Einstein e la massa relativistica*

Elio Fabri

Dip. di Fisica "Enrico Fermi" – Università di Pisa

——— ∘ ———

Riassunto

Si esaminano articoli e libri di Einstein sulla relatività, allo scopo di verificare come viene trattato il concetto di massa, e in particolare se Einstein faccia mai uso della massa relativistica. Se ne conclude che — con l'unica possibile eccezione del libro *L'evoluzione della fisica*, dove alcuni brani possono suggerire l'idea di una massa dipendente dalla velocità — Einstein non parla mai di massa relativistica. È anzi ben noto che in una lettera del 1948 ne sconsiglia l'uso.

Abstract

Several of Einstein's papers and books on relativity are examined, aiming at ascertaining how the concept of mass is treated, and in particular if Einstein ever used relativistic mass. It is concluded that Einstein never deals with relativistic mass — with the only possible exception of the book *The Evolution of Physics*, where some passages could make the reader think of a mass dependent on velocity. It is also well known that in a letter dated 1948 He advises against using it.

Introduzione

La massa relativistica è molto popolare, specialmente nell'insegnamento secondario e nella divulgazione; sull'opportunità di farne uso si è discusso a lungo, e forse si continuerà a discutere. In un articolo del 1987 Adler [1] presenta così la questione:

" 'Papà, davvero la massa dipende dalla velocità?' Fu questa la domanda di mio figlio dopo il suo primo giorno di fisica al liceo. La mia risposta fu: 'No! … Insomma, sì … A dire il vero no, ma non lo dire al professore.' Il giorno dopo, mio figlio smise di seguire fisica."

(Evidentemente fisica era materia opzionale…)

La popolarità che dicevo è forse motivata dal presupposto che tale concetto sia stato introdotto dallo stesso Einstein. Mi è perciò sembrato interessante cercare una risposta alla domanda: E. ha veramente introdotto e usato la massa

* *La Fisica nella Scuola* **38**, 98 (2005).

relativistica? Allo scopo ho consultato un certo numero di articoli e libri di E. ([2]–[10]) esaminando con attenzione come Egli introduce e usa il concetto di massa in relatività.

Il primo lavoro

In [2] c'è solo un breve cenno alla questione: E. studia il moto di una particella carica (elettrone) in un campo elettrico, considerando dapprima il caso di un riferimento K′ in cui la particella è ferma; passa poi a un riferimento K che si muove rispetto a K′ lungo l'asse x, e trova le note equazioni del moto.

A questo punto scrive: "cerchiamo ora, seguendo l'uso comune, le masse longitudinale e trasversale dell'elettrone in moto." Allo scopo esprime le equazioni del moto nella forma

$$F'_x = m_\mathrm{l}\, a_x, \qquad F'_y = m_\mathrm{t}\, a_y, \qquad F'_z = m_\mathrm{t}\, a_z$$

dove F'_x, F'_y, F'_z sono le componenti della forza *misurata in* K′. Ottiene così la *massa longitudinale* $m_\mathrm{l} = m\gamma^3$ e la *massa trasversale* $m_\mathrm{t} = m\gamma^2$.(1)(2)

E. commenta: "Naturalmente con una diversa definizione della forza e dell'accelerazione si otterrebbero valori diversi per le masse; si vede quindi che nel confronto delle differenti teorie del moto dell'elettrone occorre procedere con molta prudenza." Il riferimento è alla discussione, allora accesa, circa la struttura dell'elettrone e l'origine della sua massa. Osserva infine E. che il risultato appena ottenuto per la massa vale per qualsiasi punto materiale ponderabile, ossia dotato di massa: infatti lo si può considerare come un elettrone, "a patto di dotarlo di una carica elettrica piccola a piacere."

Il lavoro prosegue con la determinazione dell'energia cinetica, ricavata dal lavoro della forza. L'espressione ottenuta da E. è quella ben nota:

$$T = mc^2(\gamma - 1).$$

L'ultima formula dell'articolo è il raggio della traiettoria circolare percorsa da una particella carica in campo magnetico uniforme:

$$R = \frac{mc^2\gamma}{qB}.$$

Si noti che E. usa sempre m per indicare la *massa* della particella, senza alcun'altra specificazione.(3)

(1) Qui e in seguito indico con γ, come d'uso, l'espressione $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

(2) Attenzione: la massa trasversale qui definita da E. è $m\gamma^2$, e non $m\gamma$ com'è poi divenuto tradizionale. La differenza deriva dal fatto che E. mette in relazione la forza misurata in K′ con l'accelerazione misurata in K.

