

## CAPITOLO 2

### Le idee della RG

Abbiamo detto che la RG è una *teoria relativistica della gravitazione*. Possiamo anche dire che la RG fonde insieme la gravitazione newtoniana e la RR, in una teoria unitaria che le supera entrambe.

Rispetto alla gravitazione newtoniana, la caratteristica più notevole della RG è di attuare una *geometrizzazione* della gravità: la forza di gravità cessa di essere appunto una forza, ossia l'espressione di un'interazione tra corpi, per divenire una proprietà geometrica dello spazio (meglio, dello spazio-tempo). Il moto di un corpo soggetto solo alla gravità è determinato dalla geometria dello spazio-tempo, attraverso le sue *geodetiche*. Il resto di questo capitolo è dedicato a dare una prima idea di che cosa ciò significhi.

Come nella RR, la base fisica, il “teatro” in cui si svolgono i fenomeni, è lo *spazio-tempo*. Ma a differenza della RR, in RG lo spazio-tempo non è un ambiente fisso, dato una volta per tutte nella sua struttura: al contrario, *la geometria dello spazio-tempo è determinata dalla materia in esso presente*.

Ciò avviene per mezzo di un'altra innovazione: lo spazio-tempo è *curvo*, ed è appunto il grado e la forma di questa curvatura che dipende dalla materia; poi vedremo come. Abbiamo dunque uno spazio-tempo 4-dimensionale, e per di più curvo: occorre imparare a “vedere” una cosa del genere. Non nel senso di un “vedere” vago, ma di un'intuizione basata su una precisa struttura matematica.

Il cambiamento di paradigma introdotto da Einstein nella teoria della gravitazione è espresso da MTW con la “parabola della mela.” Una formica che cerca di andare “diritta” sulla superficie di una mela determina la sua traiettoria localmente, senza nessuna informazione circa la forma della superficie (ad es. se la formica va in bicicletta, tutto quello che deve fare è tener dritto il manubrio). Ma se passa vicino al picciolo la traiettoria finisce per incontrare quella di una compagna che passi dall'altra parte (fig. 2-1). Una formica “newtoniana” dirà che c'è una forza attrattiva, prodotta dal picciolo, che agisce a distanza, e incurva la traiettoria; un formica “einsteiniana” dirà invece che è la curvatura della superficie che determina la “deviazione delle geodetiche.”

La traiettoria della formica è una *geodetica*, ed è determinata *localmente*, nel senso che la sua normale principale coincide con la normale alla superficie (questa è una delle possibili definizioni di geodetica di una superficie). Ma la forma della geodetica dipende dalla forma della superficie: una buca provoca l'incurvamento delle geodetiche. Nella mela il picciolo sta in un punto, ma per ragioni di continuità il suo effetto “si propaga.” Perciò il picciolo sembra “agire a distanza” sulle formiche.

È in questo modo che la teoria di Einstein (*geometrodinamica*, secondo Wheeler) spiega la gravità. Niente azione a distanza, niente forze: localmente tutti i corpi sono in moto inerziale, rettilineo uniforme. È la curvatura dello spazio-tempo che produce gli effetti globali osservati. Ed è la materia che determina la curvatura dello spazio-tempo.

Wheeler dice: “*Physics is simple only when analyzed locally*”:

- localmente le geodetiche appaiono diritte
- su regioni estese, geodetiche che partono da uno stesso punto si riavvicinano per effetto della curvatura
- la materia deforma la geometria dello spazio-tempo.

### Principio di equivalenza e riferimento inerziale locale

L’accelerazione di gravità è indipendente dal corpo entro  $10^{-12}$ : è ciò che si esprime spesso parlando di “identità di massa inerziale e gravitazionale.” Esperimenti assai raffinati in merito sono stati compiuti da Eötvös nei primi decenni del secolo scorso; da Dicke e coll., Braginskij e coll. negli anni ’60–’70.

Einstein ne induce che lo stato “naturale” di un corpo in campo gravitazionale sia la caduta libera, mentre per tenerlo fermo occorre “forzarlo”. Dunque un rif. fermo in un campo gravitazionale *non è inerziale*: il rif. inerziale (RI) è quello *in caduta libera*.

