Cap. 3 – Il gruppo di Lorentz

Il gruppo di Lorentz inomogeneo o gruppo di Poincaré

La teoria di campo che andiamo sviluppando è una teoria relativistica; ciò significa che ammette invarianza relativistica. Dal punto di vista formale ciò si traduce nell'assumere che nello spazio di Hilbert sia definita una rappresentazione (unitaria) del gruppo di Poincaré.

Per la definizione del gruppo di Poincaré [6] consideriamo lo spazio dei 4-vettori x^λ $(\lambda = 0, 1, 2, 3)$ con la metrica

$$G_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}; \qquad G^2 = E; \qquad G^{\mathrm{T}} = G$$

(E è la matrice identità).

Il gruppo di Poincaré $\mathcal{P}$ è costituito dalle trasformazioni che lasciano invariato $(x-y)^2$ (si ricordi che $x^2 = x^\lambda x_\lambda$; $x_\lambda = G_{\lambda\mu} x^\mu$). Ciò implica

$$\bar{x}^\lambda = \Lambda^\lambda{}_\mu \, x^\mu + a^\lambda.$$

Un elemento generico del gruppo si scrive (a, Λ), e la legge di composizione si esprime

$$(a', \Lambda') \circ (a, \Lambda) = (\Lambda' a + a', \Lambda' \Lambda).$$

Il gruppo di Lorentz

Consideriamo gli elementi $\mathcal{T} = (a, I)$; essi formano un sottogruppo invariante abeliano. Se consideriamo $\mathcal{P}/\mathcal{T}$ risulta $\mathcal{P}/\mathcal{T} = \{(0, \Lambda)\} = \mathcal{L}$: $\mathcal{L}$ si chiama gruppo di Lorentz omogeneo. Ciò si esprime dicendo anche che il gruppo di Poincaré è il prodotto semidiretto del sottogruppo invariante abeliano delle traslazioni e del sottogruppo di Lorentz omogeneo.

Si ricordi che un gruppo $\mathcal{G}$ è prodotto diretto di due suoi sottogruppi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ se $\forall g \in \mathcal{G}$ esiste un solo $a \in \mathcal{A}$ e un solo $b \in \mathcal{B}$ tali che

$$g = ab \quad \text{e} \quad \forall a \in \mathcal{A},\ \forall b \in \mathcal{B} : ab = ba.$$

Un gruppo $\mathcal{G}$ è prodotto semidiretto di due sottogruppi $\mathcal{N}$ e $\mathcal{C}$ se:

1) $\mathcal{N}$ è sottogruppo invariante di $\mathcal{G}$
2) $\mathcal{C}$ è isomorfo a $\mathcal{G}/\mathcal{N}$
3) $\forall g \in \mathcal{G}$ esiste un solo $n \in \mathcal{N}$ e un solo $c \in \mathcal{C}$ tali che $g = nc$.

Riassumiamo di seguito le principali proprietà del gruppo di Lorentz omogeneo, definito come il gruppo delle trasformazioni Λ nello spazio dei 4-vettori con la metrica data sopra, tali da lasciare invariato x^2:

1) Λ è reale
2) $G \Lambda G = \left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

Dunque Λ e $\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ sono equivalenti; $\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ è la matrice di trasformazione per i vettori covarianti:

$$\bar{x}_\mu = \left[\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right]_\mu^{\ \nu} x_\nu .$$

Sottogruppi del gruppo di Lorentz

Sussistono inoltre gli omomorfismi

$$\begin{aligned}
\delta &: \Lambda \mapsto ||\Lambda|| \\
\sigma &: \Lambda \mapsto \operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0 \\
\varrho &: \Lambda \mapsto ||\Lambda|| \operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0 .
\end{aligned}$$

Consideriamone i nuclei, che com'è noto sono dei sottogruppi invarianti:

$$\begin{aligned}
\ker \delta &= \mathcal{L}_+ : \text{ gruppo di Lorentz proprio} \\
\ker \sigma &= \mathcal{L}^\uparrow : \text{ gruppo di Lorentz ortocrono} \\
\ker \varrho &= \mathcal{L}_\mathrm{o} : \text{ gruppo di Lorentz ortocoro.}
\end{aligned}$$

È immediato rendersi conto che il gruppo di Lorentz proprio $\mathcal{L}_+$ è costituito dalle matrici a determinante $+1$, che descrivono le trasformazioni di Lorentz che lasciano invariato l'elemento di volume 4-dimensionale. Il gruppo di Lorentz ortocrono $\mathcal{L}^\uparrow$ è invece costituito dalle matrici che lasciano invariato il segno della componente ^{0} di ogni 4-vettore temporale, o, come si dice, conservano il verso del tempo. Il gruppo di Lorentz ortocoro $\mathcal{L}_\mathrm{o}$ è costituito dalle trasformazioni di Lorentz che lasciano invariato il segno dell'elemento di volume spaziale.

