

CAPITOLO 9

Premessa

Questo capitolo è dedicato ad alcuni concetti matematici necessari per la comprensione delle equazioni di Einstein. Come detto nell'introduzione, la discussione sarà contenuta nei limiti strettamente indispensabili. Inoltre presteremo pochissima attenzione al rigore matematico.

Per dare un significato al concetto di curvatura dello spazio-tempo (o di una varietà in generale) occorre compiere una successione di passi. Dato che abbiamo già introdotto le geodetiche, possiamo partire da qui, e definire:

- a) il trasporto parallelo di un vettore
- b) la derivata covariante
- c) il tensore di Riemann.

Trasporto parallelo di un vettore

Il problema è quello di dare un significato, in una varietà riemanniana, a un'operazione del tutto banale nella geometria euclidea: il confronto tra vettori applicati in punti diversi. In geometria euclidea l'operazione richiede soltanto di applicare entrambi i vettori nello stesso punto, il che si fa *trasportando parallelamente* a se stesso uno dei vettori al punto di applicazione dell'altro (fig. 9-1). Dopo di che, è immediato determinare la loro differenza.

Ma in una varietà non euclidea, anche semplicemente su una superficie come una sfera, non si sa in partenza che cosa possa significare trasportare parallelamente un vettore: anche se si pensa la superficie immersa in uno spazio euclideo, quando si sposta parallelamente un vettore inizialmente tangente alla superficie, si finisce con uno che non è più tangente, e quindi non può essere usato per studiare la geometria intrinseca della superficie stessa (fig. 9-2).

Anzi, come vedremo poi, la situazione è più complicata: il trasporto parallelo di un vettore in generale *dipende dalla curva* lungo cui lo si trasporta. Il fatto che ci sia questa dipendenza è il sintomo caratteristico della *curvatura*, e quindi non può essere eluso.

Un modo di definire il trasporto lungo una curva è la *costruzione di Schild*, che si appoggia sulla seguente semplice idea. Consideriamo in uno spazio euclideo due punti A, B e il vettore \mathbf{v} applicato in A, che vogliamo trasportare in B.

1. Tracciamo il segmento AC lungo \mathbf{v} , di lunghezza multipla del modulo di \mathbf{v} per un fattore arbitrario k .
2. Congiungiamo C con B, e sia D il punto medio di BC.
3. Tracciamo la retta AD, e troviamo su questa il punto E tale che D sia punto medio di AE.

4. Congiungiamo B con E: il vettore \mathbf{v} trasportato in B ha direzione e verso di BE, e modulo pari a \overline{BE}/k .

Basta la fig. 9–3 per vedere la giustificazione. L'interesse di questa costruzione sta nel fatto che non si usano direttamente le parallele: serve solo saper tracciare delle rette e trovare il punto medio di un segmento.

Possiamo seguire la stessa costruzione in una qualsiasi varietà, con piccole modifiche. Al posto delle rette useremo le geodetiche, e quando si parla di punto medio intenderemo che sia il parametro affine ad assumere il valore medio aritmetico degli estremi.

Non possiamo però operare su distanze arbitrarie, a causa della curvatura, ma solo su tratti infinitesimi. Ciò significa che dobbiamo preventivamente assegnare *la curva* lungo la quale eseguire il trasporto, e inoltre (se vogliamo essere rigorosi) seguire un procedimento di limite.

Ecco come si procede (fig. 9–4). Sia γ una curva qualsiasi, $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$ due suoi punti, $\mathbf{v}(A)$ il vettore che si vuole trasportare in B.

