CAPITOLO 19

Stelle statiche a simmetria sferica

Come premessa allo studio del collasso gravitazionale conviene esaminare un modello statico. Considereremo solo il più semplice: quello dotato di simmetria sferica; adotteremo quindi coordinate polari per lo spazio, più la coordinata t. Tornando per un momento alla notazione dei primi capitoli, dalle ipotesi fatte segue che la metrica in queste coordinate può sempre essere messa nella forma

$$d\tau^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) \qquad (19\text{–}1)$$

dove Φ e Λ dipendono solo da r.

L'interpretazione delle coordinate è del tutto simile a quella vista nel Cap. 4, con la sola differenza che ora la (19–1) può essere usata in tutto lo spazio-tempo, senza alcuna singolarità apparente, grazie alla presenza della materia. S'intende che la materia della stella occuperà solo una sfera centrale, circondata da spazio vuoto: dobbiamo dunque aspettarci che al di là di un certo $r = R$ ("raggio" della stella) la metrica si riduca a quella di Schwarzschild, e più in particolare che sia

$$\lim_{r\to\infty} \Phi = \lim_{r\to\infty} \Lambda = 0.$$

La novità essenziale è la presenza della materia: la metrica (19–1) sarà soluzione delle equazioni di Einstein con un secondo membro (tensore energia-impulso) caratteristico del genere di materia presente. È noto che in tutte le condizioni conosciute, anche alle più grandi densità, la materia in un interno stellare è assimilabile a un *fluido perfetto*.

Il fluido perfetto relativistico

Riprendiamo dunque le (17–10), (17–11):

$$\mathbf{T} = (\varrho + p) \, \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p \, \mathbf{g}. \qquad (19\text{–}2)$$

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + p) \, u^\alpha u^\beta - p \, g^{\alpha\beta}. \qquad (19\text{–}3)$$

Queste espressioni di $\mathbf{T}$ valgono al di là del caso particolare che c'interessa: non occorre né la simmetria, né condizioni statiche: comunque il fluido si muova (e anche se non è omogeneo) sarà sempre possibile trovare in ogni punto un RIL di quiete, ecc. Solo che densità e pressione varieranno in generale da punto a punto e anche nel tempo. Nel nostro caso ovviamente entrambe le grandezze dipendono solo da r.

È interessante studiare le equazioni che risultano dall'annullare la divergenza di $\mathbf{T}$. Usando la (19–3), o direttamente dalla (19–2), si trova

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{u} \, \partial_{\mathbf{u}}(\varrho + p) + (\varrho + p) \, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + (\varrho + p) \, \mathbf{u} \, (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla p = 0. \qquad (19\text{–}4)$$

Nota: Nella (19–4) ∇p indica il vettore associato alla forma $\mathbf{d}p$. Questo va tenuto presente per il seguito.

Per interpretare la (19–4) conviene anzitutto proiettarla lungo $\mathbf{u}$:

$$\partial_{\mathbf{u}}(\varrho+p)+(\varrho+p)\,\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}+(\varrho+p)\,\nabla\cdot\mathbf{u}-\partial_{\mathbf{u}}p=0$$

(abbiamo usato $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=1$). Inoltre $\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$ perché $\mathbf{u}$ ha lunghezza costante, e si arriva a

$$\partial_{\mathbf{u}}\varrho+(\varrho+p)\,\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{19–5}$$

che si può anche scrivere

$$\frac{d\varrho}{d\tau}+(\varrho+p)\,\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{19–6}$$

essendo τ il tempo proprio dell'elemento di fluido.

La (19–6) è assai simile all'equazione di continuità della meccanica dei fluidi newtoniana: la differenza è $\varrho+p$ in luogo della sola ϱ nel secondo termine. Ciò si spiega perfettamente ricordando che mentre la ϱ della meccanica newtoniana è la densità di massa, e la massa si conserva, invece ora ϱ è la densità di energia. Pensando ad es. a un gas, in ϱ conta, accanto alla massa di riposo delle molecole, anche la loro energia cinetica; se abbiamo invece una radiazione elettromagnetica "nera" ϱ sarà la densità di energia dei fotoni, ecc. Ora l'energia di una data porzione di materia non si conserva se ci sono scambi con l'esterno. Noi abbiamo escluso trasporto di energia (ad es. sotto forma di calore) avendo preso $\mathbf{T}$ diagonale; ma non possiamo escludere il lavoro delle forze di pressione.