Proprietà dello Jacobiano relativo a trasformazioni di Lorentz

Quest'ultima affermazione diviene evidente tenendo conto della proprietà che la matrice Jacobiana "spaziale" $J^i{}_k$, relativa a una trasformazione di Lorentz, ha determinante uguale a $||\Lambda||/\Lambda^0{}_0$; cioè che

$$\|J^i{}_k\| = \left\| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right\| = \frac{||\Lambda||}{\Lambda^0{}_0} .$$

Prima di dimostrare tale proprietà, è necessario osservare che lo Jacobiano va calcolato tenendo presente che nel sistema accentato le coordinate vanno prese a tempi uguali, il che equivale a richiedere $dx'^0 = 0$. In generale si può scrivere:

$$dx'^i = \Lambda^i{}_\mu \, dx^\mu = \Lambda^i{}_0 \, dx^0 + \Lambda^i{}_k \, dx^k$$

e analogamente:

$$dx'^0 = \Lambda^0{}_\mu\, dx^\mu = \Lambda^0{}_0\, dx^0 + \Lambda^0{}_k\, dx^k$$

$$dx'^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad dx^0 = -\frac{\Lambda^0{}_k}{\Lambda^0{}_0}\, dx^k$$

da cui

$$dx'^i = \left(\Lambda^i{}_k - \frac{\Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_k}{\Lambda^0{}_0}\right) dx^k. \tag{3–1}$$

Il determinante $||\Lambda||$ si può scrivere come:

$$||\Lambda|| = \begin{vmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_k \\ \Lambda^i{}_0 & \Lambda^i{}_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_k \\ 0 & \Lambda^i{}_k - \dfrac{\Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_k}{\Lambda^0{}_0} \end{vmatrix} = \Lambda^0{}_0 \left\| \Lambda^i{}_k - \frac{\Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_k}{\Lambda^0{}_0} \right\|$$

da cui, tenendo conto che dalla (3–1) risulta che la matrice Jacobiana spaziale è

$$J^i{}_k = \Lambda^i{}_k - \frac{\Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_k}{\Lambda^0{}_0}$$

segue la tesi.

Dalla proprietà dimostrata segue allora che le trasformazioni che lasciano inalterato il segno dell'elemento di volume spaziale sono quelle con $||\Lambda|| = 1$ e $\Lambda^0{}_0$ positivo, oppure quelle con determinante -1 e $\Lambda^0{}_0$ negativo.

Introducendo gli insiemi complementari a $\mathcal{L}_+$ e $\mathcal{L}^\uparrow$ rispettivamente:

$$\mathcal{L}_- = \mathcal{L} - \mathcal{L}_+ \qquad \mathcal{L}^\downarrow = \mathcal{L} - \mathcal{L}^\uparrow$$

e le intersezioni

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^\uparrow \qquad \mathcal{L}_-^\uparrow = \mathcal{L}_- \cap \mathcal{L}^\uparrow \qquad \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^\downarrow \qquad \mathcal{L}_-^\downarrow = \mathcal{L}_- \cap \mathcal{L}^\downarrow$$

si può affermare che $\mathcal{L}_\mathrm{o} = \mathcal{L}_\mathrm{o}^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$, e nel contempo giustificare l'affermazione fatta più sopra a proposito di $\mathcal{L}_\mathrm{o}$, definito come nucleo dell'omomorfismo $\varrho : \Lambda \mapsto ||\Lambda|| \operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0$.

Ritornando ora ai sottoinsiemi $\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_-^\uparrow$, $\mathcal{L}_+^\downarrow$, $\mathcal{L}_-^\downarrow$, è facile rendersi conto che ciascuno di tali insiemi (detti anche "falde") non è connesso agli altri; perché il segno del determinante può essere solo $+1$ oppure -1, da cui si deduce che gli insiemi col segno $+$ sono sconnessi da quelli col segno $-$; d'altra parte il fatto che $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$ porta a concludere che anche le falde contrassegnate con $\uparrow$ sono sconnesse da quelle contrassegnate con $\downarrow$.

