La candela

Quando ho deciso, la volta scorsa, di dedicare la puntata al tema dell'energia nucleare, non sapevo neppure se il referendum si sarebbe tenuto. Avevo scelto di esporre ugualmente le mie opinioni nella presunzione che potessero conservare comunque un certo interesse per qualcuno.

Invece il referendum c'è stato, con un esito concorde con le mie idee. Anche se il mio "pezzo" non ha avuto su questo la minima influenza, visto che non solo non ha fatto in tempo a uscire per la data del referendum, come era facile prevedere, ma non è ancora uscito nel momento in cui scrivo. Però *La candela* è anche disponibile nel mio sito internet, e quindi forse qualcuno aveva fatto in tempo a leggermi...

Nel frattempo si sono prodotti nel mondo una quantità di fatti, in massima parte spiacevoli o tragici, che vorrei sommariamente ricordare; non tanto per commentarli, quanto per esprimere un personale senso di disagio — o forse di scoraggiamento — dal quale non so come uscire.

Elenco alla rinfusa:

1. Quel pazzo norvegese (ma forse "pazzo" non è la parola giusta) che ha potuto accumulare delle tonnellate di nitrato di ammonio, con cui ha confezionato la bomba piazzata nel centro di Oslo, e inoltre è riuscito a sparare indisturbato per oltre un'ora su dei ragazzi indifesi.

2. I recentissimi (nel momento in cui scrivo) disordini a Londra e in altre città inglesi, con incendi, saccheggi... Di commenti ne avrete letti e sentiti fin troppi, perché mi metta ad aggiungere i miei.

3. La crisi finanziaria, che ora investe l'Italia ma anche gli USA; per ragioni diverse, dicono gli "esperti." Qui la sensazione è che tutti, a cominciare dai governanti — Obama in testa — non sappiano che pesci pigliare. Certo si guardano bene dal dirlo: un politico non può mai permettersi, a differenza di uno scienziato, di confessare la propria incertezza o peggio ignoranza. Ma anche gli esperti, che ho messo fra virgolette in senso polemico, tutto mi sembrano tranne che davvero esperti. Al massimo hanno saputo prevedere i rischi che si correvano, ma quanto a suggerire soluzioni, *tot capita tot sententiæ*.

4. La carestia nel Corno d'Africa è in realtà una non notizia, dato che si tratta di una situazione ormai endemica. Chi pensa di poterla risolvere con aiuti umanitari, secondo me s'illude: il problema tocca milioni di persone, dura da anni, ha evidentemente cause in parte climatiche e in parte politiche. Anche qui, non mi pare che nessuno abbia da proporre soluzioni valide. Come commento più generale, credo sia chiaro a tutti che la situazione generale dell'Africa, specie nella

fascia equatoriale, negli ultimi decenni sia andata peggiorando: questo dovrebbe darci da pensare...

5. Una notizia non freschissima, e in fondo molto specialistica rispetto a quelle di cui ho parlato finora: per motivi di bilancio la NASA ha rinunciato al progetto LISA (il rivelatore di onde gravitazionali basato su satelliti). Il progetto non è completamente morto perché è ancora sostenuto dall'ESA (European Space Agency); si vedrà. Sicuramente sapete che finora le antenne terrestri (VIRGO qui vicino a Pisa, e LIGO in USA) non hanno rivelato nessun segnale utile.

6. Sempre in ambito scientifico (fisica): ci sono stati "rumors" che l'LHC (Large Hadron Collider) del CERN avesse trovato "indizi" dell'esistenza del tanto cercato "bosone di Higgs." Per avere qualcosa di più serio di quegli indizi, bisognerà aspettare. Nel frattempo, nessuno mi chieda che cosa sarebbe questo bosone di Higgs, e perché sia così importante trovarlo: non saprei darvi risposte decenti. In gran parte per mia ignoranza: non riesco a rendermi sufficientemente padrone dell'argomento, dopo che ho abbandonato, ormai da molti anni, la fisica delle interazioni fondamentali.