1. S'individuano su γ i punti $A_k = \gamma(k/n)$ ($k = 0 \dots n$).
2. Si fa partire da $A_0 = A$ la geodetica tangente a $\mathbf{v}(A)$, e si prende su di essa il punto C_0 corrispondente a un certo $\bar{\lambda}$.
3. Si costruisce la geodetica che unisce C_0 con A_1 , e tale che su di essa $\lambda = 0$ in C_0 e $\lambda = \bar{\lambda}$ in A_1 .
4. Si prende su questa geodetica il punto D_0 corrispondente a $\lambda = \bar{\lambda}/2$.
5. Si costruisce la geodetica che unisce A_0 con D_0 , e tale che su di essa $\lambda = 0$ in A_0 e $\lambda = \bar{\lambda}/2$ in D_0 .
6. Si prende su questa geodetica il punto C_1 corrispondente a $\lambda = \bar{\lambda}$.
7. Si costruisce la geodetica che unisce A_1 con C_1 , e tale che su di essa $\lambda = 0$ in A_1 e $\lambda = \bar{\lambda}$ in C_1 .
8. Si ripetono i passi da 3 a 7 per $k = 1 \dots n - 1$.
9. Il vettore tangente in $B = A_n$ all'ultima geodetica costruita è il risultato *approssimato* del trasporto parallelo di $\mathbf{v}(A)$ in B.
10. Si fa il limite della costruzione precedente per $n \rightarrow \infty$, $\bar{\lambda} \rightarrow 0$.

Derivata covariante

Il motivo per preoccuparsi del trasporto parallelo è che il confronto tra i valori di un campo vettoriale in punti vicini è necessario per tutte le operazioni differenziali sui campi. L'idea di Levi-Civita, alla fine dell'800, fu appunto che si potesse superare la difficoltà collegando la definizione di derivata di un campo vettoriale al trasporto parallelo (la definizione di Schild è però molto più recente). La derivata così definita si chiama *derivata covariante*, perché assume significato *intrinseco*, ossia indipendente dal SC. Per questo motivo Levi-Civita parlava anche di “calcolo differenziale assoluto.”

Se si assume come primitiva la nozione di trasporto parallelo di un vettore lungo una curva, si può definire la derivata covariante come segue. Dato un vettore \mathbf{u} in A e un campo vettoriale \mathbf{v} , prendiamo una curva γ (con parametro λ) che abbia \mathbf{u} come vettore tangente in A . Indichiamo con \mathbf{v}' il risultato del trasporto parallelo di \mathbf{v} da un generico punto P di γ in A (fig. 9-5). Definiremo la *derivata covariante di \mathbf{v} rispetto a \mathbf{u}* come segue:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\mathbf{v}' - \mathbf{v}(A)). \quad (9-3)$$

Occorrerebbe dimostrare che la definizione è corretta, ossia che il risultato dipende solo da \mathbf{u} , e non da γ . Questo risulterà implicitamente da ciò che segue.

Si può anche (e a volte riesce più utile) dare una definizione leggermente diversa. Con lo stesso significato di A , γ , \mathbf{u} e \mathbf{v} , indichiamo invece con \mathbf{v}' il risultato del trasporto parallelo di \mathbf{v} da A in P (fig. 9-6): allora

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\mathbf{v}(P) - \mathbf{v}'). \quad (9-4)$$

Che (9-3) e (9-4) diano lo stesso risultato, dipende solo dal fatto che quando $\lambda \rightarrow 0$ anche $P \rightarrow A$.

I coefficienti di connessione

È conveniente avere le espressioni della derivata covariante e del trasporto parallelo di un vettore in termini delle componenti del vettore in un dato SC $\{x^\alpha\}$. Definiamo anzitutto i *vettori base* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ come i vettori tangenti alle linee coordinate, ossia alle curve che si ottengono, in uscita da un punto A , facendo variare una sola delle coordinate, e prendendo come parametro quella coordinata. Ne segue immediatamente che la componente β di \mathbf{e}_α è

$$e_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta. \quad (9-5)$$

Osserviamo che gli $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ sono particolari campi vettoriali, in quanto sono definiti in tutti i punti della carta su cui sono definite le coordinate $\{x^\alpha\}$. Le loro componenti sono costanti, e si potrebbero impropriamente chiamare “vettori costanti,” se non fosse che in un altro sistema di coordinate le componenti non sono più costanti.

Esempio: Consideriamo nel piano euclideo le coordinate cartesiane (x, y) e quelle polari (r, φ) . Il vettore \mathbf{e}_r è il vettore tangente alla linea coordinata r (con parametro r): questa linea non è che una semiretta per l'origine, le cui equazioni parametriche in coordinate cartesiane sono:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi.$$

Da qui si vede che le componenti cartesiane di \mathbf{e}_r sono

$$e_r^x = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi \quad e_r^y = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi.$$

che non sono costanti in punti con φ diversa.

