Cap. 11 – Proprietà di analiticità delle funzioni di Wightman; il teorema di Haag

Un teorema per le funzioni $\mathcal{W}$ a due campi

Dimostreremo, come caso particolare del teorema (4.17) di [14]:
Le funzioni di Wightman a due campi sono univocamente determinate dai valori che assumono a un tempo fissato.(1)

Sia $(\Omega, A(x)B(y)\,\Omega) = \mathcal{W}(x,y)$ una generica funzione di Wightman a due campi; dobbiamo dimostrare che essa è univocamente determinata da

$$(\Omega, A(\vec{x}, x^0)B(\vec{y}, x^0)\,\Omega).$$

Posto $y - x = \xi$, grazie alle considerazioni di pag. 8–6 possiamo limitarci alla funzione $W(\xi)$. La nostra tesi si riconduce così a provare che se $W(\xi)$ è nota sul piano $\xi^0 = 0$, è nota per tutti gli ξ. Scrivendo:

$$A(x) = U(x,1)A(0)\,U(x,1)^+; \quad B(y) = U(y,1)B(0)\,U(y,1)^+$$

si ha:

$$\mathcal{W}(x,y) = W(x-y) = W(\xi) = (\Omega, A(0)\,U(\xi,1)B(0)\,\Omega).$$

Sfruttando la proprietà di decomposizione spettrale per gli operatori di traslazione $U(\xi,1)$ (pag. 8–2), si ottiene:

$$W(\xi) = \int \exp(i\,p\,\xi)(\Omega, A(0)\,dE(p)\,B(0)\,\Omega). \tag{11–1}$$

Poiché l'espressione $(\Omega, A(0)\,dE(p)\,B(0)\,\Omega)$ è una misura, il membro destro della (11–1) ha senso, e perché l'integrale esista basta che l'integrando sia limitato, cioè

$$\Im(p\,\xi) > 0. \tag{11–2}$$

La condizione (11–2) mostra che all'integrale che compare nella (11–1) si può dare un senso anche se il 4-vettore ξ viene esteso al campo complesso, cioè se si pone $\xi = u{+}iv$. L'integrale per $v = 0$ risulta in generale una distribuzione, limite delle funzioni $W(u+iv)$ per $v \to 0$. Poiché inoltre (pag. 8–6) W è una funzione degli invarianti relativistici di $\mathcal{P}_+^\uparrow$, possiamo porre $W(\xi) = F(z)$, con $z = \xi^2$.

Il fatto, già accennato a pag. 8–6, che per un dato ξ^2 la funzione W assume valore costante fuori del cono di luce, ma che ciò non accade per uno stesso ξ^2

(1) Nella trattazione che daremo di questo problema considereremo le $\mathcal{W}$ come semplici funzioni anziché come distribuzioni.

quando ξ appartiene a coni di luce opposti, non impedisce di definire $W(\xi)$ come funzione F di z; F risulterà una funzione (analitica) a più valori.

Notiamo ora che la (11–2) con la notazione $\xi = u + iv$ si scrive:

$$p\,v > 0 \quad \forall p \in \bar{V}^+$$

il che equivale a

$$v \in V^+.$$

Cerchiamo i punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\xi^2 = z \qquad v = \Im\xi \in V^+ \tag{11–3}$$

È facile rendersi conto che tale insieme non può comprendere il semiasse reale positivo $\mathbb{R}^+$ (origine inclusa): la $\xi^2 = z$ implicherebbe in tal caso $\xi \in \mathbb{R}$, e quindi $\Im\xi = 0 \notin V^+$. Come esercizio si può verificare che tutti i punti di $\mathbb{C}-\mathbb{R}^+$ soddisfano le (11–3).

Il limite di $F(z)$ per z reale con $v \in V^+$ si ottiene come segue:

(i) se si fa tendere il 4-vettore complesso ξ a un 4-vettore reale esterno al cono di luce, nel piano complesso z il semiasse reale negativo viene raggiunto eseguendo il passaggio al limite con $\Im z$ qualunque;

(ii) se si fa tendere ξ a un 4-vettore reale $u \in V^+$, nel piano complesso z il semiasse reale positivo viene raggiunto eseguendo il passaggio al limite con $\Im z > 0$;

(iii) se si fa tendere ξ a un 4-vettore reale $u \in V^-$, nel piano complesso z il semiasse reale positivo viene raggiunto eseguendo il limite con $\Im z < 0$.

