delle possibili definizioni di geodetica di una superficie). Ma la forma della geodetica dipende dalla forma della superficie: una buca provoca l'incurvamento delle geodetiche. Nella mela il picciolo sta in un punto, ma per ragioni di continuità il suo effetto "si propaga." Perciò il picciolo sembra "agire a distanza" sulle formiche.

È in questo modo che la teoria di Einstein (*geometrodinamica*, secondo Wheeler) spiega la teoria di Newton. Niente azione a distanza, niente forze: localmente tutti i corpi sono in moto inerziale, rettilineo uniforme. È la curvatura dello spazio-tempo che produce gli effetti globali osservati. Ed è la materia che determina la curvatura dello spazio-tempo.

Wheeler dice: "*Physics is simple only when analyzed locally*":

- localmente le geodetiche appaiono diritte
- su regioni estese, geodetiche che partono da uno stesso punto si riavvicinano per effetto della curvatura: è questa l'interpretazione moderna della gravitazione
- la materia deforma la geometria dello spazio-tempo.

La struttura geometrica dello spazio-tempo

Sebbene storicamente la RG abbia fatto uso all'inizio di un formalismo matematico vincolato a sistemi di coordinate (per quanto arbitrari), per non nascondere la fisica sotto la matematica è importante non restare legati alle coordinate. La struttura e le proprietà dello spazio-tempo sono interamente determinate dalla rete degli eventi: un evento individua lo *hic et nunc* e la sua "distanza" dagli altri eventi determina la metrica.

Il primo assioma su cui si basa la matematizzazione della RG è: *lo spazio-tempo è una varietà 4-dimensionale.*

Vediamo sommariamente il significato. Consideriamo uno spazio di Hausdorff separabile $\mathcal{S}$, e una qualsiasi famiglia $\{\mathcal{A}_i\}$ di aperti, che ricopra $\mathcal{S}$. Supponiamo inoltre che esista un n tale che

- ciascun $\mathcal{A}_i$ è omeomorfo a (ossia in corrispondenza biunivoca e continua con) un aperto di $\mathbb{R}^n$: questa corrispondenza si chiama una *carta* e definisce un *sistema di coordinate* $\{x^\alpha\}$ in $\mathcal{A}_i$; l'insieme delle carte definite sugli $\mathcal{A}_i$ è un *atlante* di $\mathcal{S}$
- se $\{x^\alpha\}$, $\{y^\alpha\}$ sono i sistemi di coordinate definiti da due carte (anche di atlanti diversi) nell'intersezione delle due carte le $\{y^\alpha\}$ sono funzioni C^∞ delle $\{x^\alpha\}$ (e viceversa).

Allora $\mathcal{S}$ è una *varietà* (sottinteso C^∞) di dimensione n.

Nota: Va osservato che la condizione C^∞ non è giustificabile su basi sperimentali, né è a stretto rigore necessaria (ci si potrebbe limitare a una condizione più debole). Però conviene adottarla per semplicità, dato che non introduce nessuna restrizione importante.

Esempi: Piano, sfera, toro sono varietà 2-dimensionali, ma non sono tra loro omeomorfi. Non esiste un sistema di coordinate che ricopra tutta la sfera senza singolarità: occorrono almeno due carte, e sul toro ne occorrono 3.

La struttura matematica di cui avremo bisogno è in realtà più ricca: ci torneremo alla fine del capitolo.

Principio di equivalenza e riferimento inerziale locale

L'accelerazione di gravità è indipendente dal corpo entro 10^{-12}: è ciò che si esprime spesso parlando di "identità di massa inerziale e gravitazionale." Esperimenti assai raffinati in merito sono stati compiuti da Eötvös nei primi decenni del secolo scorso; da Dicke e coll., Braginskij e coll. negli anni '60–'70. L'idea di Einstein è che lo stato "naturale" sia la caduta libera, mentre l'accelerazione è dell'osservatore. Dunque un riferimento fermo in un campo gravitazionale *non è inerziale*: per tenerlo fermo occorre "forzarlo": il riferimento inerziale è quello *in caduta libera.*