Lo stesso si verifica per \mathbf{e}_φ :

$$e_\varphi^x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi = -y \quad e_\varphi^y = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi = x.$$

Queste non sono neppure costanti su una stessa linea coordinata φ (né lo sono su una linea coordinata r).

Gli $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ sono una base, in quanto sono indipendenti e ogni altro vettore tangente può essere scritto come loro combinazione lineare. Questo si vede considerando una qualsiasi curva γ , di equazioni parametriche $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$. Le componenti del suo vettore tangente sono $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ e ovviamente

$$u^\alpha = u^\beta \delta_\beta^\alpha = u^\beta e_\beta^\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = u^\beta \mathbf{e}_\beta.$$

Introdotti i campi $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, è naturale considerare le loro derivate covarianti $\nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{e}_\beta$, che si possono scrivere come combinazioni lineari degli $\{\mathbf{e}_\alpha\}$:

$$\nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{e}_\beta = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \quad (9-6)$$

(attenzione all'ordine degli indici!). I coefficienti $\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$ si chiamano *coefficienti di connessione*; in generale sono funzioni del punto sulla varietà, e dovremo ora scoprire come si determinano.

Possiamo subito dimostrare la *proprietà di simmetria*:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (9-7)$$

Basta a questo scopo osservare la fig. 9-7, dove le curve AB, CD sono linee coordinate di x^α , mentre AC, BD sono linee coordinate di x^β . I punti B, C sono da considerare infinitamente vicini ad A. In generale AB e CD non sono tra loro parallele, né lo sono AC e BD; in figura è anche indicato il punto D' che completa il parallelogrammo ABD'C. Potremo assumere

$$\mathbf{AB} = \lambda \mathbf{e}_\alpha \quad \mathbf{AC} = \mu \mathbf{e}_\beta \quad (9-8)$$

mentre CD', BD' sono gli stessi vettori trasportati parallelamente in C, D. Allora dalla (9-4) si vede che a meno d'infinitesimi di ordine superiore

$$\begin{aligned} \mathbf{CD}' &= \lambda \mathbf{e}_\alpha + \lambda \mu \nabla_{\mathbf{e}_\beta} \mathbf{e}_\alpha = \lambda \mathbf{e}_\alpha + \lambda \mu \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \\ \mathbf{BD}' &= \mu \mathbf{e}_\beta + \lambda \mu \nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{e}_\beta = \mu \mathbf{e}_\beta + \lambda \mu \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \mathbf{e}_\gamma. \end{aligned}$$

Da queste, usando le (9-8):

$$\begin{aligned} AB + BD' &= \lambda \mathbf{e}_\alpha + \mu \mathbf{e}_\beta + \lambda\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \\ AC + CD' &= \lambda \mathbf{e}_\alpha + \mu \mathbf{e}_\beta + \lambda\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{e}_\gamma. \end{aligned}$$

Tenendo conto che $AB + BD' = AC + CD'$ si trova infine

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \mathbf{e}_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{e}_\gamma$$

che dimostra la (9-7). ■

Componenti della derivata covariante

L'importanza dei coefficienti di connessione sta nel fatto che permettono di determinare la derivata covariante di qualsiasi campo vettoriale. Per cominciare, osserviamo che se $f(P)$ è una qualsiasi funzione scalare si ha

$$\nabla_{\mathbf{e}_\alpha}(f\mathbf{v}) = f_{,\alpha}\mathbf{v} + f \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}\mathbf{v} \quad (9-9)$$

dove $f_{,\alpha}$ è un'abbreviazione per $\partial f/\partial x^\alpha$.

Dim.: Dalla definizione (9-3) abbiamo, a meno di termini di second'ordine in λ

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}(A) + \lambda \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}\mathbf{v} \quad (9-10)$$

dove \mathbf{v}' ha il solito significato, e la curva γ è ora la linea coordinata di x^α .

