La candela

Il tema del nostro discorso di oggi è una semplice parola: "lineare." È molto tempo che avevo concepito l'idea di ragionare (o divagare?) attorno a questo aggettivo, e finalmente mi sono deciso. Debbo dare giustificazioni?

Potrebbero essere queste: nel linguaggio scientifico (e ancor più nella sua periferia, costituita dalla divulgazione, dai commenti filosofici, e da altro ancora) la parola è di uso comune, e oggi forse più frequente di un tempo. Di solito è accompagnata da una negazione: "non lineare." Mi sono sempre chiesto quanti di coloro che la usano ne conoscano il significato, o meglio i significati; e soprattutto se abbiano chiaro che nel linguaggio della matematica e della fisica "lineare" è un termine tecnico, da intendersi quindi in un senso preciso, che non consente analogie, metafore, ecc. Temo invece che questi modi del pensiero entrino spesso, magari di soppiatto, in tanti discorsi che si fanno, con evidente danno per la chiarezza e anche per la correttezza di ciò che si dice, si scrive, si pensa.

Va detto che questo non è che un caso particolare di un problema più ampio, che concerne tutto il linguaggio scientifico: ogni volta che si tenta di esportarlo, nel senso della divulgazione come in quello della riflessione filosofica, ci si scontra con la difficoltà dei termini tecnici. Se li si usano, si rischia di non essere capiti; se non li si usano, di essere imprecisi.

Ma il peggio è che molti termini tecnici non sono parole speciali. Se scrivo "omomorfismo," "entalpia," "cromosoma," chiunque capisce che sto usando una parola specialistica, di cui non si può indovinare il significato senza un certo studio. Ma se scrivo "gruppo," "massa," "specie," tutto cambia, perché si tratta di parole del linguaggio comune, cui si associano una serie di connotazioni dalle quali è difficile liberarsi senza un addestramento *ad hoc*. (Ci sono poi parole ancora più pericolose: quelle che nascono dal linguaggio scientifico ma poi acquistano cittadinanza comune, come ad esempio "energia"; ma non voglio dilungarmi.) Chi non abbia l'addestramento che dicevo, finisce inevitabilmente per intendere la parola nel senso che gli dà il linguaggio comune, con tutte le caratteristiche di questo: *flessibilità*, *ambiguità*, *variabilità*.

Parlando di flessibilità, intendo che non esiste un significato *rigido*, e questo per la lingua è un bene, perché consente di adattare il significato delle parole alle esigenze del discorso che si sta facendo, senza doverne adoperare di sempre diverse. L'ambiguità è in fondo la flessibilità vista in una luce negativa: la parola può essere piegata a varie sfumature, e questo fa il gioco di chi voglia confondere le carte. Un esempio? L'art. 33 della Costituzione parla di "istituire" scuole senza oneri per lo Stato: c'è chi ha pensato bene di deformare appena un pochino l'intenzione dei padri costituenti, spiegando che "istituire" si riferisce solo all'atto della fondazione della scuola, ma non al suo esercizio...

Però in difesa dell'ambiguità c'è che senza di essa molta poesia, e forse gran parte dell'arte che si basa sulle parole, non sarebbe possibile. Sempre che non la pensiate come Platone, che anche per questo avrebbe bandito tutta l'arte, a eccezione della musica, dalla sua repubblica.

Per variabilità posso intendere che la stessa parola non ha in effetti lo stesso significato per i diversi parlanti, il che rende sempre incerta e talora problematica la comunicazione. Uno degli scopi dell'educazione (e perciò della scuola, che proprio per questo è bene che sia scuola *di tutti* e *per tutti*) è di abituare a comprendere il punto di vista altrui; il che spesso significa ricordarsi che le stesse parole possono avere significati diversi.

* * *

Dopo la lunga premessa, torniamo a "lineare." Non è forse male ricordare alcuni dei significati della parola nel linguaggio comune: lineare può voler dire semplice, facile (un ragionamento lineare); oppure diritto, onesto (un percorso lineare, una persona lineare); chiaro, netto (una posizione lineare); non chiuso (contrapposto a "circolare"); non ramificato (il tempo lineare di Newton, in luogo di quello borgesiano, del *giardino dei sentieri che si biforcano*, ripreso nella "meccanica quantistica a molti tempi" di Everett). Non escludo che si possano dare altre interpretazioni, ma queste mi sembrano sufficienti. Per chiarire ancor meglio, pensiamo ai possibili contrari di "lineare": contorto, ramificato, ambiguo, circolare, complicato.

