CAPITOLO 5

Il principio della geodetica

Sappiamo che in un RIL vale il principio d'inerzia: un corpo non soggetto a forze (elettriche, ecc.) si muove di moto rettilineo uniforme. La curva che descrive il moto nello spazio-tempo è perciò una retta. Come si traduce questa prescrizione quando si abbandona il RIL? La generalizzazione naturale di una retta a una varietà (semi)riemanniana è la *geodetica*, ed Einstein enuncia perciò il "principio della geodetica": *il moto di caduta libera è una geodetica dello spazio-tempo.*

Il principio della geodetica appare inizialmente un postulato indipendente della teoria; più tardi però Einstein e Infeld dimostrano che esso è in realtà conseguenza delle equazioni fondamentali della RG, per un corpo di prova di massa trascurabile.

Definizione e proprietà delle geodetiche

Daremo qui una definizione di geodetica, per una varietà (semi)riemanniana $\mathcal{M}$, attraverso un principio variazionale. Consideriamo due punti A, B di $\mathcal{M}$ e una *curva* da A a B, ossia un'applicazione (sottinteso C^∞)

$$\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}, \quad \lambda \mapsto \mathrm{P}(\lambda), \quad \gamma(0) = \mathrm{A}, \quad \gamma(1) = \mathrm{B}$$

e il funzionale S dalle curve γ ai reali definito da

$$S = \int_0^1 L \, d\lambda = \tfrac{1}{2} \int_0^1 g_{\alpha\beta} \, \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \, d\lambda = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 d\lambda. \tag{5–1}$$

Geodetica è una curva γ per cui S è *estremale*. Come si vede dall'ultima espressione nella (5–1), questa definizione è *intrinseca*, ossia non dipendente dalle coordinate che si usano. Si noti però che non è detto in generale che tale curva sia unica, né che S sia minimo o massimo.

La forma del funzionale S e quella di L:

$$L = \tfrac{1}{2} \, g_{\alpha\beta} \, \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

presentano stretta analogia con la formulazione variazionale della meccanica analitica: basta leggere t in luogo di λ e interpretare L come una lagrangiana in assenza di forze (manca il termine potenziale). Si possono dunque applicare tutti i risultati noti della meccanica analitica.

In primo luogo, dato che in questo caso la lagrangiana coincide con l'energia (che è solo cinetica) abbiamo che *L è costante lungo una geodetica.* Ne segue che $d\tau/d\lambda$ è costante, e scegliendo $L = 1/2$ possiamo identificare λ con τ. In realtà ciò è possibile solo se la geodetica è temporale, che però è il caso per noi più importante. Sulle geodetiche della luce si ha invece $L = 0$.

Dal principio variazionale si può ricavare il sistema di equazioni (di Eulero–Lagrange) delle geodetiche, ma per ora non ne avremo bisogno. È invece utile ricordare che ogni invarianza della lagrangiana (ossia della metrica) fornisce costanti del moto: in particolare se le $g_{\alpha\beta}$ non dipendono da una delle coordinate (ad es. x^α) sarà costante su ogni geodetica il *momento coniugato*

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda} \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right).$$

Più in generale, potremo ottenere una costante del moto dal teorema di Nöther.

Osserviamo infine che il funzionale

$$\tilde{S} = \int_0^1 \sqrt{L}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\tau}{d\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\tau_{\mathrm{B}} - \tau_{\mathrm{A}}) \tag{5–2}$$

definito sulle curve temporali risulta anch'esso estremale su ogni geodetica (basta scrivere le equazioni di Eulero–Lagrange e ricordare che L è costante). Si può anzi dimostrare che se A e B sono abbastanza vicini $\tilde{S}$ è massimo; abbiamo dunque che *il moto di caduta libera rende massimo il tempo proprio* (caso particolare: il paradosso dei gemelli).

Tuttavia se si usa $\tilde{S}$ in luogo di S nella definizione di geodetica si perde qualcosa: le equazioni di Eulero–Lagrange che ne derivano non sono indipendenti. Senza bisogno di scriverle esplicitamente, la cosa si spiega come segue.

