

Per un inserimento organico della relatività
nell'insegnamento secondario

Prima parte:
considerazioni generali

Relatività: che cosa fare, e perché?

La relatività interessa e affascina: perché?

Parla di spazio, tempo, luce, universo... Dei “misteri” del tempo, di cose che non sono come sembra suggerire il senso comune, di paradossi...

Il problema è trasformare questo interesse generico, emotivo e anche superficiale, in comprensione scientifica.

Si presentano poi delle alternative, tra le quali scegliere: a che cosa va dedicato il tempo disponibile, che è comunque poco?

– A discutere gli aspetti di principio, i cambiamenti di punto di vista, le possibili diverse interpretazioni?

– A sviluppare il paradigma relativistico, attraverso fatti e fenomeni non meno che per mezzo di ragionamenti teorici, per illustrare il posto che occupa oggi la relatività nel quadro complessivo della fisica?

Per più motivi la mia preferenza va alla seconda alternativa; nel seguito cercherò di spiegare questa scelta.

Questioni didattiche

Insegnare relatività richiede prima di tutto di trattare in modo diverso e approfondito le basi della meccanica.

In particolare:

- *referimenti inerziali e non*
- *il principio di relatività galileiana*
- *moto dei gravi e cambiamenti di riferimento.*

Ma è anche un'opportunità e una grande motivazione per argomenti che presi a sé possono apparire poco interessanti, al limite noiosi.

Primo fra tutti, proprio la *caduta dei gravi*, da Galileo ad Einstein.

Alcuni nodi e alcune difficoltà

1. La relatività non è solo simultaneità, dilatazioni ecc.: è fatti, fenomeni, esperimenti *reali*.

2. *Massa ed energia*: uno dei nodi centrali.

Chi non conosce $E = m c^2$?

Ma conoscere la formula è un conto, aver capito che cosa significa è un altro. E qui purtroppo è molto facile trovare, anche nei testi, dei veri e propri errori.

3. *Il problema della geometria*: nell'attuale insegnamento matematico e nella formazione degli insegnanti.

Vediamo meglio.

Approccio “tradizionale” e approccio “geometrico”

Quello che definisco approccio tradizionale posso supporlo noto, perché è prevalente nella tradizione didattica, nell'università e nei testi per la s.s.s.

L'approccio geometrico lo è molto meno, e forse a volte viene anche frainteso.

Non si tratta — poniamo — di rappresentare graficamente le trasformazioni di Lorentz, ma di *non usarle affatto*.

Così come nell'usuale geometria euclidea (sintetica) non si usano coordinate cartesiane, equazioni di rette o curve e trasformazioni di coordinate, per dimostrare teoremi e risolvere problemi.

Approccio geometrico vuol dire **Minkowski**:

– *spazio-tempo*

e soprattutto

– *metrica invariante*.

Un problema didattico concreto per l'approccio geometrico è il sostanziale abbandono della geometria classica (euclidea) nell'attuale insegnamento della matematica e nella formazione degli insegnanti.

(Anche se a dar retta alle “indicazioni nazionali” ci sarebbe “di tutto e di più...”)

Non è questa la sede per esaminarne storia, significato, motivazioni (la cosiddetta “algebrizzazione della geometria”).

Ma non ho dubbi che nell'insegnamento secondario si tratti di un indirizzo dannoso, per l'insegnamento della matematica e poi anche della fisica.

Qui si aprirebbe un lungo discorso che mi limito ad accennare.

Abbiamo il diritto di porre richieste ai colleghi matematici?

S'intende, non in modo grettamente strumentale (“a me servirebbe che tu facessi...”) ma invece come lavoro *congiunto* sugli obiettivi formativi; come contributo alla riflessione sulle conseguenze di certe scelte...

Un esempio

Una pulsar che si allontana da noi con velocità $v = 0.6 c$ emette lampi di luce a intervalli di 0.2 s (nel suo riferimento di quiete).