Il principio di equivalenza afferma che un riferimento inerziale nel senso di Einstein è indistinguibile da un riferimento inerziale (newtoniano) posto lontano da qualsiasi sorgente di campo gravitazionale. Si suole però distinguere un principio di equivalenza *debole* e uno *forte.* La forma debole si applica solo al moto dei gravi, e perciò non dice niente che non fosse già noto a Galileo. Più esplicitamente era noto a Newton: per asserire che la forza di gravità è proporzionale alla massa (inerziale), egli si basa infatti sull'osservazione che nel riferimento di Giove, che è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, i satelliti di Giove si muovono come se il Sole non ci fosse.

Il principio di equivalenza forte afferma che l'equivalenza si estende a *tutti* i fenomeni fisici. Tuttavia è difficile capire come potrebbe valere il principio debole per tutti i corpi, se non valesse quello forte, dal momento che le energie di legame contribuiscono alla massa.

L'equivalenza ha solo carattere *locale*, perché i campi gravitazionali e le accelerazioni possono essere *non uniformi.* Il secondo assioma si enuncia perciò come segue: *intorno a ogni punto dello spazio-tempo esiste sempre un* RIL (*riferimento inerziale locale*) *con le seguenti proprietà*:

– in un RIL la fisica è lorentziana (solo localmente: su regioni estese si possono avere deviazioni nello spazio e nel tempo)
– un RIL è individuato dall'assenza di gravità, cioè dalla validità del principio d'inerzia.

Notare che sparisce la difficoltà della fisica classica: "un riferimento è inerziale se un corpo non soggetto a forze . . . ". Qui non occorre eliminare le forze che non siano universali (gravità), e queste si eliminano da sé.

Esiste un'analogia (che vedremo essere profonda) tra il RIL e il piano tangente a una superficie. Si può confondere una porzione di superficie col piano tangente, con approssimazione tanto migliore quanto più la regione è piccola. Ad es. sulla superficie di una sfera non vale il teorema di Pitagora: se R è il raggio della sfera

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{3R^2} + \cdots$$

dove i puntini stanno a indicare termini di sesto ordine in a/R e b/R. Si vede che l'errore relativo va a zero con le dimensioni del triangolo.

Dunque localmente ogni superficie (non singolare) è piana, vale la geometria euclidea, e si possono introdurre coordinate cartesiane. Lo stesso accade nello spazio-tempo: localmente la geometria è lorentziana, e si possono introdurre coordinate spazio-temporali (quelle di un RIL) nelle quali vale la relatività ristretta e la metrica assume la forma di Lorentz–Minkowski (v. dopo).

Unità geometriche

Si può eliminare l'unità di tempo (o quella di lunghezza) attraverso c, e quella di massa attraverso G. Si ottiene:

$3.33 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$	come unità di tempo corrisp. a $1\,\mathrm{cm}$
$1.35 \cdot 10^{28}\,\mathrm{g}$	come unità di massa " "

È utile avere presenti i valori in queste unità di alcune grandezze astronomiche e terrestri:

$$M_\oplus = 0.444\,\mathrm{cm} \qquad M_\odot = 1.48 \cdot 10^5\,\mathrm{cm}$$

$$g = 1.09 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{cm}^{-1} \qquad 1/g = 9.2 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm} \simeq 1\,\text{anno-luce}.$$

Curvatura di una varietà e forze di marea

Consideriamo due meridiani sulla sfera di raggio a, che distano ξ_0 lungo l'equatore (fig. 1–2). Alla latitudine φ, quindi alla distanza $s = a\,\varphi$ dall'equatore, la loro distanza ξ è data da

$$\sin\frac{\xi}{2a} = \sin\frac{\xi_0}{2a}\,\cos\varphi$$

che per ξ_0 piccolo si può approssimare con

$$\xi = \xi_0 \cos\varphi = \xi_0 \cos\frac{s}{a}.$$

Ne segue

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{1}{a^2}\,\xi$$

che permette una definizione "operativa" di *curvatura.* Si guarda come cambia la distanza ξ di due cerchi massimi (geodetiche) che partono paralleli; la definizione di curvatura (gaussiana) è