Si avranno 4 equazioni indipendenti se potremo trovare 4 variazioni indipendenti delle x^α, per le quali $\delta\tilde{S}$ non riesca identicamente nulla. Ora questo non accade, perché se si prende

$$\delta x^\alpha = \varepsilon\,\dot{x}^\alpha \tag{5–3}$$

ci si limita a spostare ciascun punto lungo il *sostegno* di γ, il che equivale a mantenere la forma geometrica della curva, cambiando solo la parametrizzazione. Ma la (5–2) mostra che $\tilde{S}$ non dipende dalla parametrizzazione, per cui le (5–3) annullano identicamente $\delta\tilde{S}$.

Da $\tilde{S}$ si ottiene quindi la geodetica come insieme di punti in $\mathcal{M}$, ma non come *curva parametrizzata*: il parametro (tempo proprio) dev'essere aggiunto *ad hoc.* La situazione è del tutto analoga a quella che si ha in meccanica analitica se la lagrangiana non dipende dal tempo: si può usare l'azione di Maupertuis per ottenere la traiettoria, ma non la legge oraria.

Geodetiche radiali della geometria di Schwarzschild

Applichiamo la definizione di geodetica alla geometria di Schwarzschild, limitandoci al moto radiale, e usando le coordinate r, t, che ci portano più rapidamente al risultato. La lagrangiana è:

$$L = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\dot{t}^{\,2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\dot{r}^2}{1 - 1/r}$$

dove $\dot{t}$, $\dot{r}$ sono le derivate rispetto al parametro λ, che poi identificheremo con τ. Le costanti del moto sono:

$$2L = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\dot{t}^{\,2} - \frac{\dot{r}^2}{1 - 1/r} = 1 \tag{5–4}$$

$$E = p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\dot{t}. \tag{5–5}$$

Come abbiamo già visto, la (5–4) identifica λ con τ; quanto alla (5–5), è ragionevole chiamarla "energia." Combinandole si ottiene subito

$$\dot{r}^2 = E^2 - 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \tag{5–6}$$

avendo posto

$$r_0 = \frac{1}{1 - E^2}.$$

La (5–6) si può integrare tramite la variabile ausiliaria η:

$$r = \tfrac{1}{2}\,r_0\,(1 + \cos\eta) \qquad \tau = \tfrac{1}{2}\,r_0^{3/2}\,(\eta + \sin\eta).$$

Le relazioni precedenti hanno senso solo per $E < 1$, e mostrano che in tal caso r raggiunge un massimo pari a r_0. Si vede anche che:

1) Il tempo (proprio) di caduta da $r = r_0$ a $r = 0$ è finito, e vale $\tfrac{1}{2}\pi\,r_0^{3/2}$.
2) L'equazione del moto (5–6) è la stessa che si ottiene dalla meccanica newtoniana, dove naturalmente r è la distanza dal centro e τ è il tempo (assoluto) di Newton.
3) Se si fa il caso limite di piccola velocità ($|\dot{r}| \ll 1$) e campo debole ($r \gg 1$) dalla (5–6) si ricava

$$E = 1 + \tfrac{1}{2}\,\dot{r}^2 - \frac{1}{2r}.$$

L'interpretazione di questa equazione è immediata: E rappresenta l'energia per unità di massa del corpo che cade: il termine 1 è la massa di riposo, il successivo è l'energia cinetica, e il terzo l'energia potenziale.

Ci riuscirà utile in seguito il caso $E = 1$ (caduta dall'infinito), essenzialmente perché le formule sono più semplici. Si verifica facilmente che allora

$$r = s^2 \qquad \tau = -\tfrac{2}{3}s^3 \tag{5–7}$$

$$t = -\tfrac{2}{3}s^3 - 2s + \ln\frac{s+1}{|s-1|} \tag{5–8}$$

dove abbiamo introdotto una nuova variabile ausiliaria s, e scelto le origini di τ e t alla fine della caduta ($r = 0$). Si noti che un'espressione per t avrebbe dovuto essere scritta anche nel caso $E < 1$, ma sarebbe riuscita assai complicata. La singolarità delle coordinate di Schwarzschild appare evidente nella (5–8): per $s \to 1$, sebbene non vi sia alcuna singolarità nel moto, $t \to \infty$.