Disegna il diagramma orario della pulsar, e dei lampi di luce che arrivano a noi.

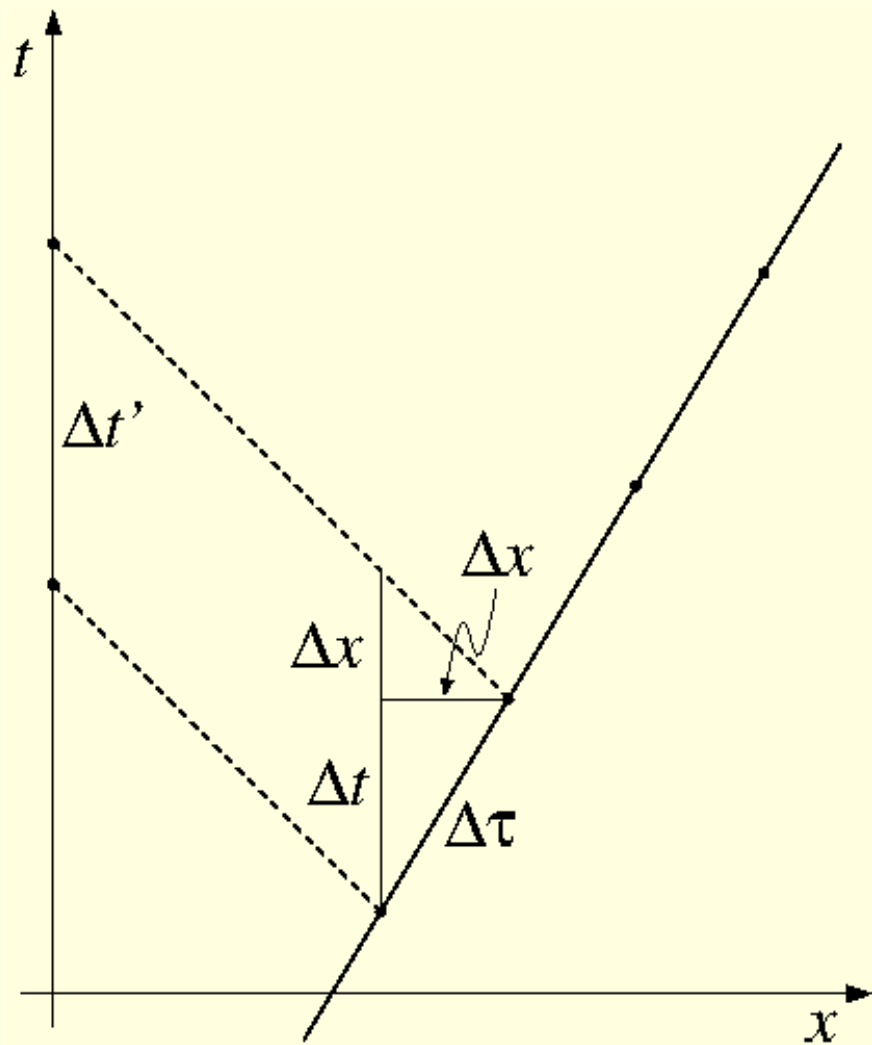
Qual è l'intervallo di tempo tra gli eventi di due lampi successivi, nel nostro riferimento?

Con quali intervalli riceviamo i lampi?

Nota 1: Mentre esistono molte pulsar con lampi a quella frequenza e anche maggiori, non ne conosciamo di così veloci. Perciò il dato sulla velocità non va preso sul serio: è stato scelto per rendere più evidenti gli effetti relativistici.

Nota 2: Nella discussione dell'esempio si usano unità in cui $c = 1$.