È allora chiaro che, conosciuto il valore di $W(\xi)$ per $\xi^0 = 0$, la $F(z) = W(\xi)$ risulta conosciuta sul semiasse reale negativo $\mathbb{R}^-$, e quindi è nota su tutto il piano complesso: si può perciò anche determinare il limite su $\mathbb{R}^+$. ∎

Proprietà delle funzioni di Wightman come funzioni analitiche

Proseguiamo ora con alcune considerazioni sulle proprietà delle funzioni di Wightman a due campi come funzioni analitiche di $z = \xi^2$; $\xi = y - x$. Sia

$$(\Omega, A(x)B(y)\Omega) = W_{\mathrm{AB}}(\xi) = F_{\mathrm{AB}}(z).$$

Tenendo ora conto della proprietà di commutatività locale per le $\mathcal{W}$ (pag. 8–7) otteniamo il seguente risultato:

se $x - y \in V_{\mathrm{s}}$ (V_{s} è definito come il complemento del cono di luce V) allora

$$W_{\mathrm{AB}}(\xi) = W_{\mathrm{BA}}(-\xi). \tag{11–4}$$

Questa relazione conduce per le funzioni F alla:

$$F_{\mathrm{AB}}(z) = F_{\mathrm{BA}}(z).$$

Otteniamo cioè che le funzioni di Wightman che differiscono per le permutazioni di due campi si possono ottenere come limiti della stessa funzione analitica.

Un caso particolare del teorema spin-statistica e del teorema PCT

Se si modifica la (11–4) con un segno *meno* (corrispondente alla scelta per gli *anti*commutatori nella formulazione del quinto assioma (pag. 8–4)), e si pone $B = A = A^+$, si ottiene:

$$F_{\mathrm{AA}}(z) = 0.$$

Da ciò discende che $W_{\mathrm{AA}} = 0$, e da questa relazione non è difficile dimostrare che $A(f)\,\Omega = 0$, in contraddizione con l'assioma della ciclicità del vuoto.

Vediamo così che la scelta degli anticommutatori nel quinto assioma è incompatibile con una teoria di campo *scalare* come quella sin qui formulata (pagg. 8–6,7). Questo è un caso particolare del teorema di connessione tra spin e statistica.

Osserviamo ancora che

$$\begin{aligned}(\Omega, A(x)B(y)\,\Omega) &= F_{\mathrm{AB}}(z) = F_{\mathrm{BA}}(z) = (\Omega, B(x)A(y)\,\Omega) \\ &= (\Omega, A^+(-x)B^+(-y)\,\Omega)^* = (\Omega, B(-y)A(-x)\,\Omega).\end{aligned}$$

Tale uguaglianza esprime un aspetto del teorema TCP: le trasformazioni $x \mapsto -x$ e $y \mapsto -y$ più la coniugazione complessa dell'elemento di matrice rappresentano TP, l'operazione di coniugazione hermitiana sui campi rappresenta C.

Esamineremo ora, come premessa al teorema di Haag, tre teoremi preliminari.

Teorema di Reeh e Schlieder

In una teoria che soddisfa gli assiomi di Wightman, il vuoto Ω è ciclico rispetto all'algebra $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ dei polinomi definiti in un aperto $\mathcal{O}$ dello spazio-tempo.

$\mathcal{P}(\mathcal{O})$ è definito come l'insieme di tutti i polinomi della forma

$$c + \sum_{j=1}^{N} A(f_1^{(j)}) \cdots A(f_j^{(j)})$$

dove $f_k^{(j)}$ sono funzioni prova il cui supporto è $\mathcal{O}$, insieme aperto dello spazio-tempo.

Chiaramente se $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ anche $P+Q$, $\alpha\, Q$, $P\, Q$ appartengono a $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ (cioè $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ è un'algebra); inoltre

$$P \in \mathcal{P}(\mathcal{O}) \quad \Rightarrow \quad P^{+} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}),$$

l'operazione di coniugazione hermitiana induce cioè un antiautomorfismo involutivo nell'algebra $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Come si dice usualmente, $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ è una $*$-algebra.