Propagazione della luce

Studiamo ora la propagazione della luce, abbandonando la restrizione a geodetiche radiali. Possiamo sempre ignorare, per simmetria, una delle coordinate angolari, ad es. ponendo $\vartheta = \pi/2$. La condizione $L = 0$ ci dà

$$\frac{r-1}{r}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{r}{r-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \tag{5–9}$$

e poi le costanti del moto:

$$\frac{r-1}{r}\,\frac{dt}{d\lambda} = E \qquad r^2\,\frac{d\varphi}{d\lambda} = J. \tag{5–10}$$

Abbiamo indicato esplicitamente le derivate rispetto a λ, per mettere in evidenza che λ *non è* il tempo proprio (che su queste geodetiche è nullo). Anzi, va tenuto presente che λ è definito a meno di una trasformazione lineare; si può giocare su questo per imporre ad es. $E = 1$. Inoltre scriveremo b in luogo di J. La ragione di questa scelta sarà chiara tra poco.

Usando le (5–10), la (5–9) si trasforma in

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + b^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right) = 1 \tag{5–11}$$

che al limite $r \to \infty$ dà $dr/d\lambda = -1$ (il segno meno perché consideriamo luce che arriva dall'infinito). Nelle stesse condizioni, la prima delle (5–10) fornisce $dt/d\lambda = 1$ e la seconda diviene

$$r^2\,\frac{d\varphi}{dt} = b \quad \text{oppure} \quad r^2\,\frac{d\varphi}{dr} = -b.$$

Integrando questa si trova $\varphi = b/r$; dunque per una traiettoria che raggiunga l'infinito $b = \lim(r\varphi) = \lim(r \sin\varphi)$: si vede allora che b rappresenta il parametro d'urto (fig. 5–1).

Torniamo ora alla (5–11): questa si analizza facilmente se la s'interpreta come l'equazione del moto (newtoniana) di un punto materiale di massa 2 e di energia 1 nel potenziale equivalente

$$V(r) = b^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Il potenziale ha un massimo per $r = 3/2$ che vale $4b^2/27$; si annulla per $r = 1$ e per $r \to \infty$ ed è negativo per $r < 1$ (fig. 5–2). Se ne ricavano, tra le altre, le seguenti conclusioni:

1) Se $b > \sqrt{27/4}$ la luce resta sempre confinata in $r < 3/2$ oppure raggiunge una r minima e poi torna ad allontanarsi. In particolare, se b è sufficientemente vicino al valore limite, la luce prima di allontanarsi compie uno o più giri completi.
2) Nel primo caso, la luce "cade" necessariamente in $r = 0$, eventualmente seguendo una traiettoria a spirale.
3) Se $b = \sqrt{27/4}$ è possibile, anche se instabile, un moto circolare, con $r = 3/2$.
4) Se $b \gg 1$ il termine b^2/r^3 nel potenziale è piccolo, e si può trattare il problema con tecniche approssimate.

Il moto di una particella

Consideriamo una particella di massa non nulla, ma molto piccola rispetto a M, in modo da poterci ancora ridurre alla ricerca delle geodetiche, ma questa volta temporali. Per la lagrangiana si ha:

$$2L = \frac{r-1}{r}\, \dot{t}^2 - \frac{r}{r-1}\, \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 \tag{5–12}$$

e valgono ancora le costanti del moto (5–10):

$$\frac{r-1}{r}\, \dot{t} = E \qquad r^2 \dot{\varphi} = J \tag{5–13}$$

(ora e in seguito il punto indica derivata rispetto a τ).

Sostituendo le (5–13) nella (5–12) si trova

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right). \tag{5–14}$$

Questa potrebbe essere in linea di principio integrata per fornire r in funzione di τ, ma non è ciò che c'interessa. È più importante ottenere la traiettoria, ossia r in funzione di φ. A questo scopo basta sostituire nella (5–14)

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{J}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi}$$

e si arriva a

$$\frac{J^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right). \tag{5–15}$$

Purtroppo la (5–15) non è integrabile con funzioni elementari, per cui bisognerà ricorrere ancora una volta ad approssimazioni, che ovviamente dipendono dal particolare problema che si ha di fronte. Vedremo un'applicazione nel prossimo capitolo.