Semplifica le formule, e aiuta a vedere lo spazio-tempo come un tutto unitario.



$$\Delta x = v \Delta t$$

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = (1 - v^2) \Delta t^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2}} = 1.25 \Delta \tau$$

$$\Delta x = \frac{v \Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\Delta t' = \Delta t + \Delta x = \frac{1 + v}{\sqrt{1 - v^2}} \Delta \tau$$

$$= \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} \Delta \tau = 2 \Delta \tau.$$

Relatività ristretta e relatività generale

(solo pochi cenni per un grande argomento)

Vedremo meglio in seguito che fa parte della mia proposta che RR e RG vadano *trattate insieme*: arrivo a dire che *la relatività è una*.

Purtroppo ci si scontra con una resistenza non piccola degli insegnanti.

Motivazioni addotte:

- la solita “mancanza di tempo”
- una supposta maggiore difficoltà.

La mancanza di tempo vale per qualunque argomento, quindi si tratta di *fare delle scelte*. Occorrerebbe approfondire, ma non posso permetter-melo: appunto per ragioni di tempo.

Quanto alla difficoltà, che è un'aura che avvolge a tutti i livelli la RG, credo di aver dimostrato nel corso di questi anni che *non esiste* (a parte la questione già accennata della geometria).

C'è invece a mio parere un “gap” culturale.

La RG richiede una sensibilità, meglio che una conoscenza, in campi particolari anche se fondamentali:

- *gravitazione*
- *astronomia*
- *cosmologia*.

Da tempo i laureati in fisica ricevono pochissimi stimoli in queste direzioni (non era così ai tempi di Einstein o di Heisenberg...).

Perfino la “vecchia” gravitazione newtoniana non di rado è trascurata nell'insegnamento della dinamica; dimenticando che senza la meccanica del sistema solare tutto il lavoro di Newton e dei suoi continuatori sarebbe storicamente privo di senso.

Filosofia et al.

Non sono un sostenitore della dimensione storica e filosofica nell'insegnamento della fisica.

Detto in termini un po' brutali: prima di fare filosofia (e storia) della fisica, la fisica *bisogna saperla*.

Non dobbiamo incoraggiare i ragazzi a fare chiacchiere su cose che non conoscono.

Ciò premesso, è importante che l'insegnante abbia un'adeguata sensibilità, e che sfrutti tutte le occasioni per avvicinare i ragazzi a certe idee e a certi problemi. Ma con attenzione...

Comunque sia, parlando di relatività alcune riflessioni filosofiche s'impongono.

Una per tutte: *che cos'è lo spazio-tempo?*

- esiste *oltre* (accanto, sotto) gli oggetti materiali?
- oppure è solo la *forma* della relazione fra questi?

La prima scelta prende il nome di *sostanzialismo*, la seconda di *relazionismo*.

Si può far risalire questa dualità (per lo spazio) a **Newton** e a **Leibniz**, ma ha percorso tutta la filosofia della scienza.

Per la relatività, la visione sostanzialista è legata al nome di **Minkowski**, che è stato l'inventore dello spazio-tempo, e ha pronunciato (nel 1907) la famosa frase:

D'ora in avanti lo spazio singolarmente inteso, ed il tempo singolarmente inteso, sono destinati a svanire in nient'altro che ombre, e solo una connessione dei due potrà preservare una realtà indipendente.

Si tende invece a vedere Einstein come relazionista, ma a mio parere le posizioni filosofiche di E. non sono mai troppo univoche.

Domanda: è corretto opporre un Einstein relazionista a un Minkowski sostanzialista?

Oppure M. ha capito quello che *realmente* aveva scoperto E.?

In epoca più recente, possiamo annoverare Wheeler tra i sostanzialisti, Weinberg tra i relazionisti. Forse la maggior parte dei fisici teorici sono relazionisti, e anche la QFT spinge in quella direzione.

Tuttavia, anche qui occorrerebbe approfondire...

La mia scelta è stata dalla prima parte (sostanzialismo) ma non ho mai argomentato diffusamente perché. Anche oggi, non posso andare oltre il brevissimo cenno che segue.