Il teorema di Reeh–Schlieder asserisce che l'insieme dei vettori $\mathcal{P}(\mathcal{O})\,\Omega$ è denso in $\mathcal{H}$.

Per la dimostrazione prendiamo un vettore Ψ ortogonale all'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{O})\,\Omega$, cioè

$$(\Psi, P\,\Omega) = 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{O}).$$

La nostra tesi sarà provata se dimostreremo che Ψ è nullo.

Consideriamo la

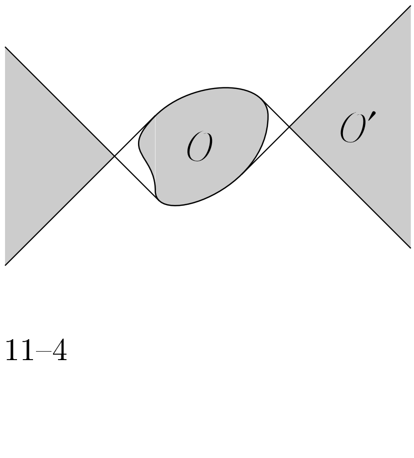
$$(\Psi, P\,\Omega) = \Big(\Psi, \sum_j A\big(f_1^{(j)}\big) \cdots A\big(f_j^{(j)}\big)\,\Omega\Big) \tag{11–5}$$

con $f_k^{(j)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Ogni termine della somma che compare nella (11–5) è una distribuzione temperata multipla nelle funzioni $f_k^{(j)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, e per il teorema nucleare di Schwartz si può estendere a una distribuzione temperata F in un'unica funzione di prova. Poiché la trasformata di Fourier di tale distribuzione si annulla a meno che ogni suo argomento appartenga allo spettro fisico della teoria, si può provare che esiste una funzione *analitica* $\bar{F}$ che ha la F per limite (al tendere a zero delle parti immaginarie dei suoi argomenti).

Poiché la $\bar{F}$ si annulla nell'ipotesi (11–5) con $\operatorname{supp} f \subseteq \mathcal{O}$, la $\bar{F}$ è ovunque nulla, e in particolare è nullo il suo limite F, cioè la (11–5) è nulla con $f_k^{(j)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Segue allora $\Psi = 0$. ■

Teorema di Federbush e Johnson

Definiamo in primo luogo, dato un aperto $\mathcal{O}$ dello spazio-tempo, l'insieme $\mathcal{O}'$ come il massimo aperto contenente solo punti causalmente disgiunti da $\mathcal{O}$.



Esempi:
se $\mathcal{O}$ è limitato, $\mathcal{O}'$ è sempre non vuoto
se $\mathcal{O}$ è una striscia infinita parallela all'asse dei tempi, $\mathcal{O}'$ è vuoto.

Il teorema afferma:

Sia $\mathcal{O}$ aperto, $\mathcal{O}'$ non vuoto; $T \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$; $T\,\Omega = 0$. In tali ipotesi, $T = 0$.

Consideriamo $\mathcal{P}'(\mathcal{O})$, il commutante di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ (pag. 2–1). Dalla commutatività locale segue

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}') \subseteq \mathcal{P}'(\mathcal{O}).$$

Sia $P \in \mathcal{P}(\mathcal{O}')$; si ha allora $PT = TP$ e quindi $TP\,\Omega = PT\,\Omega = 0$; cioè T annichila $P\,\Omega$, $\forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{O}')$. Ciò significa che T annichila un insieme denso in $\mathcal{H}$ (per il teorema di Reeh–Schlieder) da cui si deduce $T = 0$. ∎

Discutiamo ora brevemente il significato dei due teoremi precedenti. Il teorema di Reeh–Schlieder garantisce che lo spazio di Hilbert si può costruire partendo dalla conoscenza dei campi in una regione aperta dello spazio tempo.