Questo è il significato del termine $p\,\nabla\cdot\mathbf{u}$ nella (19–6). È infatti facile dimostrare che se V è un volumetto che si muove col fluido,

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{V}\,\frac{dV}{d\tau}$$

e la (19–6) diventa:

$$V\,\frac{d\varrho}{d\tau}+(\varrho+p)\,\frac{dV}{d\tau}=0$$

$$\frac{d}{d\tau}(\varrho V)+p\,\frac{dV}{d\tau}=0. \tag{19–7}$$

Si vede ora che la (19–7) esprime la conservazione dell'energia, ossia il primo principio della termodinamica, per il fluido contenuto nel volume V. Infatti il primo termine è la variazione di energia nel tempo, e il secondo il lavoro delle forze di pressione, cambiato di segno. Non è presente il termine relativo al calore scambiato, perché in $\mathbf{T}$ non è stato incluso alcun trasporto di energia: $\vec{S}=0$.

Se ora si moltiplica la (19–5) (che è un'equazione scalare) per $\mathbf{u}$ e la si sottrae dalla (19–4), si ha:

$$(\varrho+p)\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=\nabla p-\mathbf{u}\,\partial_{\mathbf{u}}p. \tag{19–8}$$

La (19–8) è l'analoga relativistica dell'equazione di Eulero della meccanica dei fluidi. Infatti in un RIL $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ diventa $d\mathbf{u}/d\tau$ e di nuovo la differenza sta solo nel fattore $\varrho + p$ in luogo del semplice ϱ. Il secondo membro non è altro che la proiezione spaziale del gradiente di p (più esattamente, la parte di ∇p ortogonale a $\mathbf{u}$).

Applicazione al caso statico simmetrico

Per applicare le (19–5), (19–8) al caso che c'interessa osserviamo anzitutto le seguenti relazioni:

$$\mathbf{u} = e^{-\Phi}\mathbf{e}_t = e^{-\Phi}\,\frac{\partial}{\partial t} \qquad \nabla p = -e^{-2\Lambda}\,p_{,r}\,\mathbf{e}_r. \tag{19–9}$$

La prima delle (19–9) si trova ricordando che la materia è ferma nelle coordinate scelte, il che vuol dire che r, ϑ e φ sono costanti lungo le curve orarie. Dunque $\mathbf{u}$ è parallelo a $\mathbf{e}_t$. Il coefficiente si ottiene dalla condizione $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ e dall'opportuna scelta del verso di t. Quanto alla seconda, abbiamo in primo luogo $\mathbf{d}p = p_{,r}\,\mathbf{d}r$; poi ∇p si ottiene attraverso il tensore metrico (controvariante), la cui componente g^{rr} vale $-e^{-2\Lambda}$. È interessante osservare il segno meno, che risolve un'apparente errore della (19–8): infatti la corrispondente equazione newtoniana ha il segno opposto!

Dalle (19–9) segue in primo luogo che $\partial_{\mathbf{u}}$ applicato a qualsiasi funzione scalare dà zero. In secondo luogo, calcoliamo

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} &= u^\beta\,u^\alpha{}_{;\beta}\,\mathbf{e}_\alpha = e^{-\Phi}u^\alpha{}_{;t}\,\mathbf{e}_\alpha \\ &= e^{-\Phi}\bigl(u^\alpha{}_{,t} + \Gamma^\alpha{}_{\beta t}\,u^\beta\bigr)\,\mathbf{e}_\alpha = e^{-2\Phi}\Gamma^\alpha{}_{tt}\,\mathbf{e}_\alpha = e^{-2\Lambda}\Phi_{,r}\,\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

(non è stato esplicitato il calcolo di $\Gamma^\alpha{}_{tt}$, che lasciamo per esercizio). Da qui, sostituendo nella (19–8), si trova

$$(\varrho + p)\,\Phi_{,r} = -p_{,r}. \tag{19–10}$$

In approssimazione non relativistica $p \ll \varrho$ e la (19–10) si riduce all'equazione dell'idrostatica, a condizione che Φ si riduca al potenziale gravitazionale newtoniano. Avevamo già ritrovato questo fatto in altre occasioni: infatti nella stessa approssimazione dovrà anche essere $|\Phi| \ll 1$ da cui $g_{tt} \simeq 1 + 2\Phi$, e perciò il nostro risultato concorda con la (18–1), che a sua volta generalizzava quanto visto al Cap. 4.

Osserviamo infine che la (19–5) nel nostro caso non dice niente: infatti $d\varrho/d\tau = 0$ per l'ipotesi statica, mentre $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ non solo in condizioni statiche, ma anche se solo il fluido è incomprimibile.