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{\xi}\,\frac{d^2\xi}{ds^2}. \tag{1–1}$$

Si noti che la superficie della sfera riesce curva perché le due geodetiche, viste nello spazio, sono curve concave e situate su piani convergenti nel centro: su di un cilindro una almeno delle due cose non si verifica. Dunque si tratta di curvatura *intrinseca*, e non della curvatura che appare per il fatto che la varietà è immersa in uno spazio a dimensione superiore.

Naturalmente esistono superfici sulle quali le geodetiche anziché avvicinarsi si allontanano; allora la (1–1) va cambiata di segno, e si parla di *curvatura negativa.* Un esempio sono, tra le quadriche, il paraboloide iperbolico e l'iperboloide a una falda. Può anche accadere che punti diversi di un'unica superficie abbiano curvature diverse, anche nel segno: si pensi ad es. al toro. I punti a curvatura positiva si chiamano *ellittici*, quelli a curvatura negativa *iperbolici*, e quelli a curvatura nulla *parabolici.*

Tornando ora allo spazio-tempo, pensiamo a un RIL in caduta libera verso la Terra, e siano ξ, η, ζ coordinate cartesiane, con ζ diretta secondo la verticale (fig. 1–3). Un oggetto posto inizialmente in quiete con $\zeta \neq 0$ non resta in quiete nel RIL: infatti se $\zeta > 0$ la sua accelerazione di caduta è minore di quella del riferimento, mentre è maggiore se $\zeta < 0$. In entrambi i casi si allontanerà dal centro. Dunque nel RIL, se si resta a distanze finite (e tempi finiti), la forza di gravità non si cancella esattamente. Il residuo si chiama *forza di marea*, perché la causa delle maree sta proprio in un effetto del genere: in un riferimento solidale alla Terra si risente il residuo del campo della Luna, nonostante che la Terra sia in "caduta libera" verso il satellite.

In termini quantitativi, il calcolo porta a

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{2M}{r^3}\,\zeta$$

(r è la distanza dal centro della Terra). Un effetto analogo si manifesta se ξ o η sono diverse da zero, stavolta perché il campo gravitazionale non è più parallelo all'asse ζ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{M}{r^3}\,\xi \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{M}{r^3}\,\eta.$$

Le tre equazioni si sintetizzano in

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -R^i{}_{0k0}\,\xi^k$$

dove

$$R^1{}_{010} = R^2{}_{020} = \frac{M}{r^3}, \quad R^3{}_{030} = -\frac{2M}{r^3}$$

e gli altri R sono nulli. (La complicata scelta degli indici si chiarirà più avanti.) Numericamente:

$$\frac{M}{r^3} = \frac{0.444}{6.38^3 \cdot 10^{24}} = 1.71 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm}^{-2}.$$

Per analogia con la (1–1) possiamo dunque parlare di una *curvatura dello spazio-tempo*; per il raggio di curvatura (in prossimità della Terra) si trova $2.4 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm} = 1.6\,\mathrm{UA}$.

Effetto della materia

Abbiamo visto che alla superficie della Terra

$$R^1{}_{010} = R^2{}_{020} = \frac{M}{r^3} = \tfrac{4}{3}\pi\bar{\varrho}$$

mentre $R^3{}_{030}$ è diverso, anche nel segno. Se però ripetiamo il calcolo in un pozzo verticale (supponendo uniforme la densità della Terra) troviamo lo stesso valore per tutte le $R^k{}_{0k0}$, per cui

$$\tilde{R}_{00} \overset{\mathrm{def}}{=} R^\alpha{}_{0\alpha 0} = 4\pi\varrho.$$

Vedremo molto più avanti che riesce utile introdurre un altro tensore $\mathbf{G}$ (tensore di Einstein), e che col suo uso l'equazione precedente si scrive

$$G_{00} = 8\pi\varrho.$$

Questa è una delle *equazioni di Einstein*, qui introdotta in modo elementare per darne subito, almeno in parte, il significato intuitivo.

