CAPITOLO 12

Il tensore di Riemann

Finalmente siamo in grado di dare una definizione di questo “oggetto misterioso,” più volte citato.

Definizione: Consideriamo l'applicazione

$$\mathcal{V}^{\times 3} \to \mathcal{V}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} = \bigl([\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\bigr)\mathbf{w}. \tag{12–1}$$

In realtà la (12–1) è *un'applicazione* $\mathcal{T}_A^{\times 3} \to \mathcal{T}_A$, ossia non è differenziale su nessuno dei tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Si tratta dunque di un *tensore di rango* $\binom{1}{3}$, che si chiama *tensore di Riemann.*

Dim.: Dobbiamo far vedere che:

$$\mathbf{R}_{f\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} = f\,\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} \tag{12–2}$$
$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},f\mathbf{v}}\mathbf{w} = f\,\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} \tag{12–3}$$
$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f\mathbf{w}) = f\,\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w}. \tag{12–4}$$

Cominciamo dalla prima, calcolando i diversi termini:

$$\begin{aligned}
[\nabla_{f\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}]\,\mathbf{w} &= (\nabla_{f\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{f\mathbf{u}})\,\mathbf{w} = f\,\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}}(f\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}) \\
&= f\,\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - f\,\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - (\partial_{\mathbf{v}}f)\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} \\
\nabla_{[f\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w} &= \nabla_{f[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w} - \nabla_{(\partial_{\mathbf{v}}f)\mathbf{u}}\mathbf{w} = f\,\nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w} - (\partial_{\mathbf{v}}f)\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w};
\end{aligned}$$

sottraendo si ottiene la (12–2). La (12–3) si dimostra allo stesso modo. Quanto alla (12–4), abbiamo:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}(f\mathbf{w}) &= \nabla_{\mathbf{u}}\bigl(f\,\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} + (\mathbf{v}f)\,\mathbf{w}\bigr) \\
&= f\,\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} + (\mathbf{u}f)\,\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} + (\mathbf{v}f)\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + (\mathbf{u}\mathbf{v}f)\,\mathbf{w} \\
\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{w}) &= f\,\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + (\mathbf{v}f)\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + (\mathbf{u}f)\,\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} + (\mathbf{v}\mathbf{u}f)\,\mathbf{w}
\end{aligned}$$

e da queste:

$$[\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}]\,(f\mathbf{w}) = f\,[\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}]\,\mathbf{w} + ([\mathbf{u},\mathbf{v}]\,f)\,\mathbf{w}. \tag{12–5}$$

Ancora:

$$\nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}(f\mathbf{w}) = f\,\nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w} + ([\mathbf{u},\mathbf{v}]\,f)\,\mathbf{w}. \tag{12–6}$$

e sottraendo la (12–6) dalla (12–5) si ottiene la tesi. ∎

Alcune proprietà del tensore di Riemann:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} = -\mathbf{R}_{\mathbf{v},\mathbf{u}}\mathbf{w} \tag{12–7}$$

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} = [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}]\,\mathbf{w} \tag{12–8}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} + \mathbf{R}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\mathbf{u} + \mathbf{R}_{\mathbf{w},\mathbf{u}}\mathbf{v} = 0. \tag{12–9}$$

Le prime due sono evidenti; la terza segue dall'identità di Jacobi per i commutatori e dalla simmetria della derivazione covariante.

Occupiamoci ora delle componenti del tensore di Riemann. La notazione è la seguente:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, u^{\gamma} v^{\delta} w^{\beta}\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

(attenzione all'ordine degli indici!) A causa delle simmetrie (12–7) e (12–9) il numero di componenti indipendenti, in una varietà di dimensione n, non è n^4, ma solo $\frac{1}{3}n^2(n^2-1)$; nel caso che più c'interessa, $n=4$, se ne ottengono 80.