Il *principio di equivalenza* (PE) afferma che un RI nel senso di Einstein è indistinguibile da un RI (newtoniano) posto lontano da qualsiasi sorgente di campo gravitazionale. Si suole però distinguere un PE *debole* e uno *forte*. La forma debole si applica solo al moto dei gravi, e perciò non dice niente che non fosse già noto a Galileo. Più esplicitamente era noto a Newton: per asserire che la forza di gravità è proporzionale alla massa (inerziale), egli si basa infatti sull’osservazione che nel rif. di Giove, che è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, i satelliti di Giove si muovono come se il Sole non ci fosse.

Il PE forte afferma che l’equivalenza si estende a *tutti* i fenomeni fisici. Tuttavia è difficile capire come potrebbe valere il principio debole per tutti i corpi, se non valesse quello forte, dal momento che le energie di legame contribuiscono alla massa.

L’equivalenza ha solo carattere *locale*, perché i campi gravitazionali e le accelerazioni possono essere *non uniformi*. Il PE si enuncia perciò come segue:

*Intorno a ogni punto dello spazio-tempo esiste sempre un RIL (riferimento inerziale locale) con le seguenti proprietà:*

- in un RIL la fisica è lorentziana (solo localmente: su regioni estese si possono avere deviazioni nello spazio e nel tempo)
- un RIL è individuato dall’assenza di gravità, cioè dalla validità del principio d’inerzia.

Esiste un'analogia matematica (che vedremo essere profonda) tra il RIL e il piano tangente a una superficie. Si può confondere una porzione di superficie col piano tangente, con approssimazione tanto migliore quanto più la regione è piccola. Ad es. sulla superficie di una sfera *non vale il teorema di Pitagora*.

Per dimostrarlo, consideriamo un triangolo sferico rettangolo (fig. 2-2) i cui lati sono archi di cerchio massimo (ossia geodetiche: questo lo vedremo meglio in seguito). Se  $a$ ,  $b$  sono i cateti,  $c$  l'ipotenusa, e  $R$  è il raggio della sfera, si trova che

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{3R^2} + \dots$$

dove i puntini stanno a indicare termini di sesto ordine in  $a/R$  e  $b/R$ . Si vede che l'errore relativo va a zero con le dimensioni del triangolo.

Il risultato è generale: *localmente* ogni superficie (non singolare) è piana, vale la geometria euclidea, e si possono introdurre coordinate cartesiane. Lo stesso accade nello spazio-tempo: localmente la geometria è lorentziana, e si possono introdurre coordinate spazio-temporali (quelle di un RIL) nelle quali vale la relatività ristretta e la metrica assume la forma di Lorentz–Minkowski (v. dopo).

Un commento sul termine “locale,” usato più volte. Dall'impiego che ne abbiamo fatto si vede che esso va interpretato nel senso di limite: la proprietà indicata non vale a rigore per nessuna regione finita della varietà (sfera o spazio-tempo che sia) ma è soddisfatta con errore piccolo a piacere, a condizione di prendere una regione sufficientemente piccola. In altre parole, usando la terminologia matematica, abbiamo a che fare con proprietà *differenziali*.

### Altra forma del PE

Oltre che come equivalenza tra rif., il PE può essere visto in altro modo: come *equivalenza tra accelerazione e campo gravitazionale*. Vediamo meglio.

Un rif.  $K$ , fermo sulla superficie della Terra non è inerziale nel senso di Einstein, in quanto non è in caduta libera: infatti in questo rif. si sente un campo gravitazionale  $\vec{g}$ . Un rif.  $K'$ , situato in uno spazio lontano da ogni massa, ma accelerato (per es. un'astronave coi motori accesi) di nuovo non è inerziale secondo Einstein (e non lo è neppure in senso newtoniano). In  $K'$  ogni corpo sente una forza apparente  $-m\vec{a}$ , che *agli effetti meccanici* si comporta come una forza di gravità, generata dal campo gravitazionale  $-\vec{a}$ .

Se accettiamo il PE *forte* per i rif. in caduta libera, siamo obbligati ad assumere anche, con Einstein, che i due rif.  $K$  e  $K'$  sono equivalenti *a tutti gli effetti fisici* (non solo meccanici), se  $-\vec{a} = \vec{g}$ . Einstein fa uso proprio di questa equivalenza per ottenere le prime previsioni della RG: per es. il già citato redshift gravitazionale (1911).