La metrica

Il principio di equivalenza afferma che in un RIL vale la relatività ristretta: dunque esistono coordinate *localmente lorentziane*, ossia tali che l'intervallo invariante fra due eventi ha l'espressione

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (1\text{–}2)$$

(metrica di Lorentz–Minkowski). Non possiamo aspettarci che tale espressione sia valida anche a distanza finita; anzi abbiamo ragioni per aspettarci una curvatura. Però resta vero che deve sempre esistere una *metrica*, che in opportune coordinate assumerà *localmente* la forma (1–2).

Conviene spesso riscrivere la (1–2) usando coordinate diverse. Per una generica trasformazione di coordinate il secondo membro diventerà una forma quadratica nei differenziali delle coordinate $\{x^\alpha\}$:

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \qquad (1\text{–}3)$$

dove i coefficienti $g_{\alpha\beta}$ saranno in generale funzioni delle coordinate. Vedremo più avanti una forma matematicamente più rigorosa di questa espressione.

Una varietà in cui sia definita una *metrica* (eq. (1–3)) si dice *riemanniana*; più esattamente *semiriemanniana* perché la (1–3) non è definita positiva, ma ha *segnatura* -2 (la differenza fra il numero di coefficienti positivi e di quelli negativi nella forma diagonalizzata).

La struttura geometrica che sta a base della RG si precisa dunque così:

Lo spazio-tempo è una varietà 4*-dimensionale semiriemanniana, di segnatura* -2.

L'interpretazione fisica è la seguente:

Il sistema di coordinate in cui la metrica assume localmente la forma (1–2) *descrive un* RIL, *nel quale vale* (localmente) *la relatività ristretta.*

Condizioni di validità

Le basi degli assiomi sono in tutta la fisica che conosciamo. Va però osservato che la RG *è una teoria classica*: sono quindi prevedibili deviazioni quando gli effetti quantistici diventano importanti. Cerchiamo la massa M_P e la lunghezza L_P a cui ciò accade.

Nel legame gravitazionale di due masse la relatività diventa importante quando l'energia di legame è dell'ordine dell'energia di riposo:

$$\frac{GM_\mathrm{P}^2}{L_\mathrm{P}} \simeq M_\mathrm{P}c^2 \quad \Rightarrow \quad GM_\mathrm{P} \simeq c^2 L_\mathrm{P}$$

Gli effetti quantistici sono importanti quando l'energia di legame è confrontabile con quella dello stato fondamentale dell'"atomo gravitazionale":

$$\frac{GM_\mathrm{P}^2}{L_\mathrm{P}} \simeq \frac{G^2M_\mathrm{P}^5}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad GM_\mathrm{P}^3 L_\mathrm{P} \simeq \hbar^2$$

(l'energia dello stato fondamentale dell'atomo gravitazionale si ottiene da quella dell'atomo elettronico con la sostituzione $e^2 \mapsto GM_\mathrm{P}^2$). Eliminando si ottiene:

$$L_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{cm}$$

$$M_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{g}$$

che si chiamano di solito *lunghezza di Planck* e *massa di Planck* (da qui l'indice $_\mathrm{P}$ che è stato usato).

Da lunghezza e massa di Planck possiamo ricavare un *tempo di Planck* e una *densità di Planck*:

$$T_\mathrm{P} = L_\mathrm{P}/c = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.4 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}$$

$$\varrho_\mathrm{P} = \frac{M_\mathrm{P}}{L_\mathrm{P}^3} = \frac{c^5}{\hbar\, G^2} = 5.2 \cdot 10^{93}\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Dobbiamo dunque aspettarci che la RG cada in difetto quando la densità della materia sia dell'ordine di ϱ_{P}, il che nei modelli di universo che vedremo accade a tempi dell'ordine di T_{P}.