CAPITOLO 19

Le onde gravitazionali: introduzione

Dedicheremo questo capitolo e i seguenti alla discussione di una delle più importanti previsioni della RG: appunto l'esistenza di *onde gravitazionali.* Dovremo esaminare tre aspetti:

– che cosa sono le onde gravitazionali dal punto di vista della teoria

– quali effetti osservabili producono (in particolare, come possono essere rivelate)

– come vengono prodotte.

Cominciamo col dire che anche un'onda gravitazionale è una geometria dello spazio-tempo, che studieremo in assenza di materia (a parte ovviamente la sorgente). Si tratterà dunque di una soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto: $\mathbf{G} = 0$.

Come vedremo, in molte situazioni d'importanza pratica le onde gravitazionali sono assai deboli, il che è quanto dire che possiamo studiarle come una piccola perturbazione rispetto a una *geometria di fondo.* Per semplicità, supporremo che la geometria di fondo sia lorentziana, ossia trascureremo la curvatura dello spazio-tempo di origine cosmologica, o quella prodotta da sorgenti locali, come la Terra.

Assumeremo dunque che nel nostro spazio-tempo si possa trovare un sistema di coordinate $\{x^\alpha\}$ nel quale il tensore metrico differisca poco da quello della relatività ristretta:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \tag{19–1}$$

Per fare un unico esempio, in tutto il sistema solare la (19–1) è soddisfatta con $|h_{\alpha\beta}| \lesssim 10^{-6}$.

Linearizzazione delle equazioni di Einstein

A partire dalla (19–1) possiamo calcolare i coefficienti di connessione, definiti dalla (9–23); il tensore di Riemann usando la (10–4) e quello di Einstein in base alla (10–6). In ogni caso si conservano soltanto i termini di primo ordine in $h_{\alpha\beta}$. Ecco il risultato:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}) \tag{19–2}$$

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(h_{\beta\gamma,\delta\mu} + h_{\delta\mu,\beta\gamma} - h_{\beta\delta,\gamma\mu} - h_{\gamma\mu,\beta\delta}) \\ G_{\beta\delta} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\gamma\mu}(h_{\beta\gamma,\delta\mu} + h_{\delta\mu,\beta\gamma} - h_{\beta\delta,\gamma\mu} - h_{\gamma\mu,\beta\delta}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\eta_{\beta\delta}\,\eta^{\gamma\mu}\,\eta^{\lambda\nu}(h_{\gamma\lambda,\mu\nu} - h_{\lambda\nu,\gamma\mu}) \end{aligned} \tag{19–3}$$

Nota: In tutte queste equazioni gli indici sono stati alzati o abbassati usando come tensore metrico $\eta_{\alpha\beta}$, e lo stesso faremo sempre nel seguito. Infatti usare g invece di η produce solo termini correttivi di second'ordine.

Dalla (19–2) si può ricavare la forma esplicita delle equazioni di Einstein (10–13). Queste però assumono forma decisamente più semplice usando, in luogo di $h_{\alpha\beta}$,

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} h\, \eta_{\alpha\beta} \tag{19–4}$$

dove ovviamente $h = h^{\alpha}{}_{\alpha}$. Si verifica facilmente che $\bar{h} = -h$ e qundi

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} \bar{h}\, \eta_{\alpha\beta}.$$

Ciò posto, le equazioni di Einstein nel vuoto ($T_{\alpha\beta} = 0$) diventano:

$$-\eta^{\mu\nu}\, \bar{h}_{\alpha\beta,\mu\nu} - \eta_{\alpha\beta}\, \eta^{\mu\nu}\, \eta^{\varrho\sigma}\, \bar{h}_{\mu\varrho,\nu\sigma} + \eta^{\mu\nu}\, \bar{h}_{\alpha\mu,\beta\nu} + \eta^{\mu\nu}\, \bar{h}_{\beta\mu,\alpha\nu} = 0 \tag{19–5}$$

Il primo termine a primo membro della (19–5) è $\Box \bar{h}_{\alpha\beta}$; gli altri sono necessari per rendere l'equazione "gauge invariante." Spieghiamo il significato di questa affermazione.

Restando nella teoria linearizzata, ci sono due diversi tipi di trasformazioni di coordinate che possono essere usate:

- una trasformazione di Lorentz: questa lascia invariante $\eta_{\alpha\beta}$ e trasforma $h_{\alpha\beta}$ come un normale tensore lorentziano;
- una trasformazione (infinitesima) arbitraria: questa altera il tensore metrico, il che vuol dire che manda $h_{\alpha\beta}$ in un nuovo $h'_{\alpha\beta}$, che però non differisce, quanto a interpretazione fisica, dal vecchio.