Le equazioni di Einstein

A causa delle condizioni particolari del nostro problema, le equazioni di Einstein indipendenti sono ben poche: si verifica infatti che

– le componenti fuori diagonale di $G^{\alpha\beta}$ sono identicamente nulle, come quelle di $T^{\alpha\beta}$

– delle altre, solo due sono nuove: quelle per G^{tt} e G^{rr}, mentre le rimanenti due sono conseguenza dell'annullarsi della divergenza di $\mathbf{G}$.

Tralasciamo il calcolo esplicito, e diamo i risultati: da $G^{tt} = 8\pi\, T^{tt}$ si ha

$$2r\, \Lambda_{,r} - 1 = \bigl(8\pi r^2 \varrho - 1\bigr)\, e^{2\Lambda} \tag{19–11}$$

mentre da $G^{rr} = 8\pi\, T^{rr}$ si ottiene

$$2r\, \Phi_{,r} + 1 = (8\pi r^2 p + 1)\, e^{2\Lambda}. \tag{19–12}$$

È conveniente introdurre, al posto di Λ, la nuova funzione incognita $m(r)$, definita da

$$m = \tfrac{1}{2} r\, (1 - e^{-2\Lambda}) \qquad e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{19–13}$$

col che le (19–11), (19–12) diventano rispettivamente

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varrho \tag{19–14}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r\,(r - 2m)}. \tag{19–15}$$

Di solito si usa, al posto della (19–15), l'equazione che ne risulta sostituendoci la (19–10):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(m + 4\pi r^3 p)\,(\varrho + p)}{r\,(r - 2m)} \tag{19–16}$$

che si chiama *equazione di Oppenheimer–Volkov.*

Discussione

Le (19–14), (19–16) sono le equazioni fondamentali del modello statico a simmetria sferica. In esse compaiono tre funzioni incognite: m, ϱ, p e non sono dunque sufficienti. Quella che manca è un'*equazione di stato*, ossia una relazione fra ϱ e p. Aggiungendo le (19–10), (19–13) si arriva a calcolare anche Φ e Λ, ossia la metrica: il modello riesce così completamente determinato.

Per integrare le (19–14), (19–16) occorrono ovviamente le condizioni iniziali, ad es. $m(0)$, $p(0)$. Il valore iniziale di m si trova osservando che se non si vogliono singolarità nella metrica per $r = 0$ occorre $m(0) = 0$; quanto a $p(0)$ si tratta invece di un *parametro libero* del modello, che permette di studiare stelle di massa totale diversa. Lo indicheremo in seguito con p_c.

Supponiamo infatti che l'equazione di stato fornisca $\varrho(p)$ come funzione crescente per tutte le p positive: allora integrando la (19–14) si trova una $m(r)$ che va inizialmente come r^3, e comunque sempre crescente. Se si guarda poi la (19–16), si vede che p è strettamente decrescente, e anzi la sua derivata cresce con r in modulo. È dunque certo che esiste un $r = R$ per cui p si annulla: questo punto è il confine della stella, e il valore $M = m(R)$ è la già citata massa totale della stella. Questa denominazione si giustifica osservando l'espressione della metrica: per $r > R$ le (19–13) e (19–15) danno

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r} \qquad e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

e la (19–1) diventa la metrica di Schwarzschild per la massa M. Abbiamo così dimostrato, di passaggio, quanto asserito nel Cap. 4: che la metrica di Schwarzschild è la soluzione statica a simmetria sferica delle equazioni di Einstein per lo spazio vuoto.

Concludendo: per ogni p_c si determina una massa M e un raggio R della stella: c'è dunque una relazione fra M e R, determinata soltanto dall'equazione di stato assunta per il fluido. A stretto rigore R non è il raggio che si misura ad es. con metodi ottici; ma non è difficile, nota la metrica, calcolare il raggio "vero" a partire da R.

È interessante esaminare più da vicino la forma integrale della (19–14):

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(r')\, r'^2 dr'. \tag{19–17}$$

Superficialmente si potrebbe pensare che la (19–17) dia un'ovvia interpretazione fisica di $m(r)$ come massa totale contenuta nella sfera di raggio r. Però questo non è vero, perché mentre ϱ è la densità (energia di riposo del fluido per unità di volume) non è vero che $4\pi r'^2 dr'$ misuri il volume del guscio fra r' e $r' + dr'$. Infatti manca il fattore e^Λ richiesto dalla metrica.