Di tali insiemi, solamente $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è un sottogruppo, detto gruppo di Lorentz ortocrono proprio, e ci si può senza difficoltà convincere che è un sottogruppo invariante non banale (non si riduce all'identità né a uno dei due sottogruppi di cui è intersezione). Possiamo ancora esprimere gli altri sottogruppi del gruppo di Lorentz in termini di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_-^\uparrow$, $\mathcal{L}_+^\downarrow$, $\mathcal{L}_-^\downarrow$; i risultati sono riassunti nella seguente tabella:

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \qquad \mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \qquad \mathcal{L}_o = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow .$$

Se consideriamo il gruppo quoziente $\mathcal{L}/\mathcal{L}_+^\uparrow$, esso è costituito dai quattro elementi T, I, IT, E, dove $T = -G = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, $I = G$ rappresentano rispettivamente le matrici d'inversione del tempo e dello spazio.

Poiché il gruppo di Lorentz è un gruppo di Lie, è lecito cercarne una parametrizzazione. Già da un esame non approfondito ci si attende che un elemento generico del gruppo di Lorentz omogeneo sia caratterizzato da sei parametri: infatti il gruppo deve descrivere rotazioni tridimensionali, dipendenti da tre parametri; d'altra parte la velocità, che caratterizza le trasformazioni di Lorentz, è un vettore, e quindi dipende da tre parametri. Dunque la supposizione di avere sei parametri è quanto meno plausibile.

Algebra di Lie del gruppo di Lorentz

Esprimiamo ora la generica matrice Λ in forma esponenziale: $\Lambda = e^{\Omega G}$ dove Ω è una matrice 4×4 reale; G è il tensore metrico definito più sopra. Notiamo però che non tutte le matrici del gruppo di Lorentz si possono esprimere in tale forma: infatti, presa una matrice Λ': $||\Lambda'|| = -1$, ed essendo $||e^{\Omega G}|| = e^{\mathrm{Tr}(\Omega G)}$, è immediato vedere che non esiste una matrice Ω' reale tale che $\Lambda' = e^{\Omega' G}$.

Si può anzi dimostrare che le matrici che si possono porre nella forma esponenziale $e^{\Omega G}$ sono tutte e sole le matrici del sottogruppo ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Consideriamo ora la $G\Lambda G = \left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$. Tale relazione è compatibile con $\Lambda = e^{\Omega G}$ se $\Omega^{\mathrm{T}} = -\Omega$. Infatti la $G\Lambda G = \left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ si traduce in

$$G\, e^{\Omega G} G = e^{-(\Omega G)^{\mathrm{T}}}$$

ossia

$$e^{G\Omega} = e^{-G\Omega^{\mathrm{T}}}.$$

Evidentemente

$$\Omega^{\mathrm{T}} = -\Omega \quad \Longrightarrow \quad e^{G\Omega} = e^{-G\Omega^{\mathrm{T}}}$$

mentre l'implicazione inversa è valida solo localmente.

Dal fatto che una generica matrice del gruppo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ si può parametrizzare mediante matrici 4×4 reali antisimmetriche, dipendenti dunque da sei parametri, si trova conferma all'affermazione fatta sopra a proposito del numero di parametri che caratterizzano una trasformazione di Lorentz.

Facciamo a questo punto per Ω la seguente posizione:

$$\Omega = -\tfrac{i}{2}\, \omega_{\lambda\mu} M^{\lambda\mu}. \tag{3–2}$$

Le matrici $M^{\lambda\mu}$ sono i generatori infinitesimi del gruppo e costituiscono una base nell'algebra di Lie del gruppo stesso.

Si noti che la i nella (3–2) è stata introdotta per pura convenienza ai fini di ottenere, come si vedrà più innanzi, rappresentazioni unitarie del gruppo, e non vuol significare che l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz sia complessa.

Relazioni di commutazione per i generatori del gruppo

Possiamo ora considerare il gruppo di Lorentz in astratto, indipendentemente cioè dalla particolare realizzazione per mezzo delle matrici Λ. Questo ci suggerisce di scrivere per il generico elemento del gruppo astratto, $\ell(\omega)$:

$$\ell(\omega) = \exp\left(-\tfrac{i}{2}\,\omega_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu}\right).$$

Per ottenere le relazioni di commutazione tra i generatori del gruppo, consideriamo i suoi automorfismi interni, cioè le trasformazioni associate a ogni elemento $\ell(\omega')$ del gruppo, che applicate a un generico elemento $\ell(\omega'')$ lo trasformano nel modo seguente:

$$\ell(\omega'') \mapsto \ell(\omega) = \ell(\omega')\,\ell(\omega'')\,\ell(\omega')^{-1}.$$