(3) Tutte le formule che precedono sono scritte usando le notazioni moderne, che differiscono da quelle di E. per la scelta dei simboli. In particolare, in questo lavoro E. indica la velocità della luce con V.

L'inerzia dell'energia

Nell'articolo [3], che segue [2] di soli tre mesi, è presentato un risultato la cui importanza è pari solo alla brevità dell'articolo. In sole tre paginette E. arriva a quella che si chiama di solito, impropriamente, "equivalenza massa–energia" e che viene da Lui descritta, molto più felicemente, come "inerzia dell'energia." Il risultato è già enunciato fin dal titolo, in forma interrogativa: "L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?"

Riassumiamo il ragionamento di E. Si considerano al solito due riferimenti inerziali, K e K$'$, in moto relativo con velocità v; si assume come asse x la direzione del moto relativo. Un corpo di energia E_0 è fermo in K, e a un certo momento emette due onde e.m. piane, ciascuna di energia $\varepsilon/2$, in direzioni opposte, formanti un angolo φ con l'asse x.(4) Pertanto il corpo dopo l'emissione ha energia $E_1 = E_0 - \varepsilon$. Si noti che a causa della simmetria dell'emissione il corpo rimane fermo.

Si osserva ora il fenomeno dal riferimento K$'$. Anche in questo riferimento la velocità del corpo non varia con l'emissione, visto che è rimasto fermo in K. In K$'$ il corpo ha un'energia E'_0, ed E. mostra che l'energia della radiazione emessa vale $\varepsilon' = \gamma\varepsilon$; quindi

$$E'_1 = E'_0 - \gamma\varepsilon$$

da cui

$$(E'_0 - E_0) - (E'_1 - E_1) = (\gamma - 1)\,\varepsilon.$$

La prima parentesi è l'energia cinetica T_0 del corpo, misurata nel riferimento K$'$, prima dell'emissione; la seconda parentesi è l'energia cinetica T_1 dopo l'emissione.(5) Dunque

$$T_0 - T_1 = (\gamma - 1)\,\varepsilon \simeq \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{c^2}\,v^2$$

dove l'ultima espressione vale al secondo ordine in v/c.

Posso ora riportare fedelmente la parte finale dell'articolo:

"Da questa equazione segue immediatamente:

"Se un corpo emette l'energia ε in forma di radiazione, la sua massa diminuisce di ε/c^2. È ovviamente inessenziale che l'energia emessa dal corpo vada proprio in energia della radiazione, e siamo così condotti alla seguente conclusione generale:

"La massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia; se questa energia varia di ε, la massa varia nello stesso senso, di $\varepsilon/(9 \times 10^{20})$, quando si misuri l'energia in erg e la massa in grammi.

(4) Così E.: naturalmente si tratta di treni d'onda di durata finita (altrimenti non potrebbero avere energia finita) e solo approssimativamente piane, visto che sono emesse da un corpo di dimensioni anch'esse finite.

(5) In realtà E. si preoccupa di eventuali costanti additive nella relazione fra E e T, ma preferisco sorvolare, per brevità.

“Non è escluso che per mezzo di corpi il cui contenuto di energia sia variabile in grande misura (per es. sali di Radio) si possa ottenere una verifica della teoria.

“Se la teoria corrisponde ai fatti, ne segue che la radiazione trasporta inerzia fra il corpo che l'emette e quello che l'assorbe.”

Per il nostro scopo, occorre solo aggiungere che non si parla affatto di massa relativistica, né di variazione di massa con la velocità: il corpo in questione è fermo all'inizio dell'esperimento ideale, ed è ancora fermo alla fine. E. mostra solo che se il corpo perde energia *in qualunque modo, purché rimanendo in quiete*, la sua massa deve diminuire. Poiché il corpo è fermo, la massa in questione è la solita massa inerziale newtoniana.

Sulle ultime due righe dell'articolo E. torna in un lavoro successivo, che ora passiamo a esaminare.

“Il principio di conservazione del moto del baricentro e l'inerzia dell'energia”

È questo il titolo del lavoro [4], nel quale E. mostra di nuovo la necessità di attribuire inerzia all'energia, per un via diversa da quella indicata nel lavoro precedente. Sarebbe troppo lungo descrivere il ragionamento in dettaglio, per cui mi limito a esporlo in modo assai incompleto, e solo in quanto necessario per lo scopo di questo scritto.