Si capisce bene che cosa può accadere quando si legge di una "teoria lineare," o di "equazioni non lineari che portano al caos": se non si dispone di una guida — o nel senso di un volumetto che spiega le cose da guardare e quelle da evitare, o nel senso del Virgilio dantesco — è ben facile perdersi.

Bisogna dunque capire che cosa vuol dire "lineare" in matematica, e poi in fisica (è quasi lo stesso, ma poi vedremo meglio). La partenza del discorso è semplice, e sta nella geometria analitica cartesiana. Anche chi non ha più avuto occasione di praticarla, spero ricordi uno dei cardini di questa tra le fondamentali invenzioni della matematica: associando a ogni punto del piano una coppia di numeri (le coordinate cartesiane, appunto) ne risulta che una curva qualsiasi è rappresentata da un'*equazione*, ossia da un legame fra le due coordinate: tutti e soli i punti della curva soddisfano l'equazione. In questo senso abbiamo un'equazione (o meglio una famiglia di equazioni) per le parabole, una per le ellissi e in particolare per le circonferenze, ecc. ecc.

Ma prima di tutto abbiamo una classe di equazioni per le più semplici fra le curve, ossia le *rette*. Una parentesi: anche qui l'uso comune crea problemi. Per la lingua di tutti i giorni, retta e curva sono concetti opposti: se una strada è retta non ha curve! In matematica invece di solito si chiamano curve "tutte" le curve, ossia quegli insiemi di punti tra loro uniti, senza preoccuparsi della forma (spero che nessun matematico legga questa frase, perché mi gratificherebbe, a ragione, del più sovrano disprezzo; ma non ha proprio senso che mi addentri qui nella problematica assai complessa che c'è dietro la definizione matematica di curva). Perciò in matematica le rette sono solo particolari curve, e sono descritte da perticolari equazioni.

Le equazioni che rappresentano le rette hanno una caratteristica comune: le abbiamo incontrate tutti nella scuola secondaria, nella forma $y = ax+b$ o equivalenti. Si tratta di equazioni *di primo grado*, perché tanto x che y appaiono solo in un polinomio, e solo alla prima potenza. Poiché queste equazioni (di primo grado) rappresentano rette, vengono chiamate "lineari." Ed ecco l'atto di nascita del nostro termine tecnico.

C'è da notare una questione linguistica di altro genere: in italiano "retta" e "linea" non sono sinonimi: "linea" si usa anche per una curva (la linea della costa, la linea dei fianchi ...). In inglese "line" è più vicino a "retta," anche se a volte si precisa "straight line." Perciò è un po' curioso che anche in italiano si sia affermato "lineare" per dire "pertinente a una retta." E scusate la terribile pedanteria: ma mi sembrava necessaria, *una tantum*.

Tornando alle rette e alle loro equazioni, c'è poi uno slittamento di significato, che nasce così: l'equazione può essere vista come un modo per ricavare y a partire da x (l'ordinata che corrisponde a una data ascissa). Vista in questo modo, diventa una *funzione*: y è funzione di x, espressa dalla solita formuletta $y = ax + b$ (la funzione più semplice possibile, dopo la costante). Dato che il grafico della funzione è una retta, non vi meraviglierete se la si chiama anch'essa "lineare": y è *funzione lineare* di x.

E qui occorre una confessione: non è proprio vero che la matematica sia assolutamente rigorosa e priva di ambiguità. Infatti il termine "funzione lineare" a volte è usato come ho detto; altre volte però lo si trova in un significato più ristretto: $y = ax$. (Si tratta ancora di rette, ma passanti per l'origine.) La relazione $y = ax$ è assai importante, specie per la fisica, in quanto esprime la *proporzionalità diretta*. Perciò talora "funzione lineare di" è sinonimo di "proporzionale a."

Il concetto di funzione lineare può essere poi generalizzato, prima di tutto a più variabili: y può essere funzione lineare di x, w, $z\ldots$ Ma la matematica (e la fisica che ne fa uso) fanno un altro passo, molto più astratto, che debbo accennare ma non voglio spiegare bene, perché sarebbe come invitarvi a saltare — se non l'avete già fatto — a un altro articolo della rivista, sicuramente più divertente di questo... Dirò solo che si può parlare di relazione lineare anche fra cose più complesse di semplici variabili reali: vettori, campi scalari e vettoriali, ecc. Magari più oltre spiegherò l'idea con qualche esempio.

