Cap. 2 – Regole di superselezione – Simmetrie

Raggi e stati, osservabili e operatori

Come si è detto all'inizio, a ogni stato fisico del sistema corrisponde un raggio dello spazio di Hilbert, cioè un insieme di vettori normalizzati che differiscono tra loro per un fattore di fase.

Ci si pone ora la domanda, se sia possibile far corrispondere a ogni raggio dello spazio di Hilbert uno stato fisico; poiché d'altra parte è noto che un'osservabile del sistema si descrive mediante un operatore autoaggiunto, avente cioè un insieme completo di autovettori (a parte il caso di autovettori continui sul quale avremo occasione di ritornare), ci si chiede ancora se a ogni operatore autoaggiunto definito sullo spazio di Hilbert corrisponda un'osservabile fisica.

Anzitutto è facile rendersi conto che i due precedenti problemi sono equivalenti, ossia:

$$\text{raggio} \to \text{stato} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{operatore} \to \text{osservabile}.$$

Infatti, se esiste un raggio non corrispondente a uno stato fisico, si consideri un operatore avente come unico autovettore non degenere appartenente all'autovalore λ il raggio considerato: a tale operatore non si può associare un'osservabile fisica: essa avrebbe come autovettore appartenente all'autovalore λ un vettore a cui non corrisponde uno stato fisico.

Inversamente, se tutti i raggi corrispondono a stati fisici, tutti gli operatori autoaggiunti sono osservabili fisiche: in effetti, tutti gli autovettori di ogni operatore autoaggiunto sono stati fisicamente preparabili.

Regole di superselezione

Per rispondere alla questione posta precedentemente, se cioè a ogni raggio corrisponda uno stato fisico (o, equivalentemente, se a ogni operatore autoaggiunto corrisponda un'osservabile fisica), è conveniente considerare dapprima il *commutante* $\mathcal{A}'$ dell'insieme $\mathcal{A}$ di tutte le osservabili di un sistema assegnato. Il commutante $\mathcal{A}'$ è definito come l'insieme di tutti gli operatori che commutano con tutte le osservabili del sistema. (In generale il commutante di un insieme $\mathcal{I}$ di operatori è l'insieme di tutti gli operatori che commutano con l'insieme $\mathcal{I}$.)

Mentre non è dimostrato che l'impossibilità di associare a ogni raggio uno stato fisico implichi l'esistenza di un commutante non banale, vale invece l'implicazione inversa, ossia:

Se l'insieme degli operatori che commutano con tutte le osservabili del sistema non è banale, esistono operatori autoaggiunti che non corrispondono a osservabili fisiche, o, equivalentemente, esistono raggi che non corrispondono a stati fisici.

Per la dimostrazione, si consideri l'insieme $\mathcal{A}$ delle osservabili; sia $\mathcal{A}'$ il suo commutante. Preso $A \in \mathcal{A}'$, sia C tale che $CA \neq AC$. C evidentemente non è osservabile: se lo fosse, commuterebbe con A.

Si noti che si può sempre costruire un operatore C che non commuti con un operatore A di $\mathcal{A}'$; dato infatti un vettore u non autovettore di A, si consideri il proiettore su u; esso non commuta con A.

Si vede a questo punto che la questione importante da porsi ai fini di stabilire se a ogni raggio corrisponda uno stato fisico (o l'analogo per le osservabili) consiste nell'esaminare se esista un commutante non banale, ossia se esistano operatori che commutino con tutte le osservabili del sistema.

La risposta viene dal fatto che nessuno è finora riuscito a costruire stati che non siano autostati di osservabili come la carica, il numero barionico, i numeri leptonici. Analoga situazione si ha per un altro numero quantico, l'univalenza $F = (-1)^{2S}$, dove S è lo spin del sistema. L'impossibilità di passare da uno stato a spin intero a uno a spin semintero si deduce dal richiedere che per una rotazione di 2π lo stato del sistema, cioè il raggio relativo, rimanga inalterato. Tale requisito, quanto meno ragionevole, è da mantenersi finché non si giunga a un'esperienza in contrario, anche se a priori è del tutto impossibile prevedere se in realtà una rotazione di 2π debba lasciare inalterato qualsiasi sistema.