E. immagina un cilindro cavo — libero di muoversi su una retta — che al suo interno porta a un'estremità A un emettitore di radiazione. La radiazione emessa (di energia ε) viene ricevuta all'estremo B da un piccolo corpo C, che può poi spostarsi in A e cedere al trasmettitore l'energia ricevuta, tornando infine in B. Si realizza in questo modo un processo ciclico, in cui tutto è tornato allo stato iniziale. All'atto dell'emissione il trasmettitore (e quindi il cilindro) ha subito un rinculo, e ha iniziato a muoversi con una certa velocità; quando la radiazione viene assorbita in B, l'impulso ceduto annulla il rinculo precedente, e il cilindro si ferma. Però ora la posizione del cilindro è diversa da quella iniziale.

Il moto avanti e indietro del trasportatore C non modifica la posizione finale, e quindi si è prodotto alla fine del ciclo uno spostamento effettivo, che può esser ripetuto e quindi moltiplicato quante volte si vuole. Dunque il centro di massa del sistema non resta fermo, e ciò contraddice le leggi della meccanica, dato che sul sistema non hanno agito forze esterne.

E. risolve la difficoltà osservando che se il trasportatore C, quando è carico di energia, ha una massa maggiore di quando è scarico, allora il suo moto di va e vieni sposta il centro di massa; i calcoli mostrano che alla fine il centro di massa resta dov'era se la massa di C aumenta di ε/c^2.(6)

(6) In realtà E. assume che C abbia massa nulla, ma ciò non ha alcuna influenza sul ragionamento.

Mi costa fatica non poter commentare come si dovrebbe la magnifica eleganza e semplicità del ragionamento, ma debbo limitarmi allo scopo: di che massa sta parlando E.? Ecco la frase cruciale:

"Si assuma però che a ogni energia E spetti un'inerzia E/c^2: allora ogni contraddizione con gli elementi della meccanica scompare. Infatti in questa ipotesi il trasportatore, mentre porta l'energia ε da B ad A, possiede la massa [addizionale] ε/c^2 ..."

e questa massa viene computata nella posizione del centro di massa, esattamente come richiesto dalla definizione newtoniana di questo.

Dunque ancora una volta abbiamo un corpo che guadagna massa in quanto assorbe radiazione, e non a causa del suo moto. Niente a che fare con la massa relativistica.

Si vede però che in questo lavoro torna in ballo la frase che avevamo tralasciato di commentare nel lavoro [3]: lì E. diceva "la radiazione trasporta inerzia"; qui scrive "a ogni energia spetta un'inerzia." Sembra naturale identificare "inerzia" con "massa," e concludere che la radiazione *ha massa.* È chiaro che a questo punto E. non ha ancora risolto la relazione fra massa e inerzia, e non ha sistemato il problema dell'additività e conservazione della massa.(7) Ovviamente se si assume che la massa sia additiva e si conservi, quando troviamo che un corpo acquista o perde massa dobbiamo cercare quale altro corpo ne ha perduto o acquistato la stessa quantità. Il punto è che E. non esplicita il problema, per cui sta a noi interpretare ciò che scrive.

Ancora sul moto del baricentro

Il quarto lavoro preso in esame [5] è del 1907. Nella prima pagina E. motiva questo lavoro con la necessità di dare un fondamento più generale a un risultato di così grande importanza come l'inerzia dell'energia. Esamina pertanto nuovi casi: quello di un corpo rigido dotato di carica elettrica, immerso in un campo elettrico; poi quello di un insieme di punti materiali non interagenti.

Per il solito motivo di brevità, debbo limitarmi a riportare i risultati centrali, esaminando l'uso che viene fatto da E. del termine "massa." Ecco le parole di E.:

"... il corpo dotato di carica elettrostatica possiede una massa inerziale che supera quella del corpo non carico, per l'energia elettrostatica divisa per il quadrato della velocità della luce."

A questa asserzione E. arriva confrontando le energie cinetiche dei due corpi a parità di velocità, e mostrando che esse hanno la stessa espressione, a condizione che la massa m del corpo venga rimpiazzata nel caso carico da $m+E_\mathrm{s}/c^2$, dove E_s

(7) Brevemente: *additività* significa che la massa di un sistema composto è la somma di quelle delle parti componenti. *Conservazione* significa che la massa di un sistema rimane costante nel tempo. Per completezza ricordo che *invarianza* significa invece che la massa non dipende dal riferimento.

