CAPITOLO 17

Il tensore energia-impulso

In questo capitolo richiameremo le proprietà del tensore energia-impulso in RR, come premessa al suo studio in RG. Per un qualunque sistema continuo, anche in fisica newtoniana, è possibile definire alcune grandezze importanti:

– la densità di energia U

– la densità di corrente di energia $\vec{S}$

– la densità d'impulso $\vec{G}$

– la densità di corrente d'impulso (o tensore degli sforzi) Θ^{ij}.

Le definizioni di queste grandezze sono quasi tutte ovvie; in particolare $\vec{S}$ generalizza il vettore di Poynting dell'elettromagnetismo. Richiede di essere invece precisato il significato di Θ, al modo seguente: se consideriamo un elemento di superficie $d\Sigma$, con normale n_j, l'espressione

$$\Theta^{ij} n_j \, d\Sigma$$

rappresenta la quantità di moto per unità di tempo che attraversa $d\Sigma$ nel verso di n_j, ossia anche la forza applicata dalla materia che si trova da un lato della superficie $d\Sigma$ su quella dall'altro (nel verso definito da n_j). Si noti che la forza non è necessariamente normale a $d\Sigma$: questo accade nei fluidi perfetti, ma certo non nei solidi.

Se s'integrano le grandezze sopra definite su di un volume V o sul suo contorno Σ, si ottengono le corrispondenti grandezze integrali:

$$E = \int_V U \, dV \qquad \vec{P} = \int_V \vec{G} \, dV \tag{17–1}$$

$$W = \int_\Sigma S^j n_j \, d\Sigma \qquad F^i = \int_\Sigma \Theta^{ij} n_j \, d\Sigma. \tag{17–2}$$

col significato, nell'ordine, di energia e quantità di moto contenute nel volume V, di potenza emessa dal sistema attraverso la superficie Σ, di risultante delle forze applicate *dal sistema all'esterno* attraverso Σ.

In termini delle grandezze sopra definite, le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto si esprimono in forma integrale come segue:

$$\frac{dE}{dt} = -W \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = -\vec{F}. \tag{17–3}$$

Usando il teorema della divergenza le (17–3) si trasformano in:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \qquad \frac{\partial G^i}{\partial t} + \Theta^{ij}{}_{,j} = 0. \tag{17–4}$$

Applicando la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi al volume V, si trova che il momento risultante delle forze esterne va come l^3 (dove l è una dimensione caratteristica di V) mentre il momento angolare va come l^5: quindi il momento delle forze deve annullarsi al limite $l \to 0$. Si dimostra che ciò richiede la simmetria di Θ:

$$\Theta^{ij} = \Theta^{ji}.$$

Per un determinato sistema fisico le grandezze finora considerate avranno delle espressioni che dipendono dalle caratteristiche del sistema; ad es. per un campo e.m. dovranno essere espresse in funzione delle grandezze di campo.

Scriviamo le equazioni di Maxwell in forma relativistica e poniamo

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(\Phi^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \Phi^{\lambda}{}_{\lambda} \right)$$

dove il tensore $\mathbf{\Phi}$ è definito a partire dal tensore e.m. $F^{\alpha\beta}$:

$$\Phi^{\alpha\beta} = F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}{}^{\beta}.$$

(Si verifica facilmente che $T^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$, ma questa non è una proprietà generale, come vedremo fra poco.) In termini del tensore $\mathbf{T}$ si ha:

$$U = T^{00} \qquad S^i = T^{0i} \qquad G^i = T^{i0} \qquad \Theta^{ij} = T^{ij}. \tag{17–5}$$

Il principio di relatività impone che queste relazioni e le proprietà delle grandezze in questione valgano in ogni riferimento inerziale; in particolare dovrà essere sempre $T^{ij} = T^{ji}$, e ciò è possibile solo se $\mathbf{T}$ è completamente simmetrico:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}.$$

Ne segue $\vec{G} = \vec{S}$: relazione che non è prevedibile in una teoria non relativistica.

Ciò che per il campo e.m. è conseguenza delle equazioni di Maxwell (che sono già relativisticamente invarianti) per un generico sistema continuo va postulato; assumiamo dunque che esista in ogni caso un tensore simmetrico che è legato attraverso le (17–5) alla densità di energia ecc. Imporremo anche che la densità di energia sia positiva in ogni sistema di riferimento, il che si può esprimere così: $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ per tutti i vettori $\mathbf{u}$ di tipo temporale.

Inoltre le (17–4) si condensano in una sola equazione:

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0.$$

Riassumendo: in una teoria relativistica ogni sistema continuo possiede un tensore energia-impulso *simmetrico*, *a densità di energia positiva e a divergenza nulla.*

Nota: S'intende che la divergenza di $\mathbf{T}$ non sarà più nulla se il sistema interagisce con qualcos'altro; ad es. nel caso e.m. in presenza di cariche, la divergenza di $\mathbf{T}$ fornisce il lavoro fatto dal campo sulle cariche e la forza agente su queste.