7. Tornando ai fatti internazionali: c'è da registrare lo stillicidio di morti in Afganistan (intendo militari occidentali; i civili afgani non fanno notizia). Il più recente è il "Chinook" colpito da un missile terra-aria, che ha fatto 38 morti, di cui 7 soldati afgani e 31 "Navy Seals" USA. Ho notato il linguaggio usato dai mezzi di comunicazione: l'elicottero sarebbe stato colpito da un "razzo," e l'azione è stata chiamata un "attentato." Il tutto serve, com'è ovvio, ad allontanare l'immagine di una vera e propria guerra, sostituita da circonlocuzioni come "peace keeping," "sostegno alla democrazia," e simili.

Sull'Afganistan mi soffermo un po', per ricordarvi che non si tratta di un problema recente. Sicuramente tutti state pensando a una sua origine, oltre 30 anni fa, con l'intervento dell'URSS, mirante a portare quel Paese nella propria orbita; seguito dalla reazione USA, concretizzatasi nel sostegno ai *mujahiddin*, che vennero riforniti di armi, tra cui i temibili missili "Stinger" che provocarono gravi danni agli elicotteri sovietici. È probabile che i missili oggi a disposizione dei talebani siano gli eredi, forse "made in Pakistan," degli Stinger degli anni '80.

Ma la storia delle guerre in Afganistan è parecchio più antica, come dimostra la seguente citazione:

Nell'anno 1878 mi laureai in medicina all'Università di Londra e mi trasferii a Netley per seguire un corso prescritto per i medici militari. Finiti gli studi a Netley, venni destinato al 5° Reggimento Fucilieri Northumberland.

Allora il reggimento era di stanza in India e prima che io lo raggiungessi scoppiò la seconda guerra afgana.

[...]

– Il dottor Watson, il signor Sherlock Holmes – ci presentò Stamford.

– Tanto piacere – disse Holmes in tono cordiale, stringendomi la mano con una forza di cui non l'avrei creduto capace. – A quanto vedo, lei è stato nell'Afganistan.

– Come fa a saperlo? – domandai stupefatto.

– Lasci perdere – fece lui ridacchiando.

[. . .]

– Lei è rimasto stupito quando le ho detto, al nostro primo incontro, che veniva dall'Afganistan.

– Senza dubbio, qualcuno gliel'aveva detto.

– Niente di tutto ciò. Io ho capito *che lei veniva dall'Afghanistan. Per lunga abitudine, il lavorio della mia mente è così rapido, che sono arrivato a quella conclusione senza esser conscio dei passaggi intermedi. Però, ci sono stati dei passaggi intermedi. Ecco il filo del mio ragionamento: quest'uomo ha qualcosa del medico, ma anche qualcosa del militare. È reduce dai Tropici, poiché ha il viso molto scuro, ma quello non è il suo colorito naturale, dato che ha i polsi chiari. Ha subito privazioni e malattie, lo dimostra il suo viso emaciato. Inoltre, è stato ferito al braccio sinistro. Lo tiene in una posizione rigida e poco naturale. In quale paese dei Tropici un medico dell'esercito britannico può essere stato costretto a sopportare dure fatiche e privazioni, e aver riportato una ferita a un braccio? Nell'Afganistan, naturalmente.*

S'intende che il mio cervello ha impiegato meno di un secondo a formulare questo sequenza di pensieri. Allora, le ho detto che veniva dall'Afganistan, e lei è rimasto sbalordito.

Tutti i lettori avranno certamente riconosciuto l'*incipit* e un successivo brano del celeberrimo *Uno studio in rosso* di Arthur Conan Doyle. Non so però quanti — di quelli che l'avevano letto — si ricordassero che il dr. Watson veniva dalla *seconda* guerra in Afganistan.

La prima fu combattuta nel 1838-42, quando l'impero britannico tentò di entrare in Afganistan per contrastare (anche allora!) l'espansionismo della Russia. Si concluse con la strage del passo di Khyber, il 1° gennaio 1842, dove 16 000 persone, meno di 5000 militari e il resto civili al seguito, furono sterminati. Un solo soldato britannico raggiunse Jalalabad, in India (oggi Pakistan).

* * *

L'elenco potrebbe continuare: non ho nominato la Libia né la Siria, come pure le migliaia di disperati che attraversano (quando ci riescono) le poche miglia che separano l'estremo lembo del territorio italiano dalla costa africana. Non ne ho parlato solo perché anche queste, come la "primavera araba" il cui esito è tuttora incerto, non sono notizie fresche.