è appunto l'energia elettrostatica del corpo carico, *misurata nel suo riferimento di quiete.*

Come si vede, anche qui non si tratta di massa relativistica dipendente dalla velocità.

Per il secondo esempio, E. introduce quello che oggi chiamiamo "riferimento del centro di massa," come quel riferimento in cui si annulla la quantità di moto totale del sistema. È da notare come scrive l'annullarsi della quantità di moto:

$$\sum \frac{\mu\, w_x}{\sqrt{1-(w/c)^2}} = 0$$

e simili per le altre componenti (E. non usa vettori!); μ (senza indice) è la massa del generico punto materiale, w la sua velocità. Anche qui, nessuna massa relativistica.

E. calcola poi l'energia totale del sistema in un riferimento qualsiasi. Detta E_0 l'energia totale nel riferimento del centro di massa, enuncia come segue il risultato:

"In relazione alla dipendenza dell'energia dallo stato di moto del sistema di coordinate nel quale si osserva il fenomeno, un sistema di punti materiali in moto uniforme può essere sostituito da un singolo punto materiale di massa $m = E_0/c^2$.

"Un sistema di punti materiali in moto possiede quindi tanta più inerzia — se considerato nel suo insieme — quanto più rapidamente i punti si muovono l'uno rispetto all'altro…"

Insomma: l'energia cinetica dei singoli punti, calcolata nel riferimento del centro di massa, va a incrementare la massa del sistema, ai fini del calcolo della sua energia in un riferimento nel quale il sistema sia complessivamente in moto.

Il lavoro di rassegna del 1908

In questo lungo lavoro [6] non ci sono novità sostanziali per quanto riguarda il nostro tema, tranne una di cui dirò tra poco. Si ribadiscono i risultati dei lavori precedenti, e si sottolinea la "straordinaria importanza teoretica" dell'inerzia dell'energia. E. dedica anche un certo spazio alla possibilità di verifiche sperimentali.(8)

Un capitolo è dedicato a un argomento nuovo: la quantità di moto relativistica. L'espressione relativistica della quantità di moto, nella forma ben nota

$$p = m\gamma v$$

era stata ricavata da Planck nel 1906 [11].

(8) Una curiosità: in questo lavoro per la prima volta E. usa c come simbolo per la velocità della luce.

E. si propone di determinare la quantità di moto per lo stesso sistema di cui ha in precedenza considerato l'energia: una cavità contenente radiazione elettromagnetica. Dimostra che non solo l'energia, ma anche la quantità di moto possono esprimersi come quelle di un punto materiale che si muove con la velocità della cavità, ma ha una massa pari alla massa della cavità più l'energia della radiazione contenuta (misurata nel riferimento in cui la cavità è ferma) divisa per c^2.

L'esposizione divulgativa

Si tratta del libro [7], scritto nel 1917 e tradotto in italiano nel 1921. Con felice iniziativa, l'editore Zanichelli ne ha pubblicato in anni recenti una ristampa anastatica. La questione che c'interessa è discussa alle pagine 38–41, e riporto qui la parte finale:

"... un corpo in moto con velocità v, che sotto forma di radiazione assume l'energia E_0 [in nota: E_0 è l'energia acquisita, valutata rispetto ad un sistema coordinato mobile col corpo], *senza variare perciò la sua velocità*, [corsivo mio, E.F.] subisce un incremento della sua energia uguale a γE_0.

"Così l'energia posseduta dal corpo, tenendo presente l'espressione precedente dell'energia cinetica, è espressa da

$$\left(m + \frac{E_0}{c^2}\right) c^2 \gamma.$$

"Il corpo adunque possiede un'energia uguale a quella di un corpo di massa $m + E_0/c^2$ mobile con velocità v. Si può pertanto dire: se un corpo acquista un'energia E_0, la sua massa inerte aumenta di E_0/c^2; la massa inerte di un corpo non è costante, ma varia col variare della sua energia. [...] L'ultima espressione dell'energia può scriversi

$$(mc^2 + E_0)\,\gamma$$

e si vede allora, che il termine mc^2, già trovato sopra, non è altro che l'energia posseduta dal corpo, prima che questo acquistasse l'energia E_0."