Tensore di Riemann e curvatura

Una varietà $\mathcal{M}$ dotata di connessione affine si dice *piatta* se ammette un atlante tale che i coefficienti di connessione sono nulli in ogni punto. Le coordinate definite dalle carte dell'atlante sono *coordinate cartesiane* (non ortogonali: il prodotto scalare non è definito!) Una varietà che non sia piatta si dice *curva.*

Ci sono due modi di vedere la relazione fra il tensore di Riemann e la curvatura della varietà: il primo concerne il trasporto parallelo di un vettore *lungo una curva chiusa*, e il secondo la *deviazione delle geodetiche.*

Consideriamo la curva chiusa $ABEDCA$ che abbiamo costruito nel Cap. 9 per studiare il significato del commutatore di due campi vettoriali $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Prendiamo un vettore $\mathbf{w}$ e trasportiamolo parallelamente lungo $ABEDCA$: si dimostra che in questa operazione si ritorna al punto A con un $\mathbf{w}'$ che differisce da $\mathbf{w}$ per

$$\delta\mathbf{w} = -\bar{\lambda}\bar{\mu}\,\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} \tag{12–10}$$

a meno di termini del terzo ordine in $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$.

Osservazione: La (12–10) spiega perché sia necessario il termine $\nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}$ nella definizione del tensore di Riemann: esso tiene conto del trasporto sul lato ED.

Dim.: Non daremo la dimostrazione nel caso generale, ma solo nell'ipotesi $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = 0$, perché ci sarà utile più avanti. In questo caso $D = E$ e dobbiamo solo fare il trasporto lungo $ABDCA$.

Conviene introdurre la notazione $\Theta_{\gamma}\mathbf{w}$ per il trasporto di $\mathbf{w}$ da un estremo all'altro dell'arco di una curva γ; useremo poi anche l'ovvia notazione $\Theta_{AB}\mathbf{w}$, e simili.

Cominciamo con l'osservare che dalla (11–3) segue

$$\Theta_{AB}\mathbf{w}(A) = \mathbf{w}(B) - \bar{\lambda}\,(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(B) + O(\bar{\lambda}^2).$$

Trascuriamo d'ora in poi di scrivere i termini $O(\bar\lambda^2)$, $O(\bar\mu^2)$, in quanto si cancellano, a meno di termini del terzo ordine: quelli su AB con quelli su CD, ecc.

Proseguendo:

$$\begin{aligned}\Theta_{ABD}\mathbf{w}(A) &= \Theta_{BD}\mathbf{w}(B) - \bar\lambda\,\Theta_{BD}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(B)\\ &= \mathbf{w}(D) - \bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w})(D) - \bar\lambda\,(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(D) + \bar\lambda\bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(D)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{ABDC}\mathbf{w}(A) &= \mathbf{w}(C) - \bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w})(C) - \bar\lambda\,(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(C) + \bar\lambda\bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(C)\\ &\quad + \bar\lambda\,(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(C) - \bar\lambda\bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w})(C)\\ &= \mathbf{w}(C) - \bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w})(C) + \bar\lambda\bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(C) - \bar\lambda\bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w})(C)\end{aligned}$$

$$\Theta_{ABDCA}\mathbf{w}(A) = \mathbf{w}(A) + \bar\lambda\bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})(A) - \bar\lambda\bar\mu\,(\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w})(A)$$

e da qui segue subito la (12–10). ■

L'estensione della (12–10) a una curva chiusa qualsiasi richiederebbe la teoria dell'integrazione sulle varietà, che non possiamo affrontare; ma è plausibile l'asserzione che *se* $\mathbf{R} = 0$ *in una parte di* $\mathcal{M}$*, il trasporto parallelo dei vettori non dipende dal cammino*. Poiché questo è quanto accade in uno spazio euclideo, è ragionevole attendersi che $\mathbf{R} = 0$ caratterizzi le varietà piatte, di cui gli spazi euclidei sono un caso particolare: ne daremo la dimostrazione più avanti.

Passiamo ora alla deviazione delle geodetiche. Osserviamo innanzitutto che se $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = 0$ si ha:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$$

(la prima eguaglianza discende dalla (12–8); la seconda dalla simmetria della derivazione covariante, nell'ipotesi $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = 0$). Se inoltre le curve integrali di $\mathbf{u}$ sono geodetiche ($\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$) si arriva a