In altri termini, possiamo scrivere

$$m(r) = 4\pi \int_0^r e^{-\Lambda} \varrho(r')\, e^\Lambda r'^2 dr'$$

ossia $m(r)$ è l'integrale di volume di $e^{-\Lambda} \varrho(r')$. Eppure abbiamo mostrato sopra che M è veramente la massa della stella!

Il paradosso si risolve ricordando le considerazioni fatte al cap. precedente. Supponiamo, per fissare le idee, che il fluido consista di polvere, ossia di particelle ferme non interagenti. Allora l'integrale di ϱ darà la somma delle masse di riposo delle particelle, e non dobbiamo aspettarci che questa somma coincida con la massa totale: ne differirà per l'energia di legame gravitazionale. Infatti, nel caso limite di campo debole ($\Lambda \ll 1$) avremo

$$e^{-\Lambda}\varrho \simeq \left(1 - \frac{m}{r}\right)\varrho = \varrho - \frac{m\varrho}{r}.$$

Il primo termine è la somma delle masse di riposo delle particelle; il secondo è la loro energia potenziale gravitazionale nel campo prodotto dalla materia interna al raggio r.

Il modello di Schwarzschild

Per approfondire la discussione, studiamo brevemente il più semplice modello risolubile analiticamente: quello di Schwarzschild, nel quale si assume come equazione di stato semplicemente $\varrho = \text{cost}$. Non ci occupiamo qui di quanto un tale modello possa approssimare la realtà.

Con l'ipotesi fatta, la (19–14) s'integra immediatamente:

$$m(r) = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\, r^3$$

da cui anche

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\, R^3. \tag{19–18}$$

Sostituendo queste nella (19–16):

$$\frac{dp}{dr} = -\tfrac{4}{3}\pi r\, \frac{(\varrho + p)\,(\varrho + 3p)}{1 - 2Mr^2/R^3}. \tag{19–19}$$

La (19–19) s'integra senza difficoltà:

$$\frac{\varrho + 3p}{\varrho + p} = A\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}$$

dove A è una costante d'integrazione che si determina imponendo $p(R) = 0$:

$$A = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$$

e infine:

$$p(r) = \varrho\, \frac{\sqrt{1 - 2Mr^2/R^3} - \sqrt{1 - 2M/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - \sqrt{1 - 2Mr^2/R^3}}. \tag{19–20}$$

Dalla (19–20) si ottiene in particolare

$$p_\mathrm{c} = \varrho\,\frac{1 - \sqrt{1 - 2M/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - 1}$$

che può essere invertita:

$$\frac{M}{R} = \frac{2p_\mathrm{c}\,(\varrho + 2p_\mathrm{c})}{(\varrho + 3p_\mathrm{c})^2}.$$

Questa, combinata con la (19–18), permette di esprimere M ed R in funzione di p_c:

$$M = \sqrt{\frac{6}{\pi\varrho}}\,\frac{p_\mathrm{c}^{3/2}\,(\varrho + 2p_\mathrm{c})^{3/2}}{(\varrho + 3p_\mathrm{c})^3}$$

$$R = \sqrt{\frac{3}{2\pi\varrho}}\,\frac{\sqrt{p_\mathrm{c}\,(\varrho + 2p_\mathrm{c})}}{\varrho + 3p_\mathrm{c}}$$

Si vede che tanto M quanto R sono funzioni crescenti di p_c, ma che entrambe hanno un limite finito quando $p_\mathrm{c} \to \infty$:

$$\lim_{p_\mathrm{c}\to\infty} M = \frac{4}{9}\,\frac{1}{\sqrt{3\pi\varrho}} \qquad \lim_{p_\mathrm{c}\to\infty} R = \frac{1}{\sqrt{3\pi\varrho}}.$$

Questo è un effetto di RG: nel corrispondente modello newtoniano ovviamente M ed R vanno a infinito con p_c. Dunque non è possibile avere una “stella di densità costante” con massa maggiore di un certo valore critico. Si potrebbe credere che il risultato sia poco interessante, dato il carattere artificioso del modello; invece il fenomeno si ripresenta anche con modelli realistici, come vedremo.

A titolo di curiosità, domandiamoci per quale valore di ϱ la massa critica uguaglia una tipica massa stellare, come quella del Sole: il risultato è (ripristinando le unità usuali) $\varrho = 1.2\cdot 10^{16}\ \mathrm{g/cm^3}$, che è una densità non molto superiore a quella della materia nucleare. Troveremo più avanti un valore molto vicino a questo per la densità massima alla quale una stella di neutroni può essere stabile, prima del collasso in un buco nero.