La chiarezza cristallina di queste parole mi dispensa da commenti.

"Il significato della relatività"

La prima edizione (inglese) di questo libro è del 1922. Non si tratta di un'opera divulgativa; inizialmente riportava lezioni tenute nel 1921 a Princeton, poi fu integrato, nelle edizioni successive, con capitoli sugli sviluppi della relatività generale e sui tentativi di una teoria unificata di gravitazione ed elettromagnetismo.

La questione di cui mi sto occupando è affrontata alle pagg. 54–55 dell'edizione italiana [8]. Posso però evitare di ripetere cose già dette, visto che l'esposizione non si scosta da quella di scritti precedenti. Osservo solo che qui appare l'equazione

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\,\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

che ho trascritta modificando solo alcuni simboli. Si noterà che E. ha posto $c = 1$; ma soprattutto si vede che non c'è traccia di massa relativistica: l'impulso è scritto $m\mathbf{v}\gamma$.

"Deduzione elementare dell'equivalenza tra massa ed energia"

Questo scritto [9] riproduce una lezione tenuta da E. nel dicembre 1934 a una riunione congiunta della American Mathematical Society, della American Physical Society e della American Association for the Advancement of Science. Eccone l'apertura:

"La teoria speciale della relatività si è sviluppata dalle equazioni elettromagnetiche di Maxwell. Come risultato, anche nella deduzione dei concetti meccanici e delle relazioni tra questi, ha giocato un ruolo essenziale la considerazione di quelli del campo elettromagnetico. È naturale porsi la domanda sull'indipendenza di queste relazioni, dato che la trasformazione di Lorentz, che è la vera base della teoria speciale della relatività, in sé non ha nulla a che fare con la teoria di Maxwell [...]"

Ancora una volta, non posso seguire in modo completo l'intero lavoro, e debbo riassumerne procedimento e risultati. Lo scopo del lavoro è di giustificare *per via puramente meccanica* le espressioni relativistiche dell'energia e dell'impulso, nonché l'equivalenza massa–energia. Ai nostri fini ciò che conta è vedere se nel lavoro ci sia qualche richiamo alla massa relativistica, e come esattamente venga definita l'equivalenza già ricordata.

Sul primo punto posso già dare la risposta: tutte le volte che parla di massa, qui E. intende *sempre e solo quella di riposo*. Per esempio, introduce il tema centrale del lavoro al modo seguente:(9)

"Assumiamo che impulso ed energia di un punto materiale siano dati da espressioni della forma

$$I_\nu = m u_\nu F(u) \qquad E = E_0 + m\,G(u) \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

dove F e G sono funzioni universali (pari) della velocità u, che si annullano per $u = 0$. Allora $m\,G(u)$ è l'energia cinetica, E_0 è l'*energia di riposo* del punto materiale, m la *massa di riposo* o, semplicemente, la massa. [...] Si assume inoltre che nell'impulso e nell'energia figuri *la stessa* costante di massa m; ipotesi per la quale, tuttavia, troveremo in seguito una parziale giustificazione."

(I corsivi sono di E.)

(9) In tutto lo scritto, senza dirlo, E. pone $c = 1$.

Il metodo seguito per arrivare alla forma delle funzioni F e G è questo: considera un urto elastico tra due particelle uguali, e lo studia prima nel riferimento del centro di massa, poi in un altro riferimento inerziale. Con una serie di passaggi in cui entrano le trasformazioni di Lorentz e la conservazione di impulso ed energia in entrambi i riferimenti, si trova quello che tutti sappiamo:

$$F(u) = \gamma(u) \qquad G(u) = \gamma(u) - 1.$$

A proposito dell'energia di riposo, è il caso di citare un passo della parte introduttiva, dove E. si pone il problema di quale significato dare a questa espressione:

"Inoltre, non è perfettamente chiaro che cosa si debba intendere parlando di *energia di riposo*, dato che l'energia è definita solo a meno di una costante additiva indeterminata; in relazione a ciò si può tuttavia osservare quanto segue. Ogni sistema può essere visto come un punto materiale, finché non si considerano altri processi tranne le variazioni della sua velocità d'insieme. Ha un chiaro significato, tuttavia, considerare variazioni nell'energia di riposo quando si debbano prendere in considerazione variazioni diverse dal semplice cambiamento della velocità di traslazione. L'interpretazione data sopra asserisce quindi che in una tale trasformazione di un punto materiale la massa cambia insieme con l'energia di riposo; ma naturalmente questa asserzione va dimostrata."