S'intende che anche da questo punto di vista resta il carattere locale dell'equivalenza: infatti mentre la forza apparente in  $K'$  ha lo stesso valore dappert-

tutto, il campo gravitazionale in  $K$  non è uniforme, e può essere assunto come tale solo in una regione spaziale piccola e per tempi brevi.

## Il principio della geodetica

Se in un RIL vale il principio d'inerzia e la RR, che cosa si può dire quando si abbandona il punto di vista locale? Come si muove un corpo in caduta libera, quando percorre regioni estese dello spazio-tempo?

Osserviamo intanto che una curva nello spazio-tempo fornisce, circa il moto di un corpo, allo stesso tempo la sua traiettoria spaziale, e la legge oraria. Si chiama per questo “curva oraria.” Si tenga presente che a causa della velocità limite, una curva oraria può essere solo di tipo tempo, o al più di tipo luce; mai di tipo spazio, in nessuna sua parte.

Nell'ambito della RR il principio d'inerzia asserisce che il moto naturale (non soggetto a forze) è *rettilineo uniforme*: questo nello spazio-tempo di Lorentz–Minkowski corrisponde a una curva oraria che è una retta.

Passando a uno spazio-tempo curvo, occorre trovare la naturale generalizzazione di una retta dello spazio-tempo piatto: Einstein postula che si tratti di una geodetica, come già detto. È questo il *principio della geodetica* (PG). Nella formulazione iniziale della RG il PG appare come un postulato indipendente; solo anni dopo Einstein e Infeld dimostrano che lo si può dedurre dalle equazioni di Einstein.

A questo punto avremmo bisogno di una precisa definizione di geodetica, ma dobbiamo rimandarla. Accontentiamoci di un concetto semiintuitivo: per una superficie in  $\mathbb{R}^3$  una geodetica può essere intesa come la curva di lunghezza minima tra due punti dati (ma non sempre questa definizione funziona ...). Nello spazio-tempo ci si può basare su un'idea analoga, solo che — come vedremo — per le geodetiche di tipo tempo si tratta di lunghezza *massima*, anziché minima; e per le geodetiche di tipo luce questa definizione è inservibile, perché la lunghezza di una curva di tipo luce è in ogni caso nulla.

## Unità geometriche

È possibile e conveniente in RG sfruttare l'esistenza di due costanti universali per eliminare l'unità di tempo (o quella di lunghezza) e quella di massa. Nel primo caso ci si serve di  $c$ , nel secondo di  $G$ . In sostanza, prendiamo unità tali che risulti  $c = 1$ ,  $G = 1$ .

Come unità di tempo avremo il tempo che occorre alla luce per percorrere (nel vuoto) l'unità di lunghezza. Si può anche dire che misuriamo il tempo ad es. in centimetri, ovvero che usiamo in ogni caso  $ct$  al posto di  $t$ . Ne segue che la velocità è un numero puro, e l'accelerazione ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. In particolare:

$$3.33 \cdot 10^{-11} \text{ s è l'unità di tempo corrispondente a 1 cm}$$

$$g = 1.09 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^{-1} \quad 1/g = 9.2 \cdot 10^{17} \text{ cm} \simeq 1 \text{ anno-luce.}$$

Come unità di massa si assume poi quella che produce accelerazione unitaria su un'altra massa posta a distanza unitaria. Dato che l'accelerazione è  $m/r^2$ , e questa è l'inverso di una lunghezza, si vede che la massa nelle nuove unità ha le dimensioni di una lunghezza. Più esattamente:

$$1.35 \cdot 10^{28} \text{ g è l'unità di massa corrispondente a 1 cm.}$$

Come si vede, si tratta di una massa piuttosto grande.

È utile ricordare il valore in unità geometriche delle masse della Terra e del Sole:

$$M_{\oplus} = 0.444 \text{ cm} \quad M_{\odot} = 1.48 \cdot 10^5 \text{ cm.}$$

Otteniamo in entrambi i casi valori assai più piccoli dei raggi geometrici dei due corpi: vedremo in seguito l'interesse di questo fatto.