Ma fanno parte del quadro complessivo, che riassumerei così: più o meno 30 anni fa, con la caduta del muro di Berlino e la fine dell'URSS, qualcuno s'illuse (e qualcuno volle farci credere) che si aprisse un radioso futuro di pace, di sviluppo ... che la libera circolazione dei capitali e più in generale il prevalere del libero mercato capitalistico assicurassero benessere per tutti, grazie alla salvifica capacità autoregolatoria del sistema economico. Mi piacerebbe se qualcuno degli ottimisti di allora, che per lo più sono ancora in servizio effettivo, nei governi, nei mezzi di comunicazione ... riconoscessero che forse si erano sbagliati, che qualcosa non funziona proprio bene nel sistema mondiale.

Mi piacerebbe, ma non ci spero; e purtroppo non vedo in che modo quelli che la pensano come me (e non credo siano tanto pochi) possano far sentire la loro voce e magari influire sulle scelte continuamente incombenti. Certo non mi posso accontentare di essere chiamato ogni tanto a mettere una scheda in un'urna: c'è troppa distanza tra questo gesto minimo e i problemi che abbiamo davanti, e che ci toccano *tutti.*

Per ora il meglio che riesco a trovare, è di proseguire col lavoro che so fare meglio, e che serve anche un po' a consolarmi. È una diversa accezione del "coltivare il nostro giardino": almeno questo posso e so farlo, mi dà qualche soddisfazione, si adatta bene alla mia condizione di pensionato... Senza contare che è anche il significato della "candela." Insomma, riprendiamo il nostro discorso–giardino.

* * *

Il discorso sulla relatività generale l'avevamo lasciato circa un anno fa. Col solito invito (almeno per i più volenterosi) ad andare a rileggersi la puntata 68, apparsa nel n. 3 dell'anno scorso, lo riprendo riassumendo i punti essenziali.

Vi avevo detto, senza giustificarlo, che dopo molti sforzi Einstein arriva a convincersi che la gravità si manifesta come *curvatura dello spazio-tempo* e avevo dato una sommaria spiegazione di che cosa ciò significa dal punto di vista matematico: deve esistere una *metrica*, che però sarà diversa da quella scritta da Minkowski per la relatività ristretta. Avevo fatto l'analogia con la superficie della Terra, dove pure non è possibile usare semplicemente le coordinate cartesiane del piano euclideo, mentre è possibile usare ad es. longitudine e latitudine; ma in queste coordinate la metrica assume una forma più complicata (la formula (4) di un anno fa) che mostra i fattori correttivi necessari per calcolare la giusta distanza tra due punti sulla superficie terrestre.

Nello spazio-tempo (4 dimensioni) i "fattori correttivi," ossia i *coefficienti della metrica*, sono in numero di 10 indipendenti, e sono questi che determinano la geometria dello spazio-tempo. Concludevo questa parte della mia esposizione con un brano che vi ripeto, perché è da qui che dobbiamo ripartire:

Ecco il problema che Einstein ha davanti: trovare le condizioni che determinano la geometria dello spazio-tempo. Ma che significa questo come problema fisico? Abbiamo già visto che lo spazio-tempo sarà curvo, e ciò a causa della materia presente, che produce campi gravitazionali non esattamente eliminabili, neppure mettendosi in un riferimento in caduta libera. Dunque il problema fisico, tradotto *in termini matematici, è: data la natura e distribuzione della materia presente, determinare la geometria (la metrica) dello spazio-tempo.*

Einstein deve dunque scoprire le *equazioni* della sua teoria, in cui i coefficienti della metrica figurano come incognite, e che risolte per una data distribuzione di materia, forniranno la geometria dello spazio-tempo determinata da quella materia, e quindi — tra l'altro — tutti gli effetti osservabili, gravità inclusa, ma non solo. Già sappiamo che dobbiamo aspettarci un'influenza sul moto dei pianeti, la deflessione della luce, il redshift gravitazionale (le "prove classiche"). Altre ne verranno pensate in seguito, e in vari casi saranno anche verificate; di una, la possibile esistenza dei "buchi neri," dovremo occuparci più attentamente, visto che (ricordate?) era l'obiettivo che mi ero proposto all'inizio di questa ormai lunghissima discussione.