Suppongo sia chiaro che la "interpretazione data sopra" di cui si parla in questo brano non è che la solita. Con le parole di E.:

"È naturale [...] quindi attribuire al punto materiale nello stato di quiete l'*energia di riposo* m (mc^2 con l'unità di tempo consueta)."

Per dimostrare l'asserzione (una variazione di energia di riposo porta con sé una variazione di massa) si deve ricorrere a un urto anelastico. E. procede come prima, facendo urtare due particelle uguali, e assumendo che nell'urto entrambe subiscano una qualche trasformazione interna, uguale per entrambe. Assume in modo generico che nel processo cambino sia le energie di riposo, sia le masse, senza imporre in partenza alcuna relazione. Fa uso al solito delle leggi di conservazione, e arriva senza difficoltà alla tesi: la variazione dell'energia di riposo e quella della massa *sono uguali.*

Un punto va sottolineato: sebbene il processo sia anelastico, si assume non solo che si conservi la quantità di moto, ma anche l'energia. Questo è perfettamente giustificato, in quanto si sta in realtà dicendo che l'energia cinetica del moto di traslazione dei punti materiali si è in parte trasferita in energia interna (di riposo), o viceversa. Per l'osservazione fatta sopra, ai fini del moto di traslazione, e delle corripondenti quantità di moto ed energie, ciò che accade all'interno dei corpi è irrilevante; ma se ne deve tener conto nel bilancio totale dell'energia. Naturalmente la novità rivoluzionaria di E. (rivoluzionaria nel 1905, ma ben stabilita all'epoca di questa lezione) è che il cambiamento dell'energia interna porta con sé un cambiamento della massa.

Termino riportando la conclusione che E. dà al lavoro:

"Se le leggi di conservazione debbono valere negli urti tra punti materiali, rispetto a un arbitrario sistema di coordinate (di Lorentz), ne seguono le ben note espressioni per l'impulso e l'energia, come pure la validità del principio di equivalenza *tra massa ed energia di riposo*." [Corsivo mio, E.F.]

Credo di potermi esentare dal ripetere come viene qui intesa l'equivalenza. Non sono possibili dubbi in proposito.

"L'evoluzione della fisica"

Abbiamo qui a che fare con un libro che dovrebbe essere definito divulgativo, in quanto non contiene formule, ma solo ragionamenti e figure. Ma non è certo confrontabile con ciò che passa oggi per divulgazione... Il libro, scritto con Infeld nel 1938, discute la relazione tra massa ed energia lungo quattro pagine (204–207) dell'edizione italiana [10], ed è piuttosto difficile riassumerle. Si tratta dell'unico caso, tra quelli da me esaminati, in cui è possibile trovare qualche argomento — anche se soltanto implicito — in favore della massa relativistica. Cerchiamo di spiegare; però rimando chi voglia approfondire la questione alla lettura diretta del testo.

Einstein e Infeld iniziano così:

"Un corpo in riposo possiede una massa determinata, la cosiddetta *massa di riposo*. La meccanica insegna che qualsiasi corpo oppone resistenza ad un mutamento del suo moto. Quanto maggiore è la massa, tanto maggiore è la resistenza; od ancora: quanto minore è la massa, tanto più debole è la resistenza. Ma la teoria della relatività ci dice qualcosa di più. La resistenza che i corpi oppongono ad un mutamento è tanto più forte non soltanto quanto maggiore è la loro massa di riposo, ma altresì quanto maggiore è la loro velocità. [...] Nella teoria della relatività la resistenza dipende da ambo i fattori: massa di riposo e velocità del corpo."

Un solo commento: ci si potrebbe aspettare che qui o poco dopo gli autori dicano "in altre parole, la massa di un corpo dipende dalla sua velocità." Invece questa frase *non appare mai*, sebbene la conclusione sembri suggerita implicitamente. Ma guardiamo più avanti:

"Tali risultati suggeriscono un'ulteriore ed importante generalizzazione. Un corpo in riposo possiede massa, ma non possiede energia cinetica ossia energia di moto. Un corpo in movimento possiede ambo le cose: massa ed energia cinetica. Esso resiste perciò alla variazione di velocità od accelerazione più fortemente del corpo in riposo. È come se l'energia cinetica del corpo in movimento accrescesse la sua resistenza. Di due corpi che possiedono la stessa massa di riposo, quello la cui energia cinetica è maggiore, oppone maggior resistenza all'azione di una forza esterna."