Forse il motivo più forte (non filosofico) è che una visione sostanzialista facilita molto l'approccio alla RG.

Fisica o filosofia?

Può apparire che un approccio più “filosofico” riesca più accettabile agli studenti: da un lato perché meno “pesante” di numeri e formule, dall'altro perché più vicino ad altre materie.

In poche parole, perché rende la fisica più “digeribile”, anche se sempre difficile.

Pensiamo quindi di poter affermare che i risultati ottenuti indichino che ciò che non piace agli studenti non sia tanto (o soltanto) il fatto che la Fisica sia difficile in assoluto quanto il fatto che sia troppo difficile rispetto a quello che offre in termini di strumenti utili per orientarsi nella complessità del mondo di oggi.

(Fantini, Grimellini Tomasini, Levrini, Scorza: LFnS **37** (2005), 118.)

Un dubbio: siamo sicuri che altre materie offrano di più?

A scanso di equivoci: la citazione che ho appena riportata conclude il resoconto di un lavoro in classe, che non sembra certo una trattazione semplificata ed edulcorata della relatività.

Aveva tuttavia dei limiti: pur avendo impegnato le classi per almeno 20 ore, non è andata oltre i primissimi elementi (critica della simultaneità, trasformazioni di Lorentz, “composizione” delle velocità, diagrammi di Minkowski, invarianza del tempo proprio).

Una scelta fatta per dare spazio alla discussione epistemologica.

Le mie riserve hanno carattere più generale, e vogliono mettere sull'avviso verso la tentazione di sviluppare, in un tempo limitato, un programma più ampio; facendo posto — al tempo stesso — alle considerazioni storico-filosofiche.

Col rischio di scivolare verso una fisica di “chiacchiere”.

La mia scelta, come si vedrà, va piuttosto verso uno spettro più ampio di contenuti genuinamente fisici, teorici e sperimentali, inclusa la RG.

Un'autocitazione

Quanto agli aspetti didattici del problema, occorre stare particolarmente attenti: è troppo facile incoraggiare il verbalismo, la superficialità, e via dicendo. Da secoli, i fisici vantano sui filosofi e sugli storici una superiorità di metodo che ha prodotto maggior concretezza di risultati. È vero che, male intesa, questa diversità di tradizione ha provocato chiusure e tecnicismi: ma attenzione, che la giusta reazione a certi eccessi non finisca per riportare l'insegnamento della fisica a uno stile e un metodo pregalileiani!

(E. Fabri: LFnS **8** (1975), 21.)

Seconda parte:
alcuni punti nodali

La mia proposta, emersa dal lavoro di molti anni, si trova esposta nella forma più completa nel *Quaderno 16* (2005) di *La Fisica nella Scuola*, intitolato

Insegnare relatività nel XXI secolo

Dal “navilio” di Galileo all’espansione dell’Universo

Qui potrò solo dare alcuni cenni, e ho scelto di farlo affrontando pochi punti nodali.

Purtroppo ciò implica che dovrò dare per scontate, o nominare appena, alcune questioni importanti: per es. significato e ruolo dei due principi

- principio di relatività (PR)
- principio di equivalenza (PE).

L'esperimento di Hafele e Keating

È il primo dei “nuovi esperimenti”, realizzato nel 1971.

La sua funzione in questo progetto è molteplice:

- provare l'inesistenza del tempo assoluto
- sottolineare il ruolo dei riferimenti inerziali e non inerziali
- indicare l'uso del principio di equivalenza.

Descrizione dell'esperimento

Due orologi atomici furono montati su due aerei che facevano il giro del mondo: l'uno in senso orario, l'altro in senso antiorario (uno verso Est, l'altro verso Ovest).

Gli orologi erano stati sincronizzati alla partenza; quando atterrarono di nuovo all'aeroporto dal quale erano partiti, segnavano tempi diversi.