* * *

Linearità e proporzionalità sono molto importanti in fisica, almeno per due ragioni. La prima è piuttosto banale, ma non per questo da disprezzare: con le relazioni lineari è facile fare i calcoli. I sistemi di equazioni lineari hanno un algoritmo di soluzione che tutti abbiamo incontrato (e magari abbiamo visto come una specie di tortura); l'esistenza di quell'algoritnmo generale implica che se le nostre equazioni sono lineari sappiamo bene come risolverle, senza fatica e senza approssimazioni. Lo stesso vale per quegli arnesi ben più complicati che sono le equazioni differenziali: quando sono lineari, ci sono tecniche di soluzione di validità generale, che sono usatissime ad es. dagli ingegneri elettronici.

La seconda ragione per l'importanza delle relazioni lineari la spiegherò più avanti, e come vedremo è ben più fondamentale: è questa che giustifica la grande "simpatia" dei fisici per la linearità, simpatia che vista dal di fuori ci viene spesso rimproverata come una ristrettezza di vedute...

Prima però voglio ricordare alcuni esempi semplici di relazioni lineari della fisica. La prima che mi viene in mente è il comportamento dei materiali elastici: la deformazione è proporzionale allo sforzo applicato (legge di Hooke). La seconda potrebbe essere la legge di Ohm: in un conduttore metallico la corrente è proporzionale alla differenza di potenziale applicata (o viceversa). Al terzo posto metto $F = ma$: l'accelerazione è proporzionale alla forza applicata. Quarto esempio: la pressione prodotta da una colonna di fluido è proporzionale alla sua altezza (legge di Stevino). (Veramente ci sarebbero diverse cose da precisare, ma andrei fuori tema.) Quinto esempio: il potenziale di un conduttore isolato è proporzionale alla carica. Sesto: la variazione di temperatura di un corpo è proporzionale al calore assorbito... E qui mi fermo, perché è inutile insistere, mentre invece c'è un commento importante da fare.

Chiediamoci: in tutti gli esempi dati, la proporzionalità è sempre esatta, o solo approssimata? Si potrebbe rispondere assumendo un atteggiamento pragmatistico: la fisica è sempre approssimata, perciò la risposta è ovvia, ma non ha grande importanza. È comunque utile che si possano usare, anche se in via approssimata, delle relazioni lineari; e tanto basta.

Il mio punto di vista è un po' diverso. Ci sono vari gradi di validità nelle relazioni che ho scritto, e nei diversi casi la proporzionalità esprime qualcosa di più o di meno *fondamentale*. Mi spiego. La legge di Hooke è utilissima, ma è ovvio che non ha validità generale: se la forza applicata è abbastanza grande, la deformazione non è più ad essa proporzionale, e si possono avere effetti *plastici*, ossia deformazioni permanenti. Inoltre ogni materiale si comporta a suo modo, ed è difficile dare regole generali.

La legge di Ohm esprime una proprietà assai più fondamentale, legata com'è ai meccanismi di trasporto delle cariche in presenza di campo elettrico. La seconda legge di Newton ha validità limitata, come sappiamo dopo Einstein; ma è un caso limite *universale*, quando la velocità è piccola: si tratta quindi di un altro caso di legge fondamentale. La legge di Stevino vale per un liquido omogeneo in campo gravitazionale uniforme: non la potremmo certo applicare all'interno di una stella! Però basta modificarla tenendo conto delle variazioni di densità e di gravità, e risulta valida anche in quel caso (finché non diventino importanti le correzioni di relatività generale, come in una stella di neutroni). Siamo dunque ancora davanti a una legge fondamentale: sotto la legge di Stevino si nasconde la legge di gravitazione di Newton.

Con la relazione tra carica e potenziale ci troviamo invece in un caso che posso ben chiamare di validità universale: stiamo usando, in una forma particolare, una delle *equazioni di Maxwell*, che esprimono le leggi dell'elettromagnetismo, valide per quanto ne sappiamo senza eccezioni. Qui dunque la linearità (che si ritrova anche nelle altre equazioni di Maxwell, per es. per il campo magnetico) è veramente una legge fondamentale della fisica.