* * *

A questo punto debbo aprire una parentesi, ossia cambiare temporaneamente discorso. Ho nominato da poco le "equazioni" di Einstein, e ora mi trovo in una grossa difficoltà, che era del resto prevista. Essendo fuori questione una descrizione di quelle equazioni col giusto linguaggio matematico, debbo però cercare di far capire che cosa sono, a che servono... Ma so di non poter fare affidamento su una chiara idea dei vari significati che il termine "equazione" assume in matematica e debbo cercare di cavarmela ugualmente, senza barare, senza contare frottole, come capita nella maggior parte della divulgazione sulla fisica "moderna."

Apro perciò una parentesi nella parentesi, per richiamare velocemente che cosa può significare "equazione" in matematica. In generale, s'intende una relazione da cui si deve ricavare il valore di un'*incognita*. Il caso più semplice e spero familiare a tutti sono le equazioni *algebriche*, che si possono sempre descrivere così: è dato un polinomio in una variabile (la tradizionale x) e si domanda per quali valori (reali o complessi) di x il polinomio si annulla: quei valori si chiamano *radici* del polinomio. Se il polinomio è di primo grado, abbiamo un'equazione da scuola media; se è di secondo grado, siamo passati alla scuola superiore; dal terzo grado in su nell'insegnamento tradizionale della matematica, anche universitario, non si dice più niente, se non che

a) esistono formule risolutive per radicali per le equazioni di terzo e quarto grado, ma non oltre

b) nel campo complesso un'equazione algebrica di qualsiasi grado ammette almeno una radice (questo è il *Teorema fondamentale dell'algebra*).

Esistono poi equazioni *trigonometriche*, che non c'interessano, equazioni *trascendenti*, che c'interessano ancor meno; ci sono poi i *sistemi* di equazioni, in cui le incognite sono non una ma due o più, che debbono soddisfare insieme tutte le equazioni. Una categoria a parte sono le equazioni *diofantine*, in cui le incognite sono vincolate a essere numeri interi... Ma noi dobbiamo muoverci in una direzione più complessa e astratta.

Infatti l'incognita di un'equazione invece di essere un numero può essere una *funzione*: questo è un caso di gran lunga più interessante e che un po' generalizzato racchiude tutte le equazioni della fisica. Tra le equazioni che hanno come incognita una funzione, una categoria per noi molto importante sono le equazioni *differenziali*, così chiamate perché la funzione incognita vi figura anche mediante le sue *derivate*.

L'esempio più semplice e storicamente più antico è la seconda legge della dinamica di Newton: $F = ma$. Qui la funzione incognita è la *legge oraria* del moto di un corpo, che dà la posizione del corpo in funzione del tempo: $x(t)$. In $F = ma$ figura l'accelerazione, che è la derivata seconda della funzione $x(t)$ rispetto al tempo, e siamo quindi in presenza di un'equazione differenziale *di secondo ordine.*

Accennavo sopra a una generalizzazione, ed ecco di che si tratta. Si può generalizzare in due sensi:

– Si possono avere *più* funzioni incognite e un *sistema* di equazioni: è il caso ad es. del moto di un pianeta, dove la posizione richiede *tre* coordinate, e le equazioni sono tre, una per ciascuna componente dell'accelerazione. La complicazione sta nel fatto che le tre funzioni incognite possono figurare in tutte le equazioni; altrimenti basterebbe risolverle ciascuna per proprio conto.
– La funzione incognita può dipendere non da una sola variabile (il tempo in $F = ma$) ma da *due o più variabili.* Allora figureranno derivate rispetto a tutte queste variabili, e l'equazione diventerà un'equazione *alle derivate parziali.* Molto più complicate da risolvere, in generale.

Le due cose possono essere combinate, arrivando a un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Orripilante!

Perché non pensiate che mi sono lasciato prendere la mano da chissà quale mania di generalizzazione matematica, richiamo subito un esempio assolutamente fondamentale per la fisica: le *equazioni di Maxwell.* In queste equazioni le funzioni incognite sono le componenti del campo elettrico e del campo magnetico (che sono vettori): abbiamo dunque *sei* funzioni incognite. Le variabili da cui tutte le funzioni incognite dipendono sono 4: il tempo e le tre coordinate del generico punto dello spazio. In totale, le equazioni sono *otto.* Non sono tanto complicate come sembra da questa descrizione, perché sono *lineari* e *di primo ordine*, sì che è possibile darne la soluzione in generale.