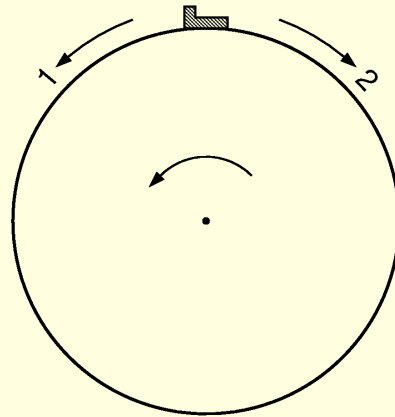
Più esattamente:

Alla fine del viaggio, durato un po' più di due giorni, l'orologio che aveva viaggiato verso Ovest era *avanti* rispetto all'altro di **332 ns**.

Schematizziamo l'esperimento

In primo luogo supporremo che tutto il viaggio degli aerei si svolga *lungo l'equatore*.

Supponiamo poi che il moto degli aerei sia *uniforme* (con la stessa velocità per entrambi) e la *quota costante*; in particolare trascureremo le variazioni di quota al decollo e all'atterraggio.



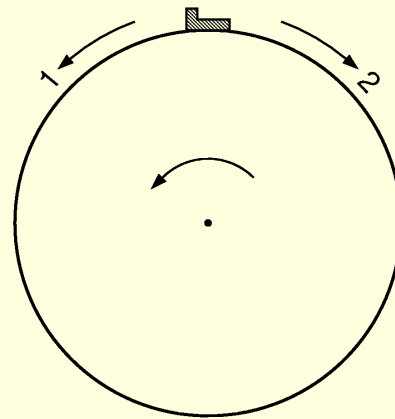
Gli orologi partono dall'aeroporto A posto all'equatore; l'orologio **1** gira in senso *antiorario*, l'orologio **2** in senso *orario*.

Quando ritornano in A, si confronta l'intervallo di tempo $\Delta\tau_1$ segnato dall'orologio **1** con quello $\Delta\tau_2$ segnato dall'orologio **2**.

L'esperimento mostra che

$$\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1:$$

questo dobbiamo discutere e interpretare.



Una piccola divagazione

Ho detto “l'orologio 1 gira in senso antiorario” e forse non ci avete trovato niente da ridire.

Eppure qualcosa da dire c'è: avrei dovuto dire “gira in senso antiorario *guardando da Nord*”.

Allo stesso modo, sebbene sia corretto dire che la Terra *ruota da Ovest a Est*, non è altrettanto corretto dire che la rotazione è *antioraria*. Lo è solo se vista da Nord, mentre per chi la guardi da Sud è oraria.

Discussione dell'esperimento

Contro le apparenze, i due orologi *non sono in condizioni simmetriche*, causa la rotazione terrestre.

Sia **K** un RI che si muove insieme alla Terra ma senza ruotare: in **K** l'orologio **1** ha velocità *maggiore* di **2**.

Anzi: rispetto a **K** ambedue gli orologi *viaggiano verso Est*: infatti la velocità di un aereo normale è minore della velocità periferica della Terra.

All'equatore questa vale circa **460 m/s**, ben superiore alla velocità del suono; ma gli aerei di linea non sono supersonici!

La differenza fra i due aerei è che (sempre rispetto a **K**) uno viaggia più velocemente dell'altro, perché **1** *somma* la sua velocità a quella della Terra, mentre **2** *la sottrae*.

Il tempo segnato da un orologio dipende dal suo moto?

Il condizionamento dovuto alla tradizione spinge a leggere il risultato dell'esperimento H–K in un certo modo, che non è il migliore.

Questo è un punto centrale, che occorre esaminare attentamente.

È molto facile credere che l'esperimento dimostri che il tempo segnato da un orologio *dipende dal suo moto*.

La nostra discussione sarà centrata proprio su questo punto.

Il ritardo è genuino?