Possiamo dunque concludere che l'esistenza di un insieme $\mathcal{A}'$ non banale dipende essenzialmente dall'evidenza sperimentale su determinati numeri quantici. In particolare è noto che per i numeri leptonici l'evidenza sperimentale è assai meno forte che ad es. per la carica ed il numero barionico.

Le osservabili che risultano commutare con tutte le osservabili del sistema si dicono "superconservate" e si parla di regole di "superselezione." Queste regole vietano l'esistenza dei corrispondenti fisici di alcuni raggi, e perciò impediscono la sovrapposizione di stati appartenenti ad autovalori diversi delle osservabili superconservate; ciò si può esprimere anche dicendo che la fase relativa della sovrapposizione non è osservabile; è del pari evidente che un insieme con carica, numero barionico o univalenza non definiti può essere soltanto una miscela statistica di stati a numeri quantici superconservati definiti. [2]

Si noti che in quanto esposto sopra si è tacitamente ammesso che l'insieme $\mathcal{A}'$ sia un insieme di osservabili, e che quindi i suoi elementi commutino tra loro. Si potrebbe anche pensare d'introdurre un insieme commutante più vasto, formato non di sole osservabili, ma anche di altri operatori che commutano con tutte le osservabili del sistema; in tal caso non tutti gli elementi del commutante commuterebbero tra loro. Tale estensione dell'insieme $\mathcal{A}'$ impedisce però, come si vedrà tra poco, alcuni sviluppi della teoria, ed è inoltre in contrasto con gli assiomi fondamentali, come è stato dimostrato da Borchers. [3]

Limitandosi a un commutante composto di osservabili, che quindi commutano tra loro, segue la possibilità di decomporre lo spazio di Hilbert del sistema in somma diretta di sottospazi coerenti, ciascuno con autovettori definiti delle osservabili superconservate. Così, all'interno di questi sottospazi coerenti vale un principio di sovrapposizione incondizionato, che invece non vale considerando tutto lo spazio di Hilbert.

Tra i diversi sottospazi è impossibile avere una qualunque transizione, dal momento che ogni interazione commuta con gli operatori superconservati, i cui autovalori caratterizzano i vari sottospazi coerenti.

Esempi: spin isotopico, coniugazione di carica

Prima di lasciare questo argomento, soffermiamoci ancora su due esempi.

Consideriamo una teoria invariante per trasformazioni di spin isotopico: dati i tre operatori T_1, T_2, T_3 sappiamo che T_3 è essenzialmente la carica, che è un'osservabile superconservata. Dunque $T_3 \in \mathcal{A}$; $T_3 \in \mathcal{A}'$. Gli operatori T_1 e T_2 non commutano con T_3; dunque non sono superconservati, e per lo stesso motivo non sono nemmeno osservabili: T_3 infatti, essendo superconservato, deve commutare con tutte le osservabili del sistema. Si vede allora che la superconservazione di una componente dello spin isotopico non permette che le altre due componenti, pure essenziali per lo sviluppo della teoria, corrispondano a osservabili fisiche.

Una situazione leggermente diversa si presenta per l'operazione di coniugazione di carica C. In generale, C manda un sottospazio coerente a carica e numero barionico definito nell'altro sottospazio a carica e numero barionico opposti, e quindi, dalla superconservazione della carica e del numero barionico segue che C non è osservabile. Poiché d'altra parte C manda il sottospazio a carica e numero barionico nulli in se stesso, possiamo asserire che la restrizione di C al sottospazio (coerente) a carica e numero barionico nulli è osservabile.

Simmetrie e invarianze

Introduciamo a questo punto il concetto di simmetria in una teoria di campo. Per simmetria (o invarianza) s'intende una corrispondenza biunivoca tra gli stati che conserva le probabilità di transizione. Tale definizione può presentare delle difficoltà nel caso di trasformazioni relativistiche, e un'indagine più minuziosa potrebbe mettere in dubbio il requisito che le probabilità di transizione si debbano conservare nel caso di trasformazioni relativistiche.