Analogamente:

$$f(P)\mathbf{v}' = f(A)\mathbf{v}(A) + \lambda \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}(f\mathbf{v}) \quad (9-11)$$

perché f è un moltiplicatore scalare, che resta invariato nel trasporto parallelo. Ma d'altra parte

$$f(P) = f(A) + \lambda f_{,\alpha}. \quad (9-12)$$

Sostituendo (9-10) e (9-12) nella (9-11) si arriva appunto alla (9-9). ■

Esprimiamo ora il campo \mathbf{v} mediante le componenti nella base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$:

$$\mathbf{v} = v^\beta \mathbf{e}_\beta$$

(si noti che in generale le componenti v^β sono *funzioni del punto*). Allora la (9-9), con v^β al posto di f , ed \mathbf{e}_β al posto di \mathbf{v} , fornisce

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}\mathbf{v} &= v^\beta_{,\alpha} \mathbf{e}_\beta + v^\beta \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}\mathbf{e}_\beta = v^\beta_{,\alpha} \mathbf{e}_\beta + v^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \\ &= \left(v^\gamma_{,\alpha} + v^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \right) \mathbf{e}_\gamma. \end{aligned} \quad (9-13)$$

L'espressione in parentesi si abbrevia di solito con $v^\gamma_{;\alpha}$:

$$v^\gamma_{;\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} v^\gamma_{,\alpha} + v^\beta \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \quad (9-14)$$

per cui la (9-13) diventa

$$\nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{v} = v^\gamma_{;\alpha} \mathbf{e}_\gamma.$$

Si può anche dimostrare che in generale

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^\alpha v^\gamma_{;\alpha} \mathbf{e}_\gamma \quad \text{ossia} \quad (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v})^\gamma = u^\alpha v^\gamma_{;\alpha} \quad (9-15)$$

ma tralasciamo la dimostrazione per brevità.

Se il campo vettoriale \mathbf{v} è *parallelo* lungo γ , ossia se il suo trasporto parallelo da A in un punto generico P coincide col valore $\mathbf{v}(P)$ del campo in P, si vede dalla (9-4) che $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 0$ in ogni punto di γ . Allora la (9-15) ci dà

$$u^\alpha v^\gamma_{;\alpha} = 0.$$

Esplicitando $v^\gamma_{;\alpha}$, e ricordando che su γ vale $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, arriviamo a

$$v^\gamma_{,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} v^\beta \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0.$$

Il primo termine si può scrivere $dv^\gamma/d\lambda$, e infine:

$$\frac{dv^\gamma}{d\lambda} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} v^\beta \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0. \quad (9-16)$$

Questo può essere visto come un sistema di equazioni differenziali (di primo ordine) per le componenti del campo \mathbf{v} , parallelo lungo γ , che permettono di determinarlo su tutta la curva una volta che sia stato assegnato in un suo punto.

Prodotto scalare: invarianza per trasporto parallelo

Con le stesse considerazioni svolte nel Cap. 3 per introdurre il tensore metrico, è facile mostrare che per il prodotto scalare tra due vettori vale la relazione:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta. \quad (9-17)$$

Dalla (9-17), e dall'espressione (9-5) delle componenti dei vettori base, si ricava immediatamente che

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \quad (9-18)$$

Un'importante proprietà del trasporto parallelo definito all'inizio del capitolo è che *il prodotto scalare è invariante per trasporto parallelo*. Il significato è il seguente: se \mathbf{v} , \mathbf{w} sono due campi vettoriali, con le notazioni della (9-3)

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

In parole: se si calcola il prodotto scalare nel punto P della curva γ , si trasportano i due vettori in A, e si calcola il prodotto scalare dei vettori trasportati, il risultato è lo stesso.

Tralasciamo la dimostrazione, che richiede di usare la relazione (9-18), la (9-3) per il trasporto parallelo, l'espressione (9-16) per la derivata covariante, e infine la relazione che daremo più avanti (9-23) per i coefficienti di connessione. Osserviamo invece che in particolare *l'ortogonalità di due vettori si conserva per trasporto parallelo*.

Come in RR, è possibile dare al prodotto scalare una diversa espressione, introducendo la *forma covariante* di un vettore (quella fin qui usata è detta *controvariante*). Si pone

$$v_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} v^\beta$$

e allora

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_\alpha w^\alpha = v^\alpha w_\alpha.$$

Ne segue la necessità di definire la derivata covariante anche per i vettori in forma covariante, e questo si fa come segue:

$$v_{\alpha;\beta} \stackrel{\text{def}}{=} v_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v_\mu. \quad (9-19)$$

(notare il segno meno). La motivazione della (9-19) sta nella seguente identità:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})_{,\beta} = v^a{}_{;\beta} w_\alpha + v^\alpha w_{\alpha;\beta}$$

che è d'immediata verifica.