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}. \tag{12–11}$$

Il significato del secondo membro della (12–11) è il seguente. Per un punto A (fig. 12–1) tracciamo la geodetica di vettore tangente $\mathbf{u}$, e su questa scegliamo i punti B ($\lambda = \bar\lambda$) e C ($\lambda = -\bar\lambda$). Sempre da A facciamo partire la curva integrale di $\mathbf{v}$, e su questa sia A' il punto con $\mu = \bar\mu$. Prendiamo la geodetica per A' tangente a $\mathbf{u}$, e su questa i punti B' e C' definiti come B e C. Dato che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ commutano, la curva integrale di $\mathbf{v}$ che parte da B con $\mu = 0$ passa per B' con $\mu = \bar\mu$, ecc. Ricordiamo ora (eq. (11–3)) che

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \lim_{\bar\lambda\to 0}\frac{1}{\bar\lambda}\bigl(\mathbf{v}' - \mathbf{v}(A)\bigr)$$

dove $\mathbf{v}'$ è $\mathbf{v}(B)$ trasportato parallelamente in A; ne segue facilmente

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \lim_{\bar{\lambda}\to 0} \frac{1}{\bar{\lambda}^2}\bigl(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'' - 2\,\mathbf{v}(A)\bigr)$$

dove $\mathbf{v}''$ è $\mathbf{v}(C)$ trasportato parallelamente in A. Quello che conta non è dunque se le due geodetiche per A e per A' sono parallele (il che richiederebbe $\mathbf{v} = \mathbf{v}' = \mathbf{v}''$), ma solo se la variazione di $\mathbf{v}$ passando da C ad A a B sia o no lineare.

È chiaro che in uno spazio euclideo accade proprio così (le geodetiche sono rette!) e dunque *l'annullarsi o no di $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ indica se la varietà sia piatta o curva*. La (12–11) ci dice che ciò dipende da $\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{u}$: più esattamente questa espressione misura la curvatura della varietà secondo la sezione bidimensionale descritta dalle geodetiche tangenti a $\mathbf{u}$ e che passano per i punti costruiti come A' (al variare di $\bar{\mu}$). Scegliendo altre coppie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ si ottengono altre sezioni, e si può dimostrare che con questo procedimento *è possibile determinare tutte le componenti del tensore di Riemann.*

Coordinate normali di Riemann

Come abbiamo già detto, esiste un intorno U di A nel quale per ogni punto P passa, con $\lambda = 1$, una e una sola geodetica uscente da A con $\lambda = 0$. Sia $\mathbf{u}$ il vettore tangente a quella geodetica. Scelta in A una base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, avremo $\mathbf{u} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Abbiamo così definito in U un *sistema di coordinate*: infatti le x^α sono determinate da P e viceversa, date le x^α, la stessa procedura determina un punto P. Queste si chiamano *coordinate normali di Riemann* relative al punto A e alla base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

L'importanza delle coordinate normali di Riemann sta nelle seguenti proprietà:

1) Comunque si scelga $\mathbf{u}$, la curva di equazioni $x^\alpha = \lambda\, u^\alpha$ è una geodetica. La (11–4) ci dice allora che

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = 0 \quad \text{per tutti gli } \mathbf{u},$$

e quindi *tutti i coefficienti di connessione sono nulli in A.*

2) Se definiamo $\mathbf{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ *abbiamo un'estensione della base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ a una base coordinata in tutto U.*

3) Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{e}_\gamma,\mathbf{e}_\delta}\mathbf{e}_\beta &= [\nabla_{\mathbf{e}_\gamma}, \nabla_{\mathbf{e}_\delta}]\,\mathbf{e}_\beta = \nabla_{\mathbf{e}_\gamma}(\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}\,\mathbf{e}_\alpha) - \nabla_{\mathbf{e}_\delta}(\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,\mathbf{e}_\alpha)\\ &= \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma}\,\mathbf{e}_\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta}\,\mathbf{e}_\alpha.\end{aligned}$$

Dunque *in coordinate normali si ha*

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta}. \tag{12–12}$$

Questi risultati ci permettono di dimostrare il teorema: *una varietà è piatta sse il tensore di Riemann si annulla.*

Dim.: Se $\mathcal{M}$ è piatta, i coefficienti di connessione si annullano ovunque: allora la (12–12) porta subito alla tesi. Se invece $\mathbf{R} = 0$, il trasporto parallelo non dipende dal percorso: allora una base definita in un punto A può essere trasportata a tutta la varietà e la definizione di trasporto parallelo implica $\nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{e}_\beta = 0$, da cui $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = 0$ in tutta $\mathcal{M}$. Si ha inoltre $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 0$, ossia $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ è una base coordinata. L'equazione delle geodetiche si scrive