È possibile una generalizzazione relativistica delle (17–2):

$$F^{\alpha} = \int_{\Sigma} T^{\alpha\beta} n_{\beta}\, d\Sigma \tag{17–6}$$

dove Σ è un'opportuna ipersuperficie, di normale n_{β}. La (17–6) riassume in primo luogo entrambe le (17–2), se n_{β} è scelto in modo che sia $n_0 = 0$. Cambiando riferimento n_0 non sarà più nullo, ma n_{β} resta spaziale, e il significato di F^{α} è sempre quello di flusso di energia e impulso (per unità di tempo) attraverso una superficie. Se poi si prende n_{β} temporale, la (17–6) dà la forma relativistica delle (17–1).

Nota: Occorre prestare attenzione ai segni nella (17–6), per quanto riguarda le componenti spaziali di n_{β}. Se ad es. $\vec{n}$ è diretto nel verso positivo dell'asse x, si potrebbe credere che debba essere $n^1 = 1$, e quindi $n_1 = -1$. Non è così, perché in realtà in tutte le relazioni del genere della (17–6) n_{β} non è direttamente un vettore, ma la forma "duale" del tri-vettore che rappresenta la giacitura di un'ipersuperficie 3-dimensionale. (Si chiama *tri-vettore* il tensore antisimmetrico di rango $\binom{3}{0}$ costruito con 3 vettori). L'analogo nello spazio 3-dimensionale è la forma duale di un bi-vettore, ossia l'ordinario prodotto vettore. Nell'esempio dato è perciò $n_1 = 1$.

Esempi

Vediamo ora la forma del tensore energia-impulso per alcuni sistemi fisici che avranno interesse in seguito.

La radiazione nera: Consideriamo, per cominciare, la radiazione e.m. presente in una cavità all'equilibrio termico. La radiazione è isotropa, il che vuol dire che non c'è corrente di energia ($\vec{S} = 0$) né quantità di moto ($\vec{G} = 0$). Inoltre la radiazione esercita, su qualunque superficie, una forza esclusivamente normale (pressione di radiazione). Questo basta per scrivere

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{17–7}$$

e se teniamo conto che la traccia è nulla troviamo anche $\varrho = 3p$: un risultato ben noto della termodinamica della radiazione.

Nota: È forse superfluo ricordare che l'espressione (17–7) vale solo nel riferimento di quiete della cavità.

La polvere: Chiameremo "polvere" della materia in forma di particelle che non esercitano forze l'una sull'altra, e sono localmente in quiete relativa. In queste ipotesi, nel riferimento di quiete è presente solo la componente T^{00}: non esistono né corrente di energia, né quantità di moto, né forze di superficie. Dunque

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17–8}$$

che si può mettere facilmente in forma indipendente dal riferimento.

Indichiamo infatti con $\mathbf{u}$ la quadrivelocità della polvere; le componenti di $\mathbf{u}$ nel riferimento di quiete sono $(1, 0, 0, 0)$ e il prodotto tensore $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ avrà quindi componenti

$$u^\alpha \, u^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, confrontando con la (17–8), segue

$$\mathbf{T} = \varrho \, \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \tag{17–9}$$

La (17–9), essendo una relazione fra tensori, vale indipendentemente dalla base e dal sistema di coordinate adottato. Si noti che il parametro ϱ è uno scalare, che ha il significato di densità di energia (e quindi di massa) nel riferimento di quiete. La densità di energia in un riferimento diverso si ottiene per es. dalla legge di trasformazione di $T^{\alpha\beta}$: si trova $\varrho' = \gamma^2 \varrho$.

Esercizio: Spiegare il fattore γ^2.

Il fluido perfetto: Questo tipo di fluido è definito dall'assenza di viscosità e di sforzi elastici trasversali. Ne segue che in un RIL in cui il fluido è in quiete il suo tensore energia-impulso ha di nuovo la forma (17–7) (ma non sarà in generale $\varrho = 3p$).

Vogliamo trovare l'espressione generale di $\mathbf{T}$, valida in qualunque riferimento e per coordinate arbitrarie: ci si arriva sfruttando ancora il tensore $\mathbf{U} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ e il tensore metrico controvariante $g^{00} = \eta^{00} = 1$, $g^{ii} = \eta^{ii} = -1$. Il risultato è

$$\mathbf{T} = \varrho \, \mathbf{U} + p \, (\mathbf{U} - \mathbf{g}) = (\varrho + p) \, \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p \, \mathbf{g}. \tag{17–10}$$

In componenti:

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + p)\, u^\alpha u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}. \tag{17–11}$$

La radiazione nera è dunque un caso particolare di fluido perfetto, caratterizzato da $T^\alpha{}_\alpha = 0$. Anche la polvere è un fluido perfetto, per il quale questa relazione non vale.