Nella nostra trattazione ci limiteremo tuttavia ad accettare le definizione di simmetria che si è data sopra senza ulteriore discussione.

Teorema di Wigner

Quando sia data una simmetria, ossia una trasformazione biunivoca tra i raggi dello spazio di Hilbert tale da lasciare inalterato il modulo quadrato del prodotto scalare tra due vettori arbitrari, sorge spontanea la domanda se tale trasformazione si possa descrivere mediante operatori sullo spazio di Hilbert.

Sussiste in proposito il *teorema di Wigner* [4] il quale asserisce che ogni trasformazione tra i raggi unitari tale che, dati

$$\begin{aligned}
&V_1, V_2 \quad \text{raggi unitari arbitrari} \\
&V_1 = \{v_1 e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\} \quad ||v_1|| = 1 \\
&V_2 = \{v_2 e^{i\psi}, \psi \in \mathbb{R}\} \quad ||v_2|| = 1
\end{aligned}$$

sia

$$\begin{aligned}
V_1 \mapsto V_1' &= \{v_1' e^{i\sigma}, \sigma \in \mathbb{R}\} \qquad ||v_1'|| = 1 \\
V_2 \mapsto V_2' &= \{v_2' e^{i\tau}, \tau \in \mathbb{R}\} \qquad ||v_2'|| = 1
\end{aligned}$$

con

$$|(v_1', v_2')|^2 = |(v_1, v_2)|^2$$

è esprimibile mediante una trasformazione U unitaria oppure mediante una trasformazione A antiunitaria, in entrambi i casi determinata a meno di un fattore di fase.

Si ricordi che una trasformazione U si dice unitaria se esiste l'inversa U^{-1} e $(f, g) = (Uf, Ug)$, mentre una trasformazione A si dice antiunitaria se esiste A^{-1} e $(f, g) = (Ag, Af)$, con f, g, vettori arbitrari dello spazio di Hilbert.

A questo punto ci si accorge però che la definizione che si è data di simmetria è insufficiente dal punto di vista fisico: infatti se, per definizione, simmetria è ogni corrispondenza tra stati che conserva la probabilità di transizione, poiché vale il teorema di Wigner, segue che assegnare una trasformazione unitaria nello spazio di Hilbert equivale ad assegnare una simmetria.

In effetti la definizione data sopra di simmetria non stabilisce la legge di trasformazione per le osservabili, che invece bisogna assegnare in primo luogo per la sua interpretazione fisica.

Per poter parlare di simmetria dobbiamo anzitutto conoscere la legge di trasformazione delle osservabili, vedere poi se a tale legge corrisponda una trasformazione tra stati che conservi le probabilità di transizione: se tale trasformazione esiste, possiamo dire che ci troviamo di fronte a una simmetria o invarianza, e possiamo applicare il teorema di Wigner con le conseguenze che ne derivano per le rappresentazioni della simmetria stessa.

Come esempio consideriamo un sistema descritto da due variabili canoniche p e q, ad esempio una particella di spin zero in un dato campo di forze, e la trasformazione "inversione spaziale."

La legge di trasformazione è assegnata se imponiamo

$$p'(t) = -p(t) \qquad q'(t) = -q(t)$$

ed è necessario notare esplicitamente che la legge di trasformazione per le osservabili dev'essere assegnata *per ogni istante t*.

Possiamo allora cercare una corrispondenza tra stati che conservi la probabilità di transizione, e poi, grazie al teorema di Wigner, esprimere tale trasformazione mediante un operatore definito sullo spazio di Hilbert, e determinato a meno di un fattore di fase. Può però darsi che una tale corrispondenza, e perciò l'operatore unitario, non esista: ciò dipende dalle proprietà dinamiche del sistema.