Non ho citato le equazioni di Maxwell a caso: ci saranno di un certo aiuto per capire che cosa siano le equazioni di Einstein. Occorre però un altro passo. Si possono mettere le equazioni di Maxwell in forma diversa introducendo i *potenziali elettromagnetici*, che sono quattro: il *potenziale scalare* e le tre componenti del *potenziale vettore.* Dai potenziali si calcolano senza difficoltà i campi, e si dimostra che in termini dei potenziali le equazioni di Maxwell si riducono a quattro, però *del secondo ordine.*

Ma c'è un'altra cosa che va ricordata, e di cui non avevo ancora parlato. Nelle equazioni di Maxwell o in quelle dei potenziali compaiono delle grandezze che si assumono come *dati* del problema: le *cariche* e le *correnti.* In sostanza dunque le equazioni dell'elettromagnetismo permettono di calcolare campi e potenziali una volta che siano note le distribuzioni delle cariche e delle correnti nello spazio e nel tempo. Detto in breve, nella forma che ci riuscirà più utile:

– dati: cariche e correnti

– incognite: potenziali (e quindi campi).

Non dovete pensare che la categoria delle equazioni sia finita qui (per es. ci sono le equazioni *integrali*). Ma per fortuna a noi basta ciò che ho detto, anche se ho tralasciato alcune questioni importanti ma non cruciali per il nostro scopo.

* * *

Chiusa la parentesi, domandiamoci: che genere di equazioni sono le equazioni della relatività generale (universalmente note come "equazioni di Einstein")? È fuori questione cercare di ricavarle, e anche solo di scriverle; mi limito a dire che sono equazioni differenziali a derivate parziali, del secondo ordine. E purtroppo, *non lineari.*

La non linearità costituisce la grave complicazione delle equazioni di Einstein rispetto per es. a quelle di Maxwell, che fa sì che in generale non si possa dare un'espressione in formule della soluzione, se non in casi semplici e particolari. Di una particolare soluzione "semplice" delle equazioni di Einstein ci dovremo occupare un po' più da vicino, perché ha proprio a che fare coi buchi neri.

In altri casi si procederà a risoluzioni *approssimate*, magari per *linearizzazione* (ricordate? ne parlammo 13 anni fa, nella puntata 22, n. 4 del 1998). Un caso importante in cui la linearizzazione è utile, è lo studio delle *onde gravitazionali*, di cui però non intendo parlare qui. Per la storia, è interessante che lo stesso Einstein ricorre alla linearizzazione per i calcoli inerenti le sue prove classiche, giustificato dal fatto che la curvatura dello spazio-tempo nei casi che a lui interessano è piccolissima, per cui è lecito considerarla una correzione a uno spazio-tempo piatto. In effetti Einstein, consapevole della grande complicazione delle sue equazioni, non immaginava neppure che se ne potesse dare una soluzione esatta; grande dovette essere il suo stupore quando poco dopo lesse il lavoro di Schwarzschild. Ecco un brano della lettera di Einstein a Schwarzschild:

Ho letto il Suo articolo con estremo interesse. Non mi sarei aspettato che si potesse scrivere la soluzione esatta del problema in una forma così semplice. Ho molto apprezzato la Sua trattazione matematica dell'argomento. Giovedì prossimo presenterò il lavoro all'Accademia con qualche parola di spiegazione.

Due parole su Karl Schwarzschild. All'epoca di cui stiamo parlando Schwarzschild, di pochi anni più anziano di Einstein (era nato nel 1873) era già un fisico famoso, avendo dato contributi significativi in diversi campi della fisica, della meccanica celeste, dell'astronomia. Aveva una rara capacità di affrontare e risolvere calcoli complessi, e questo sicuramente lo avvantaggiò anche nella scoperta della soluzione delle equazioni di Einstein alla quale ho appena accennato. Nel corso della prima guerra mondiale (non l'avevo detto, ma la vicenda di cui stiamo parlando si svolge proprio mentre la guerra era in corso) si trovava in servizio sul fronte russo quando fu colpito da una rara malattia autoimmune, allora incurabile, che lo portò alla morte nel 1916.