A proposito del teorema di Federbush–Johnson, ricordiamo che un operatore espresso mediante un polinomio di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, con $\mathcal{O}'$ soddisfacente alle ipotesi del teorema, è detto operatore *locale*. Tale denominazione si giustifica per il fatto, accennato più sopra, che l'aperto $\mathcal{O}$ non può estendersi all'infinito, in tutte le direzioni spaziali, né nel tempo; e un insieme aperto limitato soddisfa in ogni caso le ipotesi del teorema.

Il teorema di Federbush–Johnson si può allora esprimere dicendo che un operatore locale non può contenere esclusivamente operatori di distruzione, e quindi la separazione di un operatore qualunque in una parte di creazione più una parte di distruzione non è locale.

Il fatto che un operatore locale P o annichila il vuoto e quindi è nullo, oppure dà un risultato diverso da zero, può essere interpretato dicendo che P o è identicamente nullo, oppure ha sul vuoto valore *quadratico* medio diverso da zero: cioè le fluttuazioni di un campo locale sul vuoto non sono mai nulle.

Teorema di Jost e Schroer

Se un campo locale A soddisfa la

$$(\Omega, A(x)A(y)\,\Omega) = -i\,\Delta^{+}(x-y,m) \tag{11–6}$$

allora è un campo libero, cioè

$$(\Box - m^2)A = 0 \tag{11–7}$$

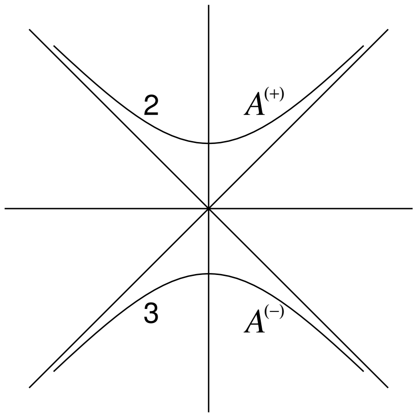
$$[A(x), A(y)] = -i\,\Delta^{+}(x-y,m). \tag{11–8}$$

Definiamo anzitutto $j(x) = (\Box - m^2)A(x)$; dalla (11–6) segue

$$(\Omega, j(x)j(y)\,\Omega) = 0$$

e quindi $j(f)\,\Omega = 0$; il teorema di Federbush–Johnson dice allora che $j(f) = 0$, cioè il campo A soddisfa l'equazione (11–7).

Consideriamo ora la trasformata di Fourier di A; il suo spettro sta tutto sull'iperboloide $p^2 = m^2$. È allora possibile decomporre in modo invariante A in una parte a frequenza positiva ed una a frequenza negativa: $A(x) = A^{(+)}(x) + A^{(-)}(x)$; in modo cioè che le corrispondenti trasformate di Fourier abbiano lo spettro sulle falde 2 e 3 rispettivamente.



Dimostriamo ora che $A^{(-)}(x)\,\Omega = 0$; per vederlo, proviamo che il prodotto scalare di $A^{(-)}\,\Omega$ con qualunque vettore è zero.

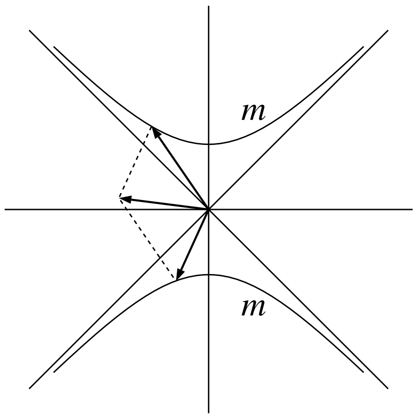
A questo scopo consideriamo il prodotto scalare

$$(A(x_1)\cdots A(x_n)\,\Omega, A^{(-)}(x)\,\Omega):$$

sempre con un ragionamento intuitivo è facile convincersi che esso sarà nullo solo se $(A(x_1)\cdots A(x_n)\,\Omega)$ contiene degli impulsi la cui somma contribuisce agli impulsi che compaiono in $A^{(-)}(x)\,\Omega$. Ma per la condizione spettrale $A(x_1)\cdots A(x_n)\,\Omega$ contiene solo impulsi positivi o nulli, mentre $A^{(-)}(x)\,\Omega$ contiene solo impulsi negativi: il prodotto scalare è quindi nullo, e $A^{(-)}(x)\,\Omega = 0$ come si voleva.