### Curvatura gaussiana di una superficie

Consideriamo due meridiani sulla sfera di raggio  $a$ , che distano  $\xi_0$  lungo l'equatore (fig. 2-3). Alla latitudine  $\varphi$ , quindi alla distanza  $s = a \varphi$  dall'equatore, la loro distanza  $\xi$  è data da

$$\sin \frac{\xi}{2a} = \sin \frac{\xi_0}{2a} \cos \varphi$$

che per  $\xi_0$  piccolo si può approssimare con

$$\xi = \xi_0 \cos \varphi = \xi_0 \cos \frac{s}{a}.$$

Ne segue

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = -\frac{1}{a^2} \xi$$

che permette una definizione “operativa” di *curvatura*. Si guarda come cambia la distanza  $\xi$  lungo due cerchi massimi (geodetiche) che partono paralleli; la definizione di curvatura (gaussiana) è

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{\xi} \frac{d^2 \xi}{ds^2}. \quad (2-1)$$

L'esempio della sfera è comodo perché molto semplice, e in questo caso è ovvio che la scelta del cerchio massimo che abbiamo chiamato “equatore”

è arbitraria, visto che una sfera è “ugualmente curva” in tutte le direzioni, e che tutti i cerchi massimi sono equivalenti. Inoltre anche i punti da cui abbiamo iniziato la costruzione sono liberi, nel senso che se avessimo scelto punti diversi non avremmo dovuto aspettarci un diverso risultato.

Ma se pensiamo a una superficie generica, di forma irregolare, le cose non sono più così semplici, e bisogna procedere con maggior attenzione (fig. 2-4):

- fissiamo sulla superficie un punto A
- scegliamo come “equatore” un geodetica passante per A
- sull’equatore prendiamo un secondo punto B, a distanza  $\xi_0$
- per A e B conduciamo due geodetiche che partano perpendicolari all’equatore (meridiani)
- sui meridiani prendiamo i punti A', B' che distano  $s$  rispettivamente da A e da B
- misuriamo la distanza  $\xi$  tra A' e B'
- studiamo la funzione  $\xi(s)$ , in particolare il suo comportamento quando  $\xi_0 \rightarrow 0$ .

Sarà ancora possibile definire la curvatura mediante la (2-1), ma ora non è ovvio che il risultato, una volta scelto A, non dipenda dalla scelta dell’equatore. È dovuta a Gauss la prova che ciò non accade: la (2-1) permette una *definizione di curvatura della superficie nel punto A*.

Si noti che la superficie della sfera riesce curva perché le due geodetiche, viste nello spazio, sono curve concave e situate su piani convergenti nel centro. Se invece di una sfera avessimo preso un cilindro, avremmo trovato che la distanza tra due geodetiche non varia, sebbene anche il cilindro appaia a prima vista una superficie curva. Il motivo è che stiamo parlando della curvatura *intrinseca*, e non di quella che appare per il fatto che la varietà è immersa in uno spazio a dimensione superiore. Infatti il cilindro può essere reso piano: è una superficie *svilupabile sul piano* senza deformazione; questo invece per la sfera non è possibile.

Naturalmente esistono superfici sulle quali le geodetiche anziché avvicinarsi si allontanano; allora la (2-1) va cambiata di segno, e si parla di *curvatura negativa*. Un esempio sono, tra le quadriche, il paraboloide iperbolico e l’iperboloide a una falda. Può anche accadere che punti diversi di un’unica superficie abbiano curvature diverse, anche nel segno: si pensi ad es. al toro (fig. 2-5). I punti a curvatura positiva si chiamano *ellittici*, quelli a curvatura negativa *iperbolici*, e quelli a curvatura nulla *parabolici*.