Un dubbio che può venire in mente è: come possiamo sapere che durante il viaggio sugli aerei gli orologi non siano stati disturbati in qualche modo?

È un problema presente in qualunque esperimento di fisica.

È giusto ricordare che agli esperimenti non si deve credere ciecamente: un esperimento può anche essere sbagliato, può essere stato fatto in condizioni scorrette.

Ma gli esperimenti significativi vengono verificati, analizzati, vagliati sotto tutti i punti di vista: alcuni resistono, altri no.

Se l'esperimento H–K ha retto alle critiche, conviene accettarne il risultato.

La marcia di un orologio non dipende dal suo moto

Perché non si può dire che il tempo segnato dall'orologio dipende dalla velocità dell'aereo?

In primo luogo, *per il PR*.

Questo ci obbliga a dire che *ogni orologio che sta in un RI è uguale a qualunque altro*.

Non ci può essere nessuna differenza tra i due: altrimenti l'esperimento ci permetterebbe di determinare lo stato di moto di un orologio.

La seconda controindicazione è che in tal modo si apre la strada a una serie di fraintendimenti filosofici (presunto ruolo dell' "osservatore", soggettività dei dati dell'esperienza, ecc.) che non hanno niente a che fare con la fisica, ed è bene tenere lontani il più possibile.

Ma soprattutto:

Qui non stiamo discutendo il classico caso di due orologi in moto relativo uniforme, osservati dal rif. in cui uno è fermo e l'altro è in moto.

Qui ci sono sì due orologi, ma nei momenti in cui li confrontiamo — alla partenza e all'arrivo — essi sono in *quiete relativa*: entrambi fermi all'aeroporto.

Quest'osservazione apre però la porta a un'obiezione più fondamentale.

Visto che partono e arrivano insieme, *i due orologi non possono trovarsi entrambi in RI*, che per definizione sono in moto relativo TRU.

Gli orologi di H–K non sono in riferimenti inerziali!

Ma se un aereo che viaggia intorno alla Terra non è un RI, il richiamo al PR è *fuori luogo*.

Ragioniamo...

È senz'altro vero che gli orologi sono accelerati, con accelerazione v^2/R (se v è la velocità rispetto a **K**).

A conti fatti, le accelerazioni sono risp. 0.07 m/s^2 e 0.009 m/s^2 : in entrambi i casi piccole rispetto a g , oltre un fattore 100 (il che prova che non sono in caduta libera).

Ma nemmeno un orologio fermo sulla Terra è in caduta libera; perciò la vera domanda diventa questa: *che effetto ha sugli orologi atomici usati da Hafele e Keating, il fatto che gli aerei sono accelerati?*

Chiediamo aiuto al PE

L'effetto di tali accelerazioni sarà del tutto equivalente a quello di una variazione di g .

Nel nostro caso, una variazione inferiore all'**1%**.

(Infatti sugli aerei agisce anche la forza di gravità: l'accelerazione ha solo l'effetto di cambiarne un po' il valore nel rif. dell'aereo).

Ma noi sappiamo che la marcia un orologio atomico è influenzata *in modo trascurabile* da variazioni di g di quell'ordine.

Quindi la risposta è **no**: *a questo livello gli effetti dell'accelerazione degli aerei sono irrilevanti.*

La relatività è una

Qui si vede, su un esempio concreto ma fondamentale, che cosa vuol dire che *la relatività è una*.

Non si può discutere un problema come questo, che tradizionalmente sarebbe considerato di RR, senza far uso del PE, ossia senza idee che appartengono alla RG.

Riepilogando

Il moto, nel senso di moto uniforme dell'aereo, non ha effetto grazie al PR.

L'accelerazione centripeta del rif. possiamo ritenerla equivalente a una forza di gravità addizionale.

L'effetto di questa sull'orologio possiamo studiarlo in laboratorio e mostrare che è trascurabile.

Il tempo assoluto non esiste

Torniamo dunque all'esperimento.