Una nota frivola: quello di Schwarzschild è un tipico cognome che alcuni stupidi definiscono "impronunciabile," dimenticando che se esiste vuol dire che viene comunemente pronunciato dalle persone che parlano quella certa lingua. Capisco che appaia intimidatorio per un italiano un cognome che su 13 lettere conta due sole vocali; può forse aiutare analizzarne l'etimologia. "Schwarzschild" è una parola composta (si sa che i tedeschi amano molto le parole composte) da "schwarz" (nero) e "Schild" (scudo). Quindi "Schwarzschild" significa semplicemente "scudo nero" ("black shield" in inglese) e così forse, grazie a Ivanhoe, films fantasy e videogiochi, diventa più pronunciabile...

Ma torniamo alle equazioni di Einstein. Mi accorgo di aver detto quali sono le *incognite* (i 10 coefficienti della metrica) ma non quali sono i *dati*, sebbene intuitivamente la cosa sia implicita in tutta l'esposizione che ho fatta: dato che la curvatura dello spazio-tempo è determinata dalla materia presente, è ovvio che i dati riguarderanno appunto la distribuzione della materia, così come nel caso elettromagnetico i dati sono la distribuzione delle cariche e delle correnti.

Si tratta dunque di assegnare la densità della materia (come sarebbe nella gravitazione newtoniana)? Non proprio, perché agli effetti gravitazionali massa ed energia sono indistinguibili, e per di più conta anche come la materia si muove (la corrente). Non servirebbe a niente approfondire la questione, e mi limito a citare un termine perché potrebbe capitarvi di trovarlo qua e là, e almeno potrete ricollegarlo ai nostri discorsi. Si tratta di questo: tutte le proprietà della materia e dell'energia che entrano nel calcolo della geometria dello spazio-tempo si riassumono nel *tensore energia-impulso*. Nei casi semplici di cui dovremo occuparci, questo "oggetto misterioso" si riduce all'ordinaria densità della materia, e tanto basta.

Riassumendo, nelle equazioni di Einstein i dati sono sintetizzati nel tensore energia-impulso, e le incognite sono i coefficienti della metrica. Risolvere le equazioni, come ho detto, non è faccenda semplice; salvo in pochi casi fortunati, uno dei quali è quello che ci servirà, e la cui soluzione è dovuta a Schwarzschild.

* * *

Ma prima di arrivare ai buchi neri c'è un'altra questione da discutere, che è importante per noi e ha anche interesse storico/epistemologico, perché mostra bene come la creazione e la comprensione di una teoria proceda per gradi: anche nella mente dello stesso ideatore. La questione ha a che fare con le coordinate.

Torniamo per un momento alla relatività ristretta: lì le coordinate sono "naturali": avremo le tre coordinate cartesiane dello spazio e la coordinata tempo: (x, y, z, t). Ma in uno spazio-tempo curvo (come sulla superficie della Terra) è fuori questione usare coordinate così semplici: come dovremo regolarci?

Oggi le idee sono chiare: la scelta delle 4 coordinate *è del tutto libera*. In termini generali, ciò che si richiede a delle buone coordinate è solo che siano adatte a "etichettare" gli eventi, ossia i punti dello spazio-tempo: una quaterna di coordinate per ciascun evento, e un evento per qualunque scelta di valori delle coordinate (magari entro un certo insieme). In pratica la scelta potrà essere guidata per es. da criteri di semplicità, in relazione al problema; ne riparleremo.

Ciò equivale a dire che in generale non ci si deve aspettare né richiedere che le coordinate di per sé abbiano un qualche significato fisico, che siano direttamente riconducibili a letture di qualche strumento di misura: come ho già detto, le coordinate vanno viste solo come *etichette* degli eventi. La cosa non era del tutto chiara ad Einstein, che per un po' cercò delle restrizioni alle possibili coordinate da adottare, e questo lo portò fuori strada nella sua ricerca delle giuste equazioni.

Ho parlato sopra di criteri di semplicità, e il più comune è la *simmetria* del problema. Supponiamo per es. che si voglia determinare la geometria dello spazio-tempo attorno al Sole: con ottima approssimazione possiamo trattare la nostra stella come una distribuzione di massa *statica* e *a simmetria sferica*. Si tratta di un'approssimazione perché il Sole ruota su se stesso, anche se più lentamente della Terra: se ne accorse Galileo osservando come le macchie solari apparissero da un lato della superficie, si spostassero e finissero per scomparire al lato opposto. Saprete di certo che il periodo di rotazione del Sole è in media di circa 25 giorni, e che debbo parlare di "media" perché la rotazione non è affatto quella di un corpo rigido. Ma poco importa, visto che intendiamo trascurarla del tutto. Anche i moti convettivi all'interno del Sole sono trascurabili, in quanto lentissimi.