Ragionando sulla seconda trasformazione, vediamo che essa appare come una trasformazione del "campo" $h_{\alpha\beta}$, che deve lasciare invarianti le equazioni; esattamente come accade con le trasformazioni di gauge dei potenziali elettromagnetici.

È noto che le equazioni dei potenziali elettromagnetici assumono in generale la forma

$$\Box A_{\mu} + A^{\nu}{}_{,\nu\mu} = -4\pi\, j_{\mu} \tag{19–6}$$

che è gauge invariante; si sfrutta poi l'arbitrarietà della gauge per semplificare l'equazione. Ad es. scegliendo la *gauge di Lorentz*: $A^{\nu}{}_{,\nu} = 0$, che riduce la (19–6) a

$$\Box A_{\mu} = -4\pi\, j_{\mu}.$$

La stessa cosa si può fare con le equazioni di Einstein (19–5): si verifica facilmente che esse sono invarianti sotto la trasformazione

$$h_{\alpha\beta} \mapsto h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} \tag{19–7}$$

dove ξ_α è un arbitrario campo vettoriale. Si può sfruttare la (19–7) per imporre la "condizione di Lorentz"

$$\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\beta} = 0 \tag{19–8}$$

che riduce la (19–5) a

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = 0. \tag{19–9}$$

La (19–7) è la trasformazione indotta su $h_{\alpha\beta}$ dalla trasformazione di coordinate

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha$$

(a meno di termini di secondo ordine nelle ξ^α).

Si vede così che l'invarianza della teoria linearizzata per trasformazioni di Lorentz e di gauge corrisponde a un requisito generale della teoria esatta, ossia l'arbitrarietà nella scelta del SC.

Le (19–8), (19–9) ammettono ancora un'invarianza di gauge, sempre del tipo

$$h_{\alpha\beta} \mapsto h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha}$$

solo che ora ξ_α non è del tutto arbitrario: si verifica senza difficoltà che occorre la condizione

$$\Box \xi_\alpha = 0. \tag{19–10}$$

Fino a questo punto il tensore $\bar{h}_{\alpha\beta}$ ha 6 componenti indipendenti: infatti ne avrebbe 10 in quanto simmetrico, ma ci sono le 4 condizioni (19–8). Si può sfruttare la residua invarianza di gauge per dimostrare che in realtà le componenti indipendenti sono soltanto due: per vederlo, conviene ragionare su un tipo particolare di soluzioni.

Onde piane monocromatiche

Le (19–8), (19–9), in quanto lineari e invarianti per traslazioni in tutte e quattro le coordinate, ammettono soluzioni piane monocromatiche:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \exp(ik_\lambda x^\lambda) \tag{19–11}$$

dove le $a_{\alpha\beta}$ sono costanti complesse. Perché le (19–11) soddisfino le (19–9) occorre e basta che sia $k_\lambda k^\lambda = 0$, e questa ci dice che l'onda si propaga con la velocità della luce. Dalle (19–8) segue poi $k^\beta a_{\alpha\beta} = 0$ e le ampiezze indipendenti non sono 10, ma 6.

Applichiamo ora alle (19–11) una trasformazione di gauge del tipo

$$\xi_\alpha = b_\alpha \exp(ik_\lambda x^\lambda)$$

(che soddisfa automaticamente le (19–10)); si verifica che è possibile scegliere le 4 costanti b_α in modo tale che il tensore $\bar{h}_{\alpha\beta}$ trasformato soddisfi

$$\bar{h}_{\alpha 0} = 0 \qquad \bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0. \tag{19–12}$$

La seconda delle (19–12) ci dice che la traccia di $\bar{h}_{\alpha\beta}$ è nulla: ricordando la relazione (19–4) tra $h_{\alpha\beta}$ e $\bar{h}_{\alpha\beta}$ si vede che ora i due tensori coincidono.

La prima delle (19–12) ci dice invece che $h_{\alpha\beta}$ ha solo le componenti spaziali h_{ij}, che sono soggette alle seguenti condizioni:

$$\Box h_{ij} = 0 \tag{19–13}$$

$$h^{ij}{}_{,j} = 0 \qquad h^i{}_i = 0. \tag{19–14}$$

Per un'onda piana la prima delle (19–14) diventa $k_j h^{ij} = 0$, ossia l'onda non ha componenti nella direzione di propagazione. Si riassumono le (19–14) dicendo che un'onda gravitazionale piana monocromatica può sempre essere messa — con opportuna trasformazione di gauge — in forma *trasversale e a traccia nulla* (TT). Poiché le (19–14) sono in totale 4 equazioni, risulta dimostrato per un'onda piana monocromatica che *le componenti indipendenti di h_{ij} sono soltanto due.*

D'altra parte ogni soluzione delle (19–8), (19–9) può essere scritta come sovrapposizione di onde piane monocromatiche (integrale di Fourier); dato che le (19–12), (19–13), (19–14) sono lineari omogenee, esse saranno soddisfatte da qualsiasi soluzione, e questo dimostra che *tutte le onde gravitazionali possono essere ridotte*, per mezzo di una trasformazione di gauge, *alla forma* TT. D'ora in poi supporremo sempre di essere in queste condizioni.