Tutto diverso il caso di temperatura e calore, com'è ben noto. Sappiamo che la relazione è più complicata: non tanto perché bisogna specificare la trasformazione, come insegna la termodinamica, quanto perché il calore specifico *non è costante*, se non in una grossolana approssimazione, anche nei casi più semplici (es. H_2O a pressione costante). Il calcolo dei calori specifici è possibile in certi casi su basi teoriche, ma in molti altri ci si deve accontentare di dati sperimentali.

Abbiamo dunque visto che non tutte le leggi lineari della fisica sono ugualmente fondamentali, e spesso sono solo approssimate. Dato però che le leggi lineari sono facili da maneggiare, è forte la tentazione di ... far diventare lineare anche ciò che non lo è. Che cosa voglio dire? Semplicemente che se una relazione non è lineare, magari perché è espressa da un insieme di dati empirici che non si dispongono gentilmente su una retta, ma accennano a una certa curvatura del grafico, possiamo sempre — limitandoci a una piccola porzione del grafico in questione — confondere la curva con una retta. Quest'operazione, piuttosto intuitiva, ma che presuppone una proprietà matematica che si chiama *differenziabilità*, permette di lavorare con le semplici relazioni lineari, al prezzo di rinunciare a una descrizione esatta del fenomeno. Nel nostro gergo, la chiamiamo "linearizzazione."

In realtà non si tratta di niente di complicato: se il calore specifico non è costante, la quantità di calore assorbita non è proporzionale al salto di temperatura; ma se questo salto è piccolo, il calore specifico varia poco nell'intervallo, e posso assumerlo costante. Allora tra Q e ΔT si recupera la relazione lineare che ci fa tanto comodo. Lo avrete fatto o visto fare chissà quante volte, e magari non sapevate che stavate facendo una linearizzazione: proprio come il Mr. Jourdain di Molière, che rimane estasiato quando apprende che aveva parlato in prosa per tutta la sua vita, senza saperlo...

* * *

Ma bando agli scherzi (che come avrete capito, hanno lo scopo di alleggerire un po' il discorso, non quello di prendere in giro qualcuno ...). E occupiamoci invece della questione più seria, che avevo rimandato. Perché ai fisici piacciono tanto le leggi lineari, a parte la comodità pratica?

La risposta si esprime con un'altra frasetta di gergo: "principio di sovrapposizione" (brevemente, PS). Di che si tratta? Vediamolo con qualche esempio, cominciando con la legge di Hooke.

Se a un corpo elastico applico una certa forza F_1, esso si deforma in un certo modo: le sue parti si spostano dalla posizione iniziale. Se invece di F_1 applico F_2, avrò un diverso spostamento. Che succede se applico *insieme* F_1 e F_2? Se (e solo se) vale la legge di Hooke, lo spostamento sarà la somma di quelli prodotti dalle due forze prese separatamente. Non solo: se pensate che le forze sono vettori, e lo stesso gli spostamenti, il risultato vale ancora, pur di fare le somme vettoriali come si deve. Ma non è finita: pensate a un corpo molto complicato, per es. un ponte sospeso. Le forze applicate possono essere quelle prodotte dal vento, o da un treno che ci passa sopra; le deformazioni sono in generale complesse, e diverse da punto a punto. Ma comunque, se considerate il vento da solo, poi il treno da solo, poi la loro azione congiunta, la deformazione del ponte sarà *in ogni punto* la somma di quelle prodotte separatamente.

Capite bene la grande semplificazione che questo fatto comporta: non c'è bisogno di considerare *tutti* i casi possibili di combinazioni di forze applicate. Basta scegliere certe forze particolari, tali che il più generale sistema di forze si possa vedere come somma di queste, e calcolare le deformazioni prodotte da quelle forze particolari. Da qui sarete in grado di calcolare la deformazione del ponte per qualsiasi sollecitazione. L'insieme di forze "particolari" che ho detto costituiscono quello che nel linguaggio matematico si chiama una *base* dell'insieme di forze possibili.

Un esempio diverso? Io so calcolare il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme, in qualunque punto dello spazio intorno. E se le cariche sono due? *No problem*: calcolo i campi prodotti separatamente dalle due cariche, e li sommo. E se le cariche sono tre … cento … una distribuzione continua di cariche? Niente di nuovo: in tutti i casi debbo sommare (per la distribuzione continua dovrò fare un integrale, che non è altro che una somma generalizzata).