Qui tutto lascia credere che si stia dicendo: l'energia cinetica accresce *la massa* del corpo. Eppure questa frase non c'è! Si parla genericamente di "resistenza," che non è la stessa cosa. Alla lettera, maggiore resistenza vuol dire che a parità di forza applicata l'accelerazione risulta minore quando il corpo è in moto, il che è indubbiamente vero. È però difficile che il lettore sfugga alla tentazione di trarre da sé la conclusione che la massa aumenta con la velocità...

Ma non abbiamo ancora finito. Proseguiamo la lettura:

"Figuriamoci una scatola contenente delle sferette, l'una e le altre in riposo nel nostro sistema di coordinate, vale a dire la Terra. Per mettere la scatola in moto o per aumentarne la velocità occorre una forza. Potrà la stessa forza accrescerne la velocità nella stessa misura e nello stesso intervallo di tempo anche qualora le sferette all'interno della scatola si muovessero in tutti i sensi, come le molecole di un gas, ma con velocità media prossima a quella della luce? Occorrerà indubbiamente una forza maggiore in ragione dell'accresciuta energia cinetica delle sferette e della conseguente maggior resistenza che la scatola opporrà al moto. L'energia o quanto meno l'energia cinetica, resiste al moto, come le masse ponderabili. Ma è ciò forse vero per tutte le specie o forme di energia?"

A questo punto qualche commento è necessario. I due brani che ho appena citati sono uno di seguito all'altro, sì che il secondo può apparire un'esemplificazione del primo. Eppure *si tratta di tutt'altra cosa*!

Nel primo caso si aveva un corpo, della cui costituzione interna non si diceva niente, e che veniva considerato in moto *nel suo insieme*. Si faceva notare che la resistenza opposta a una forza riusciva maggiore di quella opposta dallo stesso corpo da fermo. Nel secondo caso invece la scatola contiene delle sferette, e in un primo tempo scatola e sferette sono ferme; poi ci si chiede se cambierà qualcosa qualora le sferette all'interno della scatola siano in moto disordinato, come le molecole di un gas: si asserisce che la resistenza dell'intera scatola ad essere accelerata risulterà maggiore.

Entrambe le cose sono vere, ma non è cosa semplice dedurre la seconda dalla prima; il libro invece lascia l'impressione che si tratti di una relazione ovvia.

Si noti che il secondo caso corrisponde esattamente al risultato che E. aveva raggiunto in [5], ma si vede come ora l'enunciato, forse a causa dell'intento divulgativo, risulti ambiguo: è facile ricavarne la conclusione che l'energia cinetica aumenta la massa di un corpo, mentre ho già fatto notare che nei lavori precedenti E. non ha mai detto questo.

La difficoltà sta nel non aver chiarito se la massa sia da ritenersi *additiva* oppure no: se infatti la massa della scatola aumenta quando le sferette sono in moto, come le molecole di un gas, e se si dà per scontata l'additività, allora necessariamente questo aumento di massa non può che discendere dall'aumentata massa di ciascuna sferetta. Se invece non si vuole parlare di aumento di massa delle sferette, visto che l'aumento di massa dell'intera scatola è indiscutibile, bisogna asserire che *in relatività la massa non è additiva.*

Il libro continua:

"A questa domanda la teoria della relatività dà una risposta chiara e netta [...]. *L'energia sotto tutte le sue forme si comporta come la materia*; un pezzo di ferro pesa più quando è caldo di quando è freddo; la radiazione emessa dal Sole attraverso lo spazio, possiede energia e pertanto anche massa; il Sole e tutte le stelle radianti perdono massa emettendo radiazione."

Qui la frase cruciale è "la radiazione [...] possiede energia e pertanto anche massa." È inevitabile concluderne che anche un elettrone, quando è in moto, possiede più massa di quando è fermo, a causa della sua energia cinetica.

Sembra dunque che a questo punto E. abbia preso posizione, anche se solo in un'opera divulgativa, e in modo non chiaro, a favore dell'aumento della massa con la velocità. Ma la storia non è ancora finita...