Stati di polarizzazione

Abbiamo visto che le componenti indipendenti di un'onda gravitazionale sono sempre due; ciò equivale a dire che esistono due soli stati di polarizzazione (indipendenti). Ancora una volta la situazione è analoga a quella di un'onda e.m. La differenza è che l'onda e.m. è descritta da un campo vettoriale (in gauge di Coulomb dal potenziale vettore) e si usano perciò le polarizzazioni lineari secondo direzioni ortogonali. Tutti gli altri stati di polarizzazione, ad es. quelli circolari, si ottengono da combinazioni lineari di questi.

Nel caso gravitazionale abbiamo a che fare con un tensore e gli stati di polarizzazione sono descritti in modo diverso. Supponiamo, per fissare le idee, che l'onda si propaghi in direzione z; allora le sole componenti diverse da zero sarnno h_{xx}, h_{xy}, h_{yx}, h_{yy}. Ci sono però dei vincoli: $h_{xy} = h_{yx}$ per la simmetria e $h_{xx} + h_{yy} = 0$ perché la traccia è nulla. Abbiamo quindi due scelte indipendenti, ad es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(polarizzazione +)}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(polarizzazione} \times\text{)}$$

Una delle differenze è che mentre nel caso e.m. una delle polarizzazioni si ottiene dall'altra con una rotazione di 90°, ora si passa da $+$ a $\times$ ruotando di 45°.

Possiamo vedere la questione dal punto di vista quantistico come segue: è noto che gli stati di polarizzazione circolare di un'onda e.m. corrispondono a fotoni che trasportano un'unità di momento angolare ($\pm\hbar$) rispetto alla direzione di propagazione (elicità). Il fatto che siano possibili solo due valori per l'elicità è strettamente connesso con la massa nulla dei fotoni e con l'equazione di d'Alembert cui obbediscono i campi. Infatti si dimostra che per una particella di massa nulla l'elicità è invariante per trasformazioni di Lorentz: quindi il valore dell'elicità è una proprietà intrinseca della particella, come la massa. Che si presentino due valori opposti dell'elicità, dipende dal fatto che questa s'inverte per riflessioni, e quindi una teoria invariante anche per riflessioni deve ammettere particelle di entrambe le elicità.

La stessa cosa accade nel caso gravitazionale: la quantizzazione del campo (che per ora si sa fare solo nel caso limite di campo debole) porta a "gravitoni" che trasportano *due* unità di momento angolare (elicità $\pm 2\hbar$). Anche i gravitoni hanno massa nulla (eq. (19–3)) e di conseguenza possono esistere solo nei due stati di elicità massima. Un po' impropriamente possiamo dire che "i gravitoni hanno spin 2."

Effetti osservabili delle onde gravitazionali

Dal momento che un'onda gravitazionale è una particolare curvatura dello spazio-tempo, dobbiamo aspettarci che produca gli effetti che sappiamo associati a tale curvatura. Cominciamo perciò calcolando il tensore di Riemann per un'onda in gauge TT: si trova

$$R^i{}_{0k0} = \tfrac{1}{2} h_{ik,00}$$

e tutte le altre componenti sono nulle.

Riprendiamo ora l'eq. (10–8) per l'accelerazione di marea e otteniamo

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -R^i{}_{0k0}\,\xi^k = -\tfrac{1}{2}\ddot{h}_{ik}\,\xi^k \tag{19–15}$$

che s'interpreta come segue: se abbiamo due masse libere in un RIL, in una regione investita da un'onda gravitazionale, esse oscilleranno secondo la (19–15). La loro distanza in generale varierà nel tempo, e questo è un effetto osservabile, come quello prodotto da una forza di marea statica.

Prima di procedere è opportuno chiarire l'interpretazione della (19–15). Nella deduzione che è stata data della (10–8) le coordinate erano quelle di un RIL, e quindi ξ^i rappresentava la separazione spaziale fra le due geodetiche. Ora invece le $\{x^\alpha\}$ sono coordinate in cui l'espressione della metrica differisce poco da quella di Lorentz–Minkowski. Non è la stessa cosa, ma la differenza è dello stesso ordine di $h_{\alpha\beta}$ e quindi possiamo trascurarla.