In termini di generatori, e limitandosi al secondo ordine,

$$\begin{aligned}\ell(\omega) = \Big(1 - \tfrac{i}{2}\,(\omega' M) - \tfrac{1}{8}\,(\omega' M)^2\Big)& \\ \Big(1 - \tfrac{i}{2}\,(\omega'' M) - \tfrac{1}{8}\,(\omega'' M)^2\Big)&\Big(1 + \tfrac{i}{2}\,(\omega' M) - \tfrac{1}{8}\,(\omega' M)^2\Big).\end{aligned} \tag{3–3}$$

D'altra parte si può anche scrivere

$$\ell(\omega) = 1 - \tfrac{i}{2}\,(\omega M) - \tfrac{1}{8}\,(\omega M)^2. \tag{3–4}$$

Dal confronto della (3–3) con la (3–4) dedurremo le relazioni di commutazione tra i generatori.

Eseguiamo lo sviluppo della (3–3); se ci limitiamo al primo ordine, otteniamo semplicemente $\ell(\omega) = 1 - \frac{i}{2}\,(\omega'' M)$ e il confronto con la (3–4) fornisce solamente

$$\omega''_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}$$

e quindi $\omega = \omega''$ che non è significativo per il nostro scopo.

Al secondo ordine entrano i termini in $(\omega')^2$, $(\omega'')^2$, $\omega'\omega''$, ed è evidente che siamo essenzialmente interessati al termine in $\omega'\omega''$.

Il termine in $(\omega')^2$ è indipendente da ω'', quindi dà lo stesso contributo che darebbe con $\omega'' = 0$, ed essendo $\ell(\omega')\,\ell(\omega')^{-1} = 1$, è chiaro che $(\omega')^2$ non dà alcun contributo allo sviluppo di (3–3).

Il termine in $(\omega'')^2$ è a sua volta indipendente da ω', e quindi, con un ragionamento analogo a quello fatto sopra, dà come contributo al prodotto il termine $-\frac{1}{8}(\omega'' M)^2$.

Con un semplice calcolo si trova poi che il contributo allo sviluppo del termine in $\omega'\omega''$ è

$$-\tfrac{1}{4}\,\omega'_{\lambda\mu}\,\omega''_{\nu\varrho}\,[M^{\lambda\mu}, M^{\nu\varrho}].$$

Riassumendo:

$$\ell(\omega) = 1 - \tfrac{i}{2}\,\omega''_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4}\,\omega'_{\lambda\mu}\,\omega''_{\nu\varrho}\,[M^{\lambda\mu}, M^{\nu\varrho}] - \tfrac{1}{8}\big(\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}\big)^2$$

e dal confronto con la (3–4) otteniamo, a meno di termini di ordine maggiore o uguale al terzo

$$(\omega_{\alpha\beta} - \omega''_{\alpha\beta})\, M^{\alpha\beta} = -\tfrac{i}{2}\,\omega'_{\lambda\mu}\omega''_{\nu\varrho}\,[M^{\lambda\mu}, M^{\nu\varrho}]. \tag{3–5}$$

Ripetiamo ora lo stesso procedimento per la realizzazione del gruppo mediante le matrici Λ:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\sigma}{}_{\varrho}(\omega') &= \delta^{\sigma}{}_{\varrho} + (\omega')^{\sigma}{}_{\varrho} + \tfrac{1}{2}\Big[(\omega')^2\Big]^{\sigma}{}_{\varrho} \\ \Lambda^{\tau}{}_{\chi}(\omega'') &= \delta^{\tau}{}_{\chi} + (\omega'')^{\tau}{}_{\chi} + \tfrac{1}{2}\Big[(\omega'')^2\Big]^{\tau}{}_{\chi}. \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}(\omega) = \big(\Lambda(\omega')\Lambda(\omega'')\Lambda^{-1}(\omega')\big)^{\lambda}{}_{\mu} = \delta^{\lambda}{}_{\mu} + (\omega'')^{\lambda}{}_{\mu} + [\omega', \omega'']^{\lambda}{}_{\mu}.$$

Ne segue

$$(\omega - \omega'')^{\lambda}{}_{\mu} = (\omega')^{\lambda}{}_{\nu}\,(\omega'')^{\nu}{}_{\mu} - (\omega'')^{\lambda}{}_{\nu}\,(\omega')^{\nu}{}_{\mu}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} (\omega - \omega'')_{\alpha\beta} &= \omega'_{\alpha\sigma} G^{\sigma\tau} \omega''_{\tau\beta} - \omega''_{\alpha\sigma} G^{\sigma\tau} \omega'_{\tau\beta} \\ &= \omega'_{\lambda\mu}\,\omega''_{\nu\varrho}\,(\delta^{\lambda}_{\alpha}\,\delta^{\mu}_{\sigma}\,G^{\sigma\tau}\delta^{\nu}_{\tau}\,\delta^{\varrho}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\varrho}_{\sigma}\,G^{\sigma\tau}\delta^{\lambda}_{\tau}\,\delta^{\mu}_{\beta}) \\ &= \omega'_{\lambda\mu}\,\omega''_{\nu\varrho}\,(\delta^{\lambda}_{\alpha}\,\delta^{\varrho}_{\beta}\,G^{\mu\nu} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\mu}_{\beta}\,G^{\lambda\varrho}). \end{aligned}$$