In più, possiamo supporre che la distribuzione della materia nel Sole abbia *simmetria sferica*: non sarà esattamente vero, perché la rotazione implica certamente un certo schiacciamento, ma le osservazioni dicono che è assai piccolo. Ne possiamo anche inferire che la densità interna, a qualunque profondità, dipenda solo dalla distanza dal centro, ed è ciò che intendiamo con simmetria sferica.

* * *

È esattamente questo il problema che Schwarzschild risolve: la geometria dello spazio-tempo attorno a una distribuzione di massa statica e a simmetria sferica. E qui, anche se con misura, debbo propinarvi qualche formula...

Comincio ricopiando la formula (3) che avevo scritto nella puntata 68 per la distanza nella metrica di Minkowski, valida per lo spazio-tempo piatto della relatività ristretta:

$$S = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2. \tag{1}$$

Ricordo che qui abbiamo a che fare con due eventi generici, le cui coordinate sono rispettivamente (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x_2, y_2, z_2, t_2).

Nella stessa puntata avevo osservato che se lo spazio-tempo è curvo, è necessario riscrivere l'espressione della metrica per eventi "infinitamente vicini." Ciò vuol dire che al posto di $x_1 - x_2$ scriveremo dx, ecc.:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \tag{2}$$

La (2) usa ancora le coordinate cartesiane, cosa lecita finché lo spazio-tempo è piatto; ma niente vieta, anche in uno spazio-tempo piatto, di usare altre coordinate, per es. *polari.* La (2) si trasforma in

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\!\vartheta \, d\varphi^2 - c^2dt^2 \tag{3}$$

e questa richiede un piccolo commento, circa il significato delle tre coordinate spaziali, r, ϑ, φ.

Il significato di r è semplice: misura la distanza dell'evento dall'origine; distanza intesa nel senso puramente spaziale, ossia quella solita della geometria euclidea. Ma anche ϑ e φ non sono una novità: sono esattamente *colatitudine* e *azimut* come le avevamo intese quando abbiamo parlato della geometria sulla sfera (formula (4) della solita puntata).

Il vantaggio nell'uso delle coordinate polari sta nel fatto che queste sono le più adatte per un problema a simmetria sferica: l'espressione della metrica riesce più semplice, con meno termini e meno coefficienti; inoltre la metrica che Schwarzschild sta cercando differirà poco dalla (3), nel senso che avrà fattori correttivi che potranno dipendere soltanto da r: non dipenderanno da t perché la geometria è statica, non dipenderanno da ϑ, φ perché ha simmetria sferica.

Si può anzi dimostrare che si può sempre scrivere la metrica in modo che ci siano fattori correttivi soltanto nel primo e nell'ultimo termine. In sintesi: invece dei 10 coefficienti della metrica che si avrebbero in generale, se ne hanno soltanto 4, e di questi solo due differiscono da quelli dello spazio-tempo piatto. Inoltre i due coefficienti non banali dipendono solo dalla coordinata radiale r. Un buon esempio del fatto che sebbene la scelta delle coordinate sia arbitraria, se è fatta in modo intelligente ci può semplificare parecchio la vita. . .

Non scrivo altre formule, ma dobbiamo aver chiara una cosa: la presenza di questi due fattori correttivi fa sì che il significato fisico delle coordinate r, t sia diverso da quello per lo spazio-tempo piatto. Non potremo più essere sicuri che r misuri la distanza dall'origine, né che t indichi il tempo misurato da un orologio fermo in un punto alle coordinate r, ϑ, φ. Ne riparleremo.

L'articolo di Einstein in cui figurano le sue equazioni in una forma ancora imperfetta, come ho già scritto nella puntata 68, appare nel novembre 1915; due mesi dopo Schwarzschild pubblica la sua soluzione esatta per il caso statico a simmetria sferica. Ma la storia della "soluzione di Schwarzschild" era appena agli inizi, e prima di arrivare ai buchi neri dovevano passare altri 23 anni. Alla prossima puntata.