In parole: la normale derivata delle funzione scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ si esegue in termini di derivate covarianti usando la *regola di derivazione del prodotto*, come nel prodotto di funzioni scalari.

L'equazione delle geodetiche

Possiamo ora ricavare facilmente un'importante proprietà delle geodetiche. Applichiamo la costruzione di Schild, che ha definito il trasporto parallelo, prendendo come curva γ una geodetica, e come vettore \mathbf{v} da trasportare il vettore \mathbf{u} tangente alla geodetica. Si vede facilmente che tutti i punti definiti nella costruzione stanno sulla geodetica, e con valori del parametro affine tali che il vettore trasportato in B non è altro che il vettore tangente a γ in quel punto. In poche

parole: *nel trasporto parallelo lungo una geodetica il vettore tangente rimane tangente in ogni punto.*

La proprietà che abbiamo trovata formalizza l'idea intuitiva della geodetica come la miglior generalizzazione possibile della retta euclidea: una geodetica è una curva che procede diritta quanto possibile, e infatti il vettore tangente rimane parallelo a se stesso.

Ma se $\mathbf{u}(A)$ trasportato parallelamente in B vale $\mathbf{u}(B)$, allora la (9-4) ci dice che la sua derivata covariante rispetto allo stesso \mathbf{u} è nulla:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0. \quad (9-20)$$

Possiamo riscrivere la (9-20) in termini delle componenti, usando la (9-15):

$$u^\beta u^\alpha{}_{;\beta} = 0. \quad (9-21)$$

Ancora: le componenti di \mathbf{u} non sono altro che le derivate delle coordinate rispetto al parametro λ , per cui la (9-21) si scrive anche

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\lambda^2} + \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (9-22)$$

La (9-22) mostra in modo esplicito ciò che nella (9-20) è nascosto dalla sinteticità della notazione: *abbiamo trovato un'equazione differenziale che caratterizza le geodetiche.* Il fatto che la (9-22) sia di second'ordine è comprensibile, perché già sapevamo che una geodetica è determinata assegnando il punto di partenza e il vettore tangente.

Naturalmente la (9-22), nota come *equazione delle geodetiche*, non è utilizzabile per determinare realmente le geodetiche, finché non conosciamo i coefficienti di connessione come funzioni del punto nella varietà. Ma in realtà noi avevamo già parlato di equazioni delle geodetiche nel Cap. 6, dove le avevamo viste come equazioni di Lagrange dedotte dal principio variazionale che definisce appunto le geodetiche. Se si scrivono esplicitamente quelle equazioni, il confronto con le (9-22) permette la determinazione dei coefficienti di connessione. Evitiamo di sviluppare il calcolo, ma scriviamo le espressioni che ne risultano:

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} (g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}). \quad (9-23)$$

Ricordiamo che le $g_{\alpha\beta}$ sono le componenti del tensore metrico (funzioni delle coordinate) e che $g_{\alpha\beta,\mu}$ indica la derivata di una componente rispetto a x^μ . Quanto a $g^{\gamma\mu}$, si tratta della matrice inversa di $g_{\alpha\beta}$. L'espressione dei coefficienti di connessione in termini del tensore metrico è dunque piuttosto complicata; è solo importante ricordare che contiene *linearmente* le derivate prime. Incidentalmente, la simmetria nello scambio tra α e β è ora evidente a vista.

Coordinate normali e RIL

A differenza di quanto si potrebbe credere, i coefficienti di connessione possono essere nulli in un punto in un dato SC, senza essere nulli (nello stesso punto) in un altro SC. In sostanza: *i coefficienti di connessione non si trasformano come un tensore.*

Esempio: Possiamo facilmente dimostrarlo con l'esempio già visto delle coordinate cartesiane e polari nel piano. In coordinate cartesiane l'espressione della metrica è

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

e basta differenziare le trasformazioni di coordinate

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

per ottenere l'espressione in coordinate polari

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

da cui le componenti del tensore metrico:

$$g_{rr} = 1 \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \quad g_{r\varphi} = 0.$$

A questo punto non c'è che da applicare la (9-23) per verificare che i coefficienti di connessione sono nulli in coordinate cartesiane (quindi la varietà è piatta) mentre non sono tutti nulli in coordinate polari.