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = 0$$

perché i coefficienti di connessione sono nulli: dunque le $\{x^\alpha\}$ sono coordinate cartesiane. ∎

Nota: Il fatto che anche per una varietà curva sia sempre possibile, con opportuna scelta delle coordinate, annullare i coefficienti di connessione in un punto, mostra che *i coefficienti di connessione non sono le componenti di un tensore.*

Infatti un cambiamento di coordinate equivale, nello spazio tangente $\mathcal{T}_A$, a un cambiamento di base. Ora se le componenti di un tensore sono nulle in una base, lo sono in qualunque altra, a differenza di quanto accade per i coefficienti di connessione.

Estensione a un tubo geodetico

Vogliamo mostrare che è possibile estendere le coordinate normali di Riemann dall'intorno di un punto *all'intorno tubolare di una geodetica* (il significato di un tale intorno verrà precisato nel seguito).

Procediamo così: scelta una geodetica γ, prendiamo su di essa un punto A, e scegliamo una base in $\mathcal{T}_A$ con la sola avvertenza di prendere $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}$, vettore tangente a γ in A. Per un qualunque punto P di γ, corrispondente al valore λ del parametro affine, definiamo la base nello spazio tangente $\mathcal{T}_P$ mediante trasporto parallelo lungo γ della base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ definita in A (in tal modo, per definizione di geodetica, $\mathbf{e}_1$ sarà sempre tangente a γ). Prendiamo ora un vettore $\mathbf{v}$ di $\mathcal{T}_P$, della forma $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, ma con $v^1 = 0$, e percorriamo la geodetica con vettore tangente $\mathbf{v}$, fino al valore 1 del parametro affine. Al punto Q così raggiunto associamo le coordinate

$$x^1 = \lambda, \quad x^2 = v^2, \ldots, x^n = v^n.$$

Occorrerebbe ora dimostrare che si può fare il viceversa, ossia che scelto un punto Q abbastanza vicino a γ (è questo il significato di "intorno tubolare") si trova un punto P di γ dal quale parte una geodetica che raggiunge Q e che ha vettore tangente $\mathbf{v}$ con $v^1 = 0$. Tralasciamo la dimostrazione.

Mostriamo invece che nelle coordinate così definite *tutti i coefficienti di connessione si annullano su tutta* γ:

Dim.: Per costruzione abbiamo $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\beta = 0$, e da qui subito $\Gamma^\alpha{}_{1\beta} = 0$. Resta quindi da dimostrare $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$ anche se $\beta \neq 1$, $\gamma \neq 1$.

Consideriamo la geodetica con vettore tangente $\mathbf{v}$ come sopra: nelle nostre coordinate le sue equazioni parametriche sono

$$x^1 = 0, \quad x^\alpha = \mu\, v^\alpha, \ (\alpha = 2, \ldots, n)$$

essendo μ il parametro affine. Usando l'equazione delle geodetiche (11–4) si trova

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\, v^\beta v^\gamma = 0.$$

Poiché questa vale per ogni vettore $\mathbf{v}$, ne segue la tesi. ∎

Vedremo che queste coordinate trovano il loro principale impiego in RG nella definizione rigorosa di RIL.

L'identità di Bianchi

Un altro utile impiego delle coordinate normali sta nella dimostrazione dell'*identità di Bianchi*. Se usiamo coordinate normali in A abbiamo dalla (12–12)

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta;\varepsilon} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma\varepsilon} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta\varepsilon}$$

perché derivata covariante e derivata ordinaria coincidono in A (tutte le Γ sono nulle). Ne segue subito

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta;\varepsilon} + R^\alpha{}_{\beta\delta\varepsilon;\gamma} + R^\alpha{}_{\beta\varepsilon\gamma;\delta} = 0.$$

Ma questa relazione, contenendo solo derivate covarianti, vale in qualunque base e perciò non dipende dalla scelta delle coordinate normali, fatta per dimostrarla. Possiamo anche scriverla in forma astratta:

$$(\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{R})_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} + (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{R})_{\mathbf{v},\mathbf{t}}\mathbf{w} + (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{R})_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w} = 0. \tag{12–13}$$