Inserendo tale valore nella (3–5) si ricava:

$$\omega'_{\lambda\mu}\,\omega''_{\nu\varrho}\,[M^{\lambda\mu}, M^{\nu\varrho}] = 2i\,\omega'_{\lambda\mu}\,\omega''_{\nu\varrho}\,M^{\alpha\beta}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\,\delta^{\varrho}_{\beta}\,G^{\mu\nu} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\mu}_{\beta}\,G^{\lambda\varrho}).$$

Essendo tale relazione valida per ogni ω', ω'', si sarebbe indotti a scrivere:

$$[M^{\lambda\mu}, M^{\nu\varrho}] = 2i\,(M^{\lambda\varrho}G^{\mu\nu} - M^{\nu\mu}G^{\lambda\varrho}) = 2i\,(M^{\lambda\varrho}G^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}G^{\lambda\varrho}).$$

Tale relazione però non è corretta, per il fatto che, essendo ω' e ω' antisimmetrici rispetto ai propri indici, l'uguaglianza sopra scritta vale solamente per le parti antisimmetriche di entrambi i membri. Ora il membro a sinistra è già antisimmetrico in (λ, μ), (ν, ϱ); antisimmetrizzando il membro destro otteniamo:

$$[M^{\lambda\mu}, M^{\nu\varrho}] = i\,(M^{\lambda\varrho}G^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}G^{\lambda\varrho} - M^{\mu\varrho}G^{\lambda\nu} - M^{\lambda\nu}G^{\mu\varrho})$$

che fornisce le note relazioni di commutazione per i generatori del gruppo di Lorentz.

Consideriamo il gruppo di Lorentz ancora una volta in astratto; mediante un automorfismo interno associato a un elemento arbitrario $\ell(\omega)$ ogni altro elemento si trasforma:

$$\ell(\omega') \mapsto \ell(\omega)\,\ell(\omega')\,\ell(\omega)^{-1}. \tag{3–6}$$

È immediato che l'insieme degli automorfismi di un gruppo $\mathcal{G}$ può essere dotato di struttura di gruppo, ed è facile verificare che il gruppo degli automorfismi interni di $\mathcal{G}$ è omomorfo a $\mathcal{G}$ (isomorfo se e solo se $\mathcal{G}$ non ha centro).

Ora ad ogni automorfismo interno corrispondente ad es. all'elemento $\ell(\omega)$ del gruppo astratto di Lorentz corrisponde una trasformazione lineare nell'algebra di Lie; detto infatti $\Omega = \omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}$ un generico elemento dell'algebra, all'automorfismo interno (3–6) resta associata la trasformazione

$$[M^{\lambda\mu}, \Omega] = [M^{\lambda\mu}, M^{\alpha\beta}]\,\omega_{\alpha\beta}$$

ossia

$$[M^{\lambda\mu}, \Omega] = 2i\,(\omega^{\lambda}{}_{\nu}M^{\nu\mu} - \omega^{\mu}{}_{\nu}M^{\nu\lambda}) \tag{3–7}$$

(si tenga conto che $\omega_{\alpha}{}^{\beta} = -\omega^{\beta}{}_{\alpha}$).

Possiamo allora stabilire un omomorfismo tra il gruppo e le trasformazioni lineari nell'algebra di Lie sopra descritte; otteniamo cioè una rappresentazione che si chiama rappresentazione aggiunta.

La riducibilità della rappresentazione aggiunta equivale all'esistenza di un sottogruppo invariante del gruppo. Per il gruppo di Lorentz la rappresentazione aggiunta ha per base elementi del tipo $M^{\lambda\mu}$ che, come risulta dalla (3–7), obbediscono alla legge di trasformazione propria dei tensori antisimmetrici 4×4.

Poiché lo spazio di tali tensori non ha sottospazi invarianti, segue che la rappresentazione aggiunta è irriducibile, da cui segue che il gruppo di Lorentz non possiede sottogruppi invarianti, cioè è semplice.