Le proprietà integrali di T

Supponiamo che la materia sia presente solo (per un certo intervallo di tempo) in una regione spaziale finita: detta V tale regione, si definisce a ogni istante

$$P^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_V T^{\alpha 0}\, dV$$

e si dimostra che in conseguenza di $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$

- P^α è un quadrivettore (*impulso-energia*)
- è inoltre costante del moto.

Per di più, dato che $T^{00} > 0$ in ogni riferimento, lo stesso accade per $P^0 > 0$: dunque *il vettore P^α è temporale.*

Si definisce poi

$$J^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_V \bigl(x^\alpha\, T^{\beta 0} - x^\beta\, T^{\alpha 0}\bigr)\, dV$$

e si dimostra, usando anche $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, che

- $J^{\alpha\beta}$ è un tensore antisimmetrico (*momento angolare*)
- è anch'esso costante del moto.

Osservazione: Si noti che nella dimostrazione si fa uso di un'integrazione per parti, per cui è essenziale che la divergenza di $\mathbf{T}$ sia scritta con le comuni derivate parziali, e non con derivate covarianti, come sarebbe necessario se lo spaziotempo non fosse piatto.

P^α e $J^{\alpha\beta}$ danno in tutto 10 costanti del moto indipendenti, che sono connesse all'invarianza rispetto al gruppo di Poincaré (che è appunto un gruppo di Lie a 10 parametri).

Nota: Se si fa cadere l'ipotesi che la materia sia presente solo all'interno di V, si ha che P^α e $J^{\alpha\beta}$ non sono più costanti, ma la loro variazione si collega con un trasporto di impulso, energia e momento angolare attraverso il contorno di V.

Centro di massa e spin

Da P^α e $J^{\alpha\beta}$ si definiscono altre grandezze importanti:

- la *massa* $M \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{P^\alpha P_\alpha}$ (si noti che M è reale, perché P^α è di tipo temporale)

– il *centro di massa*

$$X^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} J^{\alpha\beta}\, P_\beta \,/M^2 \qquad (17\text{–}12)$$

– lo *spin* (momento angolare intrinseco)

$$S^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2M}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, P_\beta\, J_{\gamma\delta}. \qquad (17\text{–}13)$$

Nota: Nella (17–13) abbiamo usato il *tensore* $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ detto *di Ricci,* o *di Levi-Civita*: $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm 1$ a seconda che gli indici $\alpha\beta\gamma\delta$ formino una permutazione pari o dispari di 0123. Tralasciamo di dimostrare che si tratta di un tensore, e aggiungiamo solo che anche in $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, occorrendo, potremo abbassare gli indici con la solita regola. Però attenzione: mentre $\varepsilon^{0123} = 1$, invece $\varepsilon_{0123} = -1$; è facile dimenticarsene!

La giustificazione del nome dato a X^α si ha ponendosi nel riferimento del centro di massa: allora $P^i = 0$, $P^0 = M$ e risulta subito $X^0 = 0$. Inoltre:

$$X^i = \frac{1}{M}\, J^{i0} = \frac{1}{M} \int\limits_V \bigl(x^i\, T^{00} - x^0\, T^{i0}\bigr)\, dV$$

$$= \frac{1}{M} \int\limits_V x^i\, T^{00}\, dV - \frac{x^0}{M}\, P^i = \frac{1}{M} \int\limits_V x^i\, T^{00}\, dV$$

e quest'ultima è proprio la definizione del centro di massa. Naturalmente in un altro riferimento il centro di massa non è fermo, ma si muove di moto rettilineo uniforme: allora le X^α assumono il significato di costanti iniziali. Sfioriamo così aspetti delicati della definizione relativistica di centro di massa, che non è il caso di approfondire.

Tra queste grandezze sussistono alcune identità utili; la più importante è $P^\alpha S_\alpha = 0$, che dimostra varie cose:

– S^α è un vettore spaziale

– solo tre componenti di S^α sono indipendenti

– in particolare, nel riferimento del centro di massa $S^0 = 0$.

Poiché vale anche $P^\alpha X_\alpha = 0$, si possono dire le stesse cose per X^α, e soprattutto che solo 3 delle X^α sono indipendenti. Perciò in totale P^α, X^α, S^α sono 10 costanti del moto indipendenti, e possono essere usate in luogo di P^α e $J^{\alpha\beta}$. Infatti si ha

$$J^{\alpha\beta} = X^\alpha P^\beta - X^\beta P^\alpha + \frac{1}{M}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, S_\gamma\, P_\delta. \qquad (17\text{–}14)$$

Il vantaggio di usare S^α è che è *invariante per traslazioni*, cosa che non è vera per $J^{\alpha\beta}$: lasciamo la verifica al lettore. Dalla (17–14) si vede inoltre che se siamo nel riferimento del centro di massa, e se poniamo ivi l'origine

$$J^{0i} = 0 \qquad J^{12} = S^3, \quad \text{ecc.}$$

Questo risultato giustifica il nome dato a S^α.