Sappiamo che gli orologi vanno bene, che non ci sono ragioni fisiche perché non debbano segnare il tempo giusto.

Quindi se nell'esperimento H–K i due orologi, *partiti d'accordo*, ritornano segnando *tempi diversi*, non si può più parlare di *tempo assoluto*.

Ciascun orologio segna *il suo tempo*, che dipende dal modo come esso percorre lo spazio-tempo.

Un'analogia: i percorsi stradali

(È un'analogia che vale molto di più di quanto può sembrare a prima vista...)

È ovvio che non c'è una sola distanza fra due città: *dipende dalla strada*.

Non ci verrà certo in mente di dire che il contachilometri della nostra macchina funziona diversamente a seconda della strada che facciamo: è la lunghezza del percorso che *non è assoluta*.

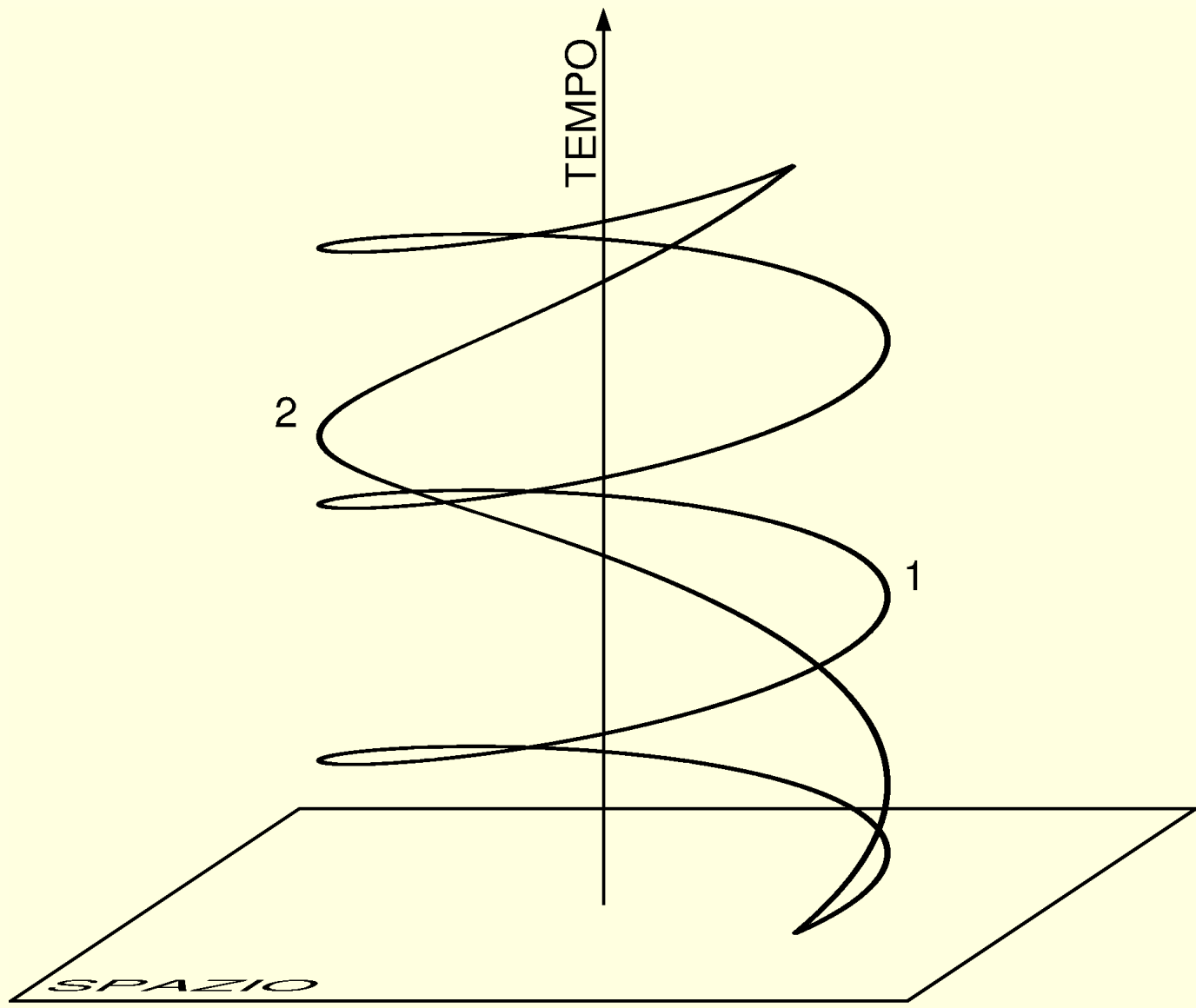
Da una città all'altra si può andare per più strade (concettualmente infinite) e *ciascun percorso ha una sua lunghezza*.