C'è però ancora un altro punto da discutere: nell'applicazione che ne stiamo per fare ai reali apparati sperimentali, le $\{x^\alpha\}$ sono coordinate di un rif. *solidale alla Terra*, quindi non in caduta libera. Un'analisi accurata del problema è al di là degli scopi di questo corso: si rimanda chi volesse approfondire al Cap. 37 di *Gravitation*. Il risultato finale è che la (19–15) può essere interpretata in senso newtoniano: essa dà l'accelerazione relativa, misurata nel rif. del laboratorio, di due masse che risentano solo l'azione dell'onda gravitazionale. Più esattamente, le masse saranno vincolate solo in senso verticale, per compensare l'azione della gravità locale, ma libere in senso orizzontale.

Due esempi di rivelatori reali

Dato che $|h_{ik}| \ll 1$, l'ampiezza dell'oscillazione sarà piccola rispetto alla distanza media, e possiamo approssimare la (19–15) con

$$\frac{d^2\delta\xi^i}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\ddot{h}_{ik}\,\xi_0^k$$

dove ξ_0 indica la posizione media e $\delta\xi$ lo scostamento dalla media. Integrando:

$$\delta\xi^i = -\tfrac{1}{2}h_{ik}\,\xi_0^k \tag{19–16}$$

e si vede che $\delta\xi/\xi$ è dello stesso ordine di h.

Se invece le due masse sono collegate elasticamente occorrerà aggiungere nell'equazione un termine per la forza di richiamo della molla, e avremo

$$\frac{d^2\delta\xi^i}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\ddot{h}_{ik}\,\xi_0^k - \omega_0^2\,\delta\xi^i.$$

Per onde monocromatiche di frequenza ω questa s'integra immediatamente:

$$\delta\xi^i = \frac{\omega^2 h_{ik}\,\xi_0^k}{2(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{19–17}$$

Rispetto alla (19–16) abbiamo il fattore di risonanza $\omega^2/(\omega^2 - \omega_0^2)$, nel quale ovviamente abbiamo trascurato l'effetto dello smorzamento dell'oscillatore.

I due casi (19–16) e (19–17) descrivono — in estrema semplificazione — i due tipi di antenne gravitazionali in uso o in costruzione: la prima corrisponde al sistema LIGO–VIRGO dove le masse sono libere, e la sensibilità viene aumentata realizzando più grande possibile la loro distanza ξ_0; il secondo rappresenta invece il classico sistema di Weber, dove la molla è costituita dalla stessa elasticità del blocco rigido che costituisce l'antenna.

La sensibilità di VIRGO, a frequenze di 100 Hz e con tempi d'integrazione dell'ordine di un anno, dovrebbe arrivare a 10^{-26}: vogliamo ora vedere che cosa ciò significa in termini di energia. A questo scopo abbiamo bisogno di una formula, che non possiamo qui giustificare, per la densità di energia di un'onda gravitazionale:

$$T_{00} = \frac{1}{32\pi} \langle \dot{h}_{ik} \dot{h}^{ik} \rangle$$

dove la media va intesa su regioni spaziali grandi rispetto a una lunghezza d'onda, e su tempi lunghi rispetto a un periodo.

Per un'onda monocromatica $h_{xx} = -h_{yy} = a \cos(kz - \omega t)$ si trova

$$T_{00} = \frac{1}{32\pi} \, \omega^2 a^2$$

che bisogna moltiplicare per c^2/G se vogliamo usare unità ordinarie, e ancora per c per avere l'intensità. Dunque

$$S = \frac{c^3 \omega^2 a^2}{32\pi G}. \tag{19–18}$$

Con i dati che abbiamo assunti in precedenza ($a = 10^{-26}$, $\omega = 600\,\mathrm{rad/s}$) si trova $S = 10^{-10}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}}$.

Per stimare questo risultato, confrontiamolo con la radiazione e.m. totale che arriva da una stella: si ottiene la stessa intensità per stelle di magnitudine 13, ossia visibili già con un piccolo telescopio. Le stelle più deboli che si possono rivelare con gli strumenti odierni hanno intensità inferiori per almeno 4 ordini di grandezza. Questo ci porta a una prima conclusione: la rivelazione delle onde gravitazionali è molto meno efficiente di quella delle onde e.m. Quando avremo valutato, più avanti, la potenza emessa da sorgenti realistiche, potremo anche concludere che non si può dire invece che l'emissione sia debole in assoluto.