Consideriamo ora il prodotto scalare

$$(\Omega, A^{(-)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega).$$



Il vettore $A^{(-)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega$ dà all'impulso un contributo che è somma di due vettori; uno di V^+ e uno di V^-, ed entrambi con massa m. Ne segue che l'impulso totale o è spaziale o nullo; poiché non può essere spaziale (per la condizione spettrale) l'unica possibilità è che $A^{(-)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega$ abbia impulso nullo, cioè:

$$A^{(-)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega = c\,\Omega$$

essendo c un numero. D'altronde

$$(\Omega, A^{(-)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega) = (\Omega, A(x)A(y)\,\Omega) = -i\,\Delta^+(x-y,m)$$

e $(\Omega,\Omega) = 1$: ne segue $c = -i\,\Delta^+(x-y,m)$.

Consideriamo ora $[A(x),A(y)]\,\Omega$:

$$\begin{aligned}
[A(x),A(y)]\,\Omega &= A(x)A(y)\Omega - A(y)A(x)\,\Omega \\
&= (A^{(+)}(x) + A^{(-)}(x))(A^{(+)}(y) + A^{(-)}(y))\,\Omega - \\
&\qquad (A^{(+)}(y) + A^{(-)}(y))(A^{(+)}(x) + A^{(-)}(x))\,\Omega \\
&= [A^{(+)}(x), A^{(+)}(y)]\,\Omega - i\,\Delta^+(x-y,m)\,\Omega + i\,\Delta^+(y-x,m)\,\Omega \\
&= [A^{(+)}(x), A^{(+)}(y)]\,\Omega - i\,\Delta(x-y,m)\,\Omega. \qquad (11\text{–}9)
\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$(\Phi, [A^{(+)}(x), A^{(+)}(y)]\,\Omega) = \\ (\Phi, A^{(+)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega) - (\Phi, A^{(+)}(y)A^{(+)}(x)\,\Omega), \quad \Phi \in \mathcal{H};$$

il termine $(\Phi, A^{(+)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega)$ è del tipo

$$\int\limits_{V^+}\int\limits_{V^+} e^{irpx} e^{irqy}\,(\Phi, \tilde{A}(p)\tilde{A}(q)\,\Omega)\,dp\,dq$$

e ciò garantisce che $(\Phi, A^{(+)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega)$ si può estendere al campo complesso se

$$\Im x \in V^+, \quad \Im y \in V^+.$$

Si può cioè ottenere una funzione analitica che ha per limite la distribuzione $(\Phi, A^{(+)}(x)A^{(+)}(y)\,\Omega)$, al tendere a zero delle parti immaginarie dei suoi argomenti; analogo ragionamento vale per $(\Phi, A^{(+)}(y)A^{(+)}(x)\,\Omega)$ e quindi per $(\Phi, [A^{(+)}(x), A^{(+)}(y)]\,\Omega)$.

In generale si dimostra che una funzione analitica di questo tipo si annulla ovunque se in una regione (reale) aperta è nullo il suo limite (che può essere una distribuzione, come nel caso in esame) (cfr. i teoremi 2.13 e 2.17 di [14]).

Nel nostro caso la (11–9) assicura che $(\Phi, [A^{(+)}(x), A^{(+)}(y)]\,\Omega)$ si annulla se $(x-y)^2 < 0$, e quindi, per il risultato citato sopra:

$$(\Phi, [A^{(+)}(x), A^{(+)}(y)]\,\Omega) = 0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{H},$$

cioè

$$[A^{(+)}(x), A^{(+)}(y)]\,\Omega = 0.$$

La (11–9) permette allora di scrivere

$$\big([A(x), A(y)] + i\,\Delta^+(x-y, m)\big)\,\Omega = 0$$

e per il teorema di Federbush–Johnson si ottiene infine

$$[A(x), A(y)] = -i\,\Delta^+(x-y, m)$$

come si voleva. ∎

Osservazioni sullo schema di interazione

Prima di proseguire col teorema di Haag, richiamiamo la nozione di schema d'interazione, che è strettamente collegata col teorema e con le sue conseguenze.