Per illustrare il fatto che assegnata una corrispondenza tra stati che conservi le probabilità di transizione, essa non è sufficiente per l'interpretazione fisica, si consideri ancora l'esempio della trasformazione "inversione spaziale" per un sistema in cui tra le variabili dinamiche vi sia anche la carica Q; in tale caso è necessario dire come si trasforma la carica per inversioni spaziali; la convenzione ordinaria è $Q' = Q$; però può darsi che la trasformazione così definita non sia una trasformazione d'invarianza, mentre si può avere invarianza con $Q' = -Q$.

La scelta della legge di trasformazione per Q tale che la teoria risulti invariante dipende dalla dinamica del sistema.

Gruppi di simmetrie

Si osservi ora che date più trasformazioni di simmetria è del tutto naturale costruirne il "prodotto," cioè eseguirle una di seguito all'altra. Possiamo allora dotare l'insieme delle simmetrie di una struttura, e non è difficile rendersi conto che tale struttura soddisfa agli assiomi di gruppo. Con l'introduzione dei gruppi di simmetria si ha il vantaggio di poter utilizzare una grande quantità di proprietà formali proprie delle strutture algebricamente chiuse, particolarmente per quello che riguarda la teoria delle rappresentazioni.

Torniamo ora al teorema di Wigner, che come si è già detto permette di rappresentare una trasformazione di simmetria mediante un operatore unitario o uno antiunitario (definiti univocamente a meno di un fattore di fase).

È evidente che se consideriamo un gruppo di trasformazioni di simmetria, possiamo considerare, grazie al teorema di Wigner, il gruppo isomorfo dei corrispondenti operatori (unitari o antiunitari).

Rappresentazioni di gruppi connessi; operatori antiunitari

Ci chiediamo ora in quali casi ci possiamo limitare a considerare rappresentazioni unitarie di tale gruppo, escludendo cioè gli operatori antiunitari. Prendendo in esame esclusivamente gruppi topologici, risulta chiaro che un gruppo connesso non ammette rappresentazioni in cui entrino operatori antiunitari: infatti, si osservi anzitutto che all'unità del gruppo deve corrispondere l'operatore identità della rappresentazione, che è banalmente unitario; si consideri poi un elemento del gruppo rappresentato da un operatore antiunitario: tale elemento non può trovarsi nella componente connessa dell'unità poiché non è possibile costruire una linea fatta tutta di punti del gruppo avente per estremi l'unità e l'elemento considerato: e ciò essenzialmente perché l'operazione di coniugazione complessa è discreta; un gruppo non connesso è invece costituito da più componenti connesse, ma non connesse tra loro; ciascuna componente è rappresentata da operatori unitari oppure antiunitari; in particolare la componente connessa dell'unità è rappresentata da operatori unitari.

Questa non è però l'unica restrizione all'uso di operatori antiunitari, e su questo problema avremo occasione di tornare più avanti.

Rappresentazioni equivalenti

Prima di concludere questa parte di carattere generale sulle simmetrie e le loro rappresentazioni, facciamo ancora una considerazione sul concetto di rappresentazioni equivalenti di un gruppo.

Nella teoria matematica nelle rappresentazioni, due rappresentazioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ denotano gli insiemi di operatori delle due rappresentazioni) si dicono equivalenti se esiste una trasformazione M non singolare tale che $\mathcal{B} = M\mathcal{A}M^{-1}$.

Nel considerare le applicazioni fisiche dobbiamo osservare che l'equivalenza matematica delle rappresentazioni non si traduce necessariamente in equivalenza fisica: ad esempio consideriamo l'ordinaria rappresentazione di Dirac per il gruppo di Lorentz omogeneo: è noto che partendo da tale rappresentazione si può arrivare, mediante la trasformazione di Foldy [5], a una rappresentazione matematicamente equivalente, dove però gli operatori hanno un'interpretazione fisica sostanzialmente diversa.

Anche in questo fatto, come pure in quello che si è detto a proposito della definizione d'invarianza, si può ravvisare l'importanza essenziale che rivestono le osservabili ai fini dell'interpretazione fisica. Per dare cioè un significato fisico a qualsiasi operazione (formale) che viene eseguita sul sistema, dobbiamo assegnare l'effetto di tali operazioni sulle osservabili.