L'identità di Bianchi possiede un elegante significato geometrico: consideriamo un punto A della varietà, e tre campi vettoriali $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, che per semplicità supporremo commutare tra loro. Le corrispondenti curve integrali definiscono un parallelepipedo $ABCDEFGH$ (fig. 12–2). Preso un altro campo vettoriale $\mathbf{w}$, possiamo calcolare la sua variazione nel trasporto parallelo lungo ciascuna delle sei facce:

$$\begin{aligned}
(\delta\mathbf{w})_{ABCDA} &= -(\mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w})(A)\\
(\delta\mathbf{w})_{EFGHE} &= -(\mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w})(E)\\
(\delta\mathbf{w})_{ADHEA} &= -(\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w})(A)\\
(\delta\mathbf{w})_{BCGFB} &= -(\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w})(B)\\
(\delta\mathbf{w})_{AEFBA} &= -(\mathbf{R}_{\mathbf{v},\mathbf{t}}\mathbf{w})(A)\\
(\delta\mathbf{w})_{DHGCD} &= -(\mathbf{R}_{\mathbf{v},\mathbf{t}}\mathbf{w})(D).
\end{aligned} \tag{12–14}$$

Consideriamo ora la curva chiusa $\gamma = ABCDAEHGFEA$ (marcata in fig. 12–2): essa consiste dei due cammini chiusi, congiunti dal tratto AE percorso due volte in sensi contrari. Il primo cammino è $\gamma_1 = ABCDA$, il secondo è $\gamma_2 = EFGHE$, ma preso in verso opposto. Pertanto il trasporto lungo γ darà la differenza tra le prime due righe della (12–14), che vale $\nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w})(A)$, più un termine derivante dal fatto che il trasporto su γ_2 agisce non su $\mathbf{w}(E)$, ma su $\mathbf{w}(A)$ trasportato in E: la differenza è $-(\mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w})(A)$. Dunque

$$(\delta\mathbf{w})_\gamma = \nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w}) - (\mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}).$$

Analogamente si ragiona sulle curve $ADHEABFGCBA$ e $AEFBADCGHDA$, che danno luogo rispettivamente a

$$\begin{gathered}\nabla_{\mathbf{t}} (\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w}) - (\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{w}) \\ \nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{R}_{\mathbf{v},\mathbf{t}}\mathbf{w}) - (\mathbf{R}_{\mathbf{v},\mathbf{t}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}).\end{gathered}$$

La somma di queste tre variazioni si deve annullare, perché corrisponde al trasporto parallelo lungo un'unica curva chiusa, che percorre due volte — in sensi opposti — tutti gli spigoli del parallelepipedo (lasciamo al lettore di verificarlo). Usando la definizione di derivata covariante di un tensore, data alla fine del cap. precedente, abbiamo

$$\nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w}) - \mathbf{R}_{\mathbf{t},\mathbf{u}}(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}) = (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{R})_{\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w} + \mathbf{R}_{\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{t},\mathbf{u}}\mathbf{w} + \mathbf{R}_{\mathbf{t},\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}}\mathbf{w}$$

e analoghe per $\nabla_{\mathbf{t}} (\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w})$ e $\nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{R}_{\mathbf{v},\mathbf{t}}\mathbf{w})$. Sommando, e usando la (12–7), si ritrova la (12–13).

Un'analogia può aiutare a cogliere il significato di quello che abbiamo fatto. È noto che la circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva chiusa (in $\mathbb{R}^3$) è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una superficie che si appoggia alla curva (teorema di Stokes). Se eseguiamo il calcolo per le sei facce di un parallelepipedo avremo sei circuitazioni, la cui somma darà quindi il flusso del rotore uscente dalla superficie del parallelepipedo. Ma sappiamo che tale flusso è nullo, perché un rotore ha divergenza nulla; la cosa si spiega osservando che la somma delle sei circuitazioni dà la circuitazione lungo un'unica curva che percorre ciascuno spigolo del parallelepipedo due volte, in sensi opposti. È chiaro che la situazione nel caso dell'identità di Bianchi è esattamente la stessa (il che mostra che in realtà si tratta di qualcosa di più di un'analogia!)

Come vedremo, l'identità di Bianchi ha un ruolo importante nella formulazione delle equazioni di Einstein.