È assai più interessante il risultato in certo senso inverso: comunque scelto un punto A di una varietà, è *sempre possibile trovare un SC nel quale i coefficienti di connessione si annullano in A*. Non possiamo soffermarci a darne la dimostrazione; le coordinate in cui vale questa proprietà si chiamano *coordinate normali o geodetiche*.

In realtà si può dimostrare anche un risultato più forte, e per noi molto più utile:

comunque scelta una geodetica γ in una varietà, è sempre possibile trovare un SC nel quale i coefficienti di connessione si annullano su tutta γ .

Si noti che l'annullarsi dei coefficienti di connessione semplifica l'equazione delle geodetiche (9-22), che si riduce a

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\lambda^2} = 0. \tag{9-24}$$

Non bisogna però dimenticare che la (9-24) vale solo sui punti di una particolare geodetica γ : per questa geodetica essa potrà essere integrata, fornendo coordinate che sono funzioni lineari di λ .

Ma se siamo interessati a una generica geodetica γ' che parte da un punto A di γ , la (9-24) vale solo nel punto di partenza, e quindi *la dipendenza lineare delle coordinate dal parametro ha solo validità approssimata* in un intorno di A.

L'interesse fisico di questo teorema si vede riprendendo il discorso dal Cap. 3, dove abbiamo visto che in un RIL la fisica è (localmente) lorentziana. Ciò significa che possiamo trovare coordinate $\{x^\alpha\}$ tali che il tensore metrico si riduce alla forma della relatività ristretta:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Ma questo non basta: per la validità del PE occorre ancora che valga il principio d'inerzia, il che vuol dire che le geodetiche per l'origine sono rette in queste coordinate, ossia $\Gamma = 0$. Anzi: dato che un RIL rimane tale a tutti i tempi, ci aspettiamo $\Gamma = 0$ lungo tutta la geodetica (di tipo tempo) di equazioni $x^i = 0$.

Bene: il nostro teorema ci assicura proprio che ciò accade (approssimativamente) nell'intorno di qualsiasi geodetica. Che la validità sia solo approssimata non è un problema, visto che anche il PE è soltanto locale, come sappiamo.

Derivata covariante di un tensore

Avremo bisogno nel seguito anche della derivata covariante di tensori; accenniamo quindi rapidamente come si definisce. Possiamo prendere come punto di partenza il tensore che si ottiene come *prodotto tensoriale* di due vettori:

$$\mathbf{T} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \quad T^{\alpha\beta} = v^\alpha w^\beta.$$

Definiamo la derivata di \mathbf{T} imponendo che valga ancora la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}_{;\gamma} &= v^\alpha_{;\gamma} w^\beta + v^\alpha w^\beta_{;\gamma} \\ &= \left(v^\alpha_{;\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} v^\mu \right) w^\beta + v^\alpha \left(w^\beta_{;\gamma} + \Gamma^\beta_{\gamma\mu} w^\mu \right) \\ &= T^{\alpha\beta}_{;\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} T^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\gamma\mu} T^{\alpha\mu} \end{aligned}$$

e imponiamo che la stessa relazione valga per qualsiasi tensore:

$$T^{\alpha\beta}_{;\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} T^{\alpha\beta}_{;\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} T^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\gamma\mu} T^{\alpha\mu}. \quad (9-25)$$

La (9-25) definisce la derivata covariante per un tensore di rango (2,0): due indici controvarianti e nessuno covariante. Si può immaginare come la definizione si estenda a un rango $(p, 0)$ qualsiasi, mentre è meno ovvio come vada trattato il caso (0,2) e quelli più complicati. Ci limitiamo a dare la definizione, senza giustificarla:

$$T_{\alpha\beta;\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} T_{\alpha\beta;\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} T_{\mu\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} T_{\alpha\mu} \quad (9-26)$$

(notare i segni meno).

Una conseguenza importante di queste definizioni è che *il tensore metrico ha derivata covariante nulla*, tanto in forma covariante quanto controvariante. La verifica richiede solo di usare le (9–25), (9–26) sostituendo le espressioni (9–23) per i coefficienti di connessione.