Potrei continuare con gli esempi, ma forse è più utile sottolineare che il PS vale solo se la legge di base è lineare. Allo scopo potrà servire un controesempio, che preparerà il terreno a un discorso successivo. Ma prima c'è un'osservazione da fare, che credo importante.

Ho citato e spiegato il PS. È naturale che chi legge si sia chiesto: qual è lo *status* logico di questo principio? Dato che si chiama "principio," sembrerebbe che si tratti di una proposizione indipendente, un postulato, presumibilmente indotto da fatti sperimentali. Comunque qualcosa che dobbiamo aggiungere alla nostra teoria; e se i fisici lo usano, avranno delle buone ragioni per farlo… Niente affatto: forse era già chiaro dal modo come l'ho presentato, ma in effetti il PS è … un *teorema*. Nel senso che se le equazioni sono lineari, il PS segue necessariamente.

Bisogna sempre stare attenti quando s'incontra la parola "principio," perché il suo significato logico non è ben definito. Spesso nell'uso prevalgono ragioni storiche: qualcosa che un tempo era assunto come legge indipendente, si è poi visto che discendeva da altre leggi, più semplici o più fondamentali. Tuttavia il nome è rimasto. In altri casi invece, ancor oggi "principio" è sinonimo di "postulato" (che in fisica ha un significato un po' diverso che in matematica, ma non posso divagare ancora ...): per esempio, il principio di relatività.

Ed ecco il controesempio che avevo annunciato. Considerate il moto di un pianeta. Quando si ragiona alla buona, si tiene conto solo della forza di attrazione del Sole (e se ne ricavano le ben note leggi di Keplero). Ma questo non basta per le osservazioni di precisione: occorre tener conto anche della forza prodotta dagli altri pianeti (conoscete la storia della scoperta di Nettuno? magari ne parliamo un'altra volta ...). Si potrebbe pensare di applicare anche qui il PS, per esempio in questa forma: se voglio studiare il moto della Terra, dopo aver calcolato la sua traiettoria sotto l'azione del Sole, aggiungo un pianeta per volta e vedo come la traiettoria viene modificata; la modifica reale sarà la somma di quelle prodotte da ciascun pianeta.

Sbagliato. Come mai? Perché le equazioni che stiamo usando *non sono lineari*. Infatti le equazioni sono fondamentalmente due: una è la seconda legge di Newton ($F = ma$) che di per sé è lineare (l'ho detto poco sopra). Ma ce n'è un'altra: la legge di gravitazione. Questa mi dice come cambia la forza con la posizione del pianeta, e non è certo lineare, visto che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Niente linearità, niente sovrapposizione...

È proprio per questo che la meccanica celeste è una cosa complicata! E che possiamo aspettarci che spunti fuori un comportamento caotico... Ma questo è un altro discorso.

Potrei forse aver dato la falsa impressione che in fondo il PS sia di nuovo una comoda regola per semplificarsi la vita facendo meno conti; ma non è affatto questa la sua importanza. Temo di non poter spiegare tutto quello che segue da tale principio (anche perché, lo confesso, ho una gran paura di essermi lasciato prendere la mano da un argomento che mi appassiona, e di aver scritto un grosso mattone). Perciò mi limito a farvi notare solo una cosa: i sistemi fisici retti da leggi lineari sono sostanzialmente tutti uguali dal punto di vista matematico (esagero e semplifico un po', ma debbo farlo ...).

Si potrebbe usare uno slogan: "visto uno, visti tutti." In termini più pomposi, ciò significa che si realizza una grandiosa *unificazione*, che non è solo di strumenti matematici, ma anche di concetti fisici associati: quando il fisico pensa a un sistema lineare, ha certe categorie che lo guidano, e che sono le stesse per qualsiasi sistema: il ponte come il campo elettrico o mille altri che non ho citato.

Il discorso è tutt'altro che concluso (e meno male che si trattava di una sola parola, direte voi) perché debbo esaminare altri aspetti del comportamento dei sistemi lineari, i quali per certi versi non sono affatto lineari... È anche da qui possono nascere alcuni dei fraintendimenti cui accennavo all'inizio.

E con questa frase sibillina vi lascio per oggi, sperando di non aver abusato della vostra pazienza...