Come nell'ordinaria meccanica quantistica, anche in teoria dei campi l'evoluzione temporale di un sistema fisico può essere descritta sia con vettori di stato variabili nel tempo e osservabili indipendenti dal tempo (schema di Schrödinger), che mediante vettori di stato indipendenti dal tempo e osservabili variabili nel tempo (schema di Heisenberg).

È poi assai conveniente, sopratutto nelle trattazioni perturbative, introdurre lo schema d'interazione. Ammettiamo di descrivere in primo luogo il sistema secondo lo schema di Heisenberg (h): l'equazione del moto per gli operatori è

$$Q^{(h)}(t) = \exp(-iHt)\, Q^{(h)}(0)\; \exp(iHt)$$

dove H è l'Hamiltoniana.

Si suppone di poter scomporre l'Hamiltoniana in una parte "libera" e in una parte d'"interazione": $H = H_0 + H_1$; si definiscono poi i vettori di stato e le variabili dinamiche nello schema d'interazione (i):

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(t) &= V(t)\, \Phi^{(h)}(t) \\ Q^{(i)}(t) &= V(t)\, Q^{(h)}(t) V^{+}(t). \end{aligned} \tag{11–10}$$

con $V(t) = \exp(iH_1 t)$.

Tale schema ha il vantaggio che i vettori di stato hanno una dipendenza dal tempo analoga a quella dello schema di Schrödinger, ma con l'Hamiltoniana d'interazione in luogo dell'Hamiltoniana totale:

$$\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial t} = -i\, H_1 \Phi^{(i)}(t).$$

Le variabili dinamiche, grazie alla (11–10), si possono invece considerare come variabili nello schema di Heisenberg, ma con l'Hamiltoniana libera in luogo dell'Hamiltoniana totale.

Si noti in particolare che

$$\Omega^{(i)}(t) = V(t)\, \Omega^{(h)} = \Omega^{(h)} \tag{11–11}$$

poiché $H_1 = H - H_0$ annichila il vuoto, com'è richiesto dall'assioma dell'unicità del vuoto.

Lo schema d'interazione permette poi una semplice definizione della matrice S:

$$\begin{aligned} S_{ab} &= (\Phi_a(\text{finale}), \Phi_b(\text{iniziale})) = (\Phi_a(+\infty), \Phi_b(-\infty)) \\ &= (V(+\infty)\, \Phi_a(0), V(-\infty)\, \Phi_b(0)) = \big(\Phi_a(0), V^{+}(+\infty) V(-\infty)\, \Phi_b(0)\big) \end{aligned}$$

e quindi $S = V^{+}(+\infty) V(-\infty)$.

II teorema di Haag

Il teorema di Haag [16] stabilisce che se un campo locale ammette lo schema d'interazione, esso è necessariamente libero; formalmente cioè il teorema si esprime:

Se per un campo locale $A(x,t)$ esiste un $V(t)$ unitario, tale che

$$A(\vec{x},t) = V^{+}(t)\, A_0(\vec{x},t)\, V(t) \tag{11–12}$$

con $A_0(\vec{x},t)$ campo libero (cfr. (11–10)) *e se*

$$V(t)\,\Omega = \Omega \tag{11–13}$$

allora $A(\vec{x},t)$ è un campo libero.

Grazie ai teoremi che precedono, la dimostrazione è ovvia. In effetti dalla (11–12), tenendo conto della (11–13), segue:

$$(\Omega, A(\vec{x},t)A(\vec{y},t)\,\Omega) = (\Omega, A_0(\vec{x},t)A_0(\vec{y},t)\,\Omega).$$

Dall'ultima espressione, grazie al teorema dimostrato all'inizio del capitolo, segue:

$$(\Omega, A(x)A(y)\,\Omega) = (\Omega, A_0(x)A_0(y)\,\Omega). \tag{11–14}$$

Poiché A_0 è libero

$$(\Omega, A_0(x)A_0(y)\,\Omega) = -i\,\Delta^{+}(x-y,m);$$

la (11–14) allora, per il teorema di Jost–Schroer, implica che $A(x)$ sia un campo libero. ■

Si noti che nella dimostrazione abbiamo fatto uso essenziale della (11–13), che è connessa all'unicità del vuoto (cfr. (11–11)).