## Curvatura e forze di marea

Tornando ora allo spazio-tempo, pensiamo a un rif. in caduta libera verso la Terra (ascensore di Einstein) e siano  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  coordinate cartesiane, con  $\zeta$  diretta secondo la verticale (fig. 2-6). Un oggetto posto inizialmente in quiete con  $\zeta \neq 0$

non resta in quiete nel nostro rif.: infatti se  $\zeta > 0$  la sua accelerazione di caduta è minore di quella del rif., mentre è maggiore se  $\zeta < 0$ . In entrambi i casi si allontanerà dal centro. Dunque, se si resta a distanze finite (e tempi finiti), la forza di gravità non si cancella esattamente. Il residuo si chiama *forza di marea*, perché la causa delle maree sta proprio in un effetto del genere: in un rif. solidale alla Terra si risente il residuo del campo della Luna, nonostante che la Terra sia in “caduta libera” verso il satellite.

In termini quantitativi, il calcolo porta a

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{2M}{r^3} \zeta$$

( $r$  è la distanza dal centro della Terra, e stiamo usando unità geometriche). Un effetto analogo si manifesta se  $\xi$  o  $\eta$  sono diverse da zero, stavolta perché il campo gravitazionale non è più parallelo all'asse  $\zeta$ :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{M}{r^3} \xi \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{M}{r^3} \eta.$$

Le tre equazioni si sintetizzano in

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -R^i{}_{0k0} \xi^k \quad (2-2)$$

dove

$$R^1{}_{010} = R^2{}_{020} = \frac{M}{r^3}, \quad R^3{}_{030} = -\frac{2M}{r^3} \quad (2-3)$$

(la complicata scelta degli indici rimanda alla definizione del tensore di Riemann, e non occorre ora preoccuparsene). Numericamente:

$$\frac{M}{r^3} = \frac{0.444}{6.38^3 \cdot 10^{24}} = 1.71 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^{-2}.$$

Si noti che  $M/r^3$  ha dimensioni dell'inverso del quadrato di una lunghezza.

Per analogia con la (2-1) possiamo dunque parlare di una *curvatura dello spazio-tempo*; per il raggio di curvatura (in prossimità della Terra) si trova  $2.4 \cdot 10^{13} \text{ cm} = 1.6 \text{ UA}$ . Naturalmente il richiamo all'unità astronomica non ha alcun significato profondo, visto che la curvatura che abbiamo calcolato dipende solo da massa e raggio della Terra; si tratta solo di un aiuto mnemonico.

La (2-3) mostra però un'altra cosa, che è una complicazione: la curvatura dello spazio-tempo appare diversa a seconda di quali coordinate si usano. Questo è un fatto inevitabile, perché in più di due dimensioni (lo spazio-tempo ne ha 4) non si può caratterizzare la curvatura in un punto con un solo numero, come accade per le superfici. I parametri che abbiamo calcolato sono soltanto le curvatures di sezioni bidimensionali dello spazio-tempo: le sezioni  $(\xi, t)$ ,  $(\eta, t)$ ,  $(\zeta, t)$ .

La descrizione completa della curvatura si fa con un oggetto matematico più complicato: il già nominato tensore di Riemann.

### Effetto della materia

Abbiamo visto che alla superficie della Terra

$$R^1_{010} = R^2_{020} = \frac{M}{r^3} = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}$$

essendo  $\bar{\rho}$  la densità media; mentre  $R^3_{030}$  è diverso, anche nel segno. Se però ripetiamo il calcolo in un pozzo verticale (supponendo uniforme la densità) le cose cambiano, perché il campo gravitazionale non è più decrescente come  $1/r^2$ , ma al contrario cresce come  $r$ . Di conseguenza cambia il segno di  $R^3_{030}$ , e a conti fatti si trova che anche in grandezza le tre componenti sono uguali:

$$R^1_{010} = R^2_{020} = R^3_{030} = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}.$$

Se poniamo

$$\tilde{R}_{00} \stackrel{\text{def}}{=} R^\alpha_{0\alpha 0}$$

riesce

$$\tilde{R}_{00} = 4\pi\bar{\rho}. \tag{2-4}$$

Questa è in sostanza una delle *equazioni di Einstein*, qui introdotta in modo elementare per darne subito, almeno in parte, il significato intuitivo. A primo membro abbiamo un'espressione costruita con le curvatures di diverse sezioni dello spazio-tempo; a secondo membro c'è un dato sulla distribuzione di materia. Perciò la (2-4) esprime in termini matematici l'idea già enunciata, che la distribuzione della materia determina la curvatura dello spazio-tempo.