La lettera del 1948 — Conclusione

Nel 1948 E. scrive a L. Barnett una lettera [1][12] dove affronta esplicitamente l'argomento. Ecco che cosa dice:

"Non è bene parlare della massa $M = m\gamma$ di un corpo in moto, poiché di M non si può dare una definizione chiara. È meglio limitarsi alla 'massa di riposo' m. Volendo stabilire il comportamento inerziale di un corpo in moto veloce, si può aggiungere piuttosto l'espressione dell'impulso e dell'energia."

Il cambiamento di posizione è evidente: solo la massa di riposo ha un significato chiaro, e nella dinamica relativistica è molto meglio lavorare con impulso ed energia. E (aggiungo io) con la loro relazione fondamentale:

$$E^2 - c^2p^2 = m^2c^4.$$

La presente ricerca ha mostrato che in nessuno scritto di E. fra quelli esaminati si trova il termine "massa relativistica," né viene mai usata la corrispondente espressione matematica. Ci sono in alcuni scritti (soprattutto in [10]) frasi poco chiare, che è possibile interpretare come riferentisi alla massa relativistica, ma possono anche essere interpretate diversamente. Ci sono viceversa numerosi casi in cui al difuori di ogni dubbio E. si riferisce alla massa invariante, detta anche "di riposo." Mai ho trovato frasi come "la massa (o l'inerzia) dipende dalla velocità."

Viceversa, più volte E. sottolinea l'equivalenza tra massa ed energia; ma tutte le volte che ciò viene fatto in modo preciso, anche attraverso esempi, si tratta sempre e solo del fatto che la massa invariante di un corpo viene accresciuta quando questo assorbe energia, e diminuita quando la emette.

Un punto delicato sta nell'osservazione, che E. fa in più occasioni, che le due leggi di conservazione della fisica newtoniana (quella della massa e quella dell'energia) in relatività si riducono a una. Volendo, si potrebbe interpretare questo come un argomento a favore della massa relativistica, che non è altro che l'energia (a parte il fattore c^2). Però quasi sempre, magari nella stessa pagina, accanto a questo discorso appare l'altra interpretazione dell'equivalenza: quella che ho richiamata poco sopra.

Come spesso accade alla nascita di un capitolo della scienza, l'interpretazione delle leggi e dei concetti non si realizza e non si conclude in un batter d'occhio. Mi sembra di poter dire che le zone di ambiguità di cui ho parlato siano da attribuire appunto al fatto che l'interpretazione è in divenire, nella mente dello stesso Einstein.

Non a caso la discussione su questo punto è proseguita anche dopo la morte di E., fino ai giorni nostri; anche se mi sento di poter dire con sicurezza che la tendenza (che auspico irreversibile) va nel senso dell'archiviazione della massa relativistica.

Bibliografia

[1] C.G. Adler: “Does mass really depend on velocity, dad?” (Papà, davvero la massa dipende dalla velocità?), *Am. J. Phys.* **55** (1987), 739.

[2] “Zur Elektrodinamik bewegter Körper”(Per l'elettrodimanica dei corpi in moto): *Ann. der Physik* **17** (1905), 891.

[3] “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?” (L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?): *Ann. d. Physik* **18** (1905), 639.

[4] “Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie” (Il principio di conservazione del moto del baricentro e l'inerzia dell'energia): *Ann. d. Physik* **20** (1906), 627.

[5] “Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie” (Sull'inerzia dell'energia, richiesta dal principio di relatività): *Ann. d. Physik* **24** (1907), 371.

[6] “Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen” (Sul principio di relatività e le conseguenze che se ne ricavano): *Jahrbuch der Radioaktivität* **4** (1908), 411.

[7] “Sulla teoria speciale e generale della relatività (volgarizzazione)” (trad. ital., Zanichelli 1921).

[8] “Il significato della relatività” (3ª ed., trad. ital., Einaudi 1950).

[9] “Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy” (Deduzione elementare dell'equivalenza tra massa ed energia): *Bull. Am. Math. Soc.* **41** (1935), 223.

[10] “L'evoluzione della fisica” (trad. ital., Einaudi 1950).

[11] M. Planck: *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **4** (1906), 136.

[12] L.B. Okun: “The Concept of Mass” (Il concetto di massa), *Physics Today* **42** (1989), 31. In questo articolo si trova una riproduzione fotografica dell'autografo in tedesco di E.; l'originale è conservato all'Università ebraica di Gerusalemme.