Nessuno ci trova niente di strano, perché ci siamo abituati per lunga esperienza.

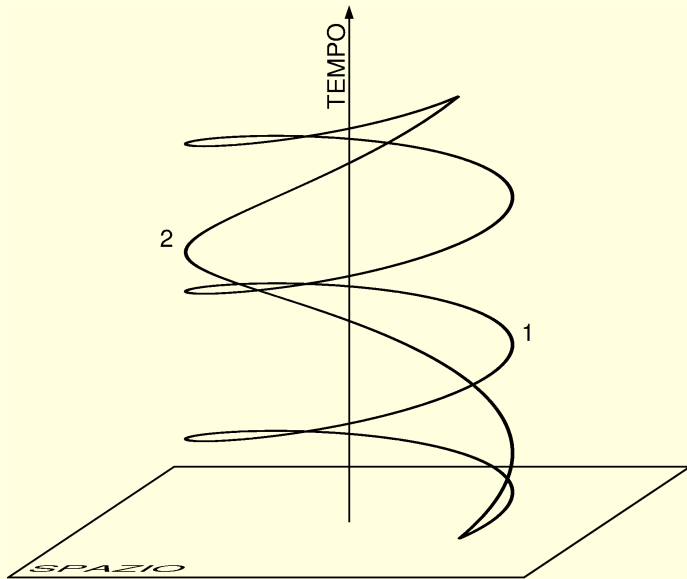
Ora stiamo scoprendo che *con lo spazio-tempo succede la stessa cosa.*

Fissati due punti dello spazio-tempo, *esistono infiniti percorsi* (ossia moti di corpi) che li uniscono, e ciascuno ha una sua “lunghezza” (leggi: *tempo segnato dall'orologio*).

È questo il quadro concettuale che in relatività *sostituisce il tempo assoluto* newtoniano.



Spiegazione della figura



Rappresenta lo spazio-tempo, con due sole dimensioni spaziali.

Le due eliche, contrassegnate 1 e 2, sono le linee orarie dei due aerei.

Entrambe “salgono” nel tempo in senso antiorario, come già detto; ma 1 fa tre giri nel tempo in cui 2 ne fa solo uno, causa la diversa velocità in **K**.

Apparentemente l'elica 1 è più lunga, perché siamo abituati a guardare le figure con la metrica euclidea.

Invece con la metrica di Minkowski, causa il segno meno alla parte spaziale, la 1 è **più corta**.

E infatti l'orologio 1 segna un intervallo di tempo (proprio) **più breve**.

L'inerzia dell'energia

Questa è la denominazione più corretta, al posto della consueta “equivalenza massa-energia.”

Einstein intitola un lavoro del 1905:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?

In breve: se a un corpo *fermo* cediamo energia in modo che *resti fermo*, *la sua massa aumenta*.

Esempi:

- si scalda un corpo
- si carica la molla di un orologio
- si porta un atomo in uno stato eccitato.

Viceversa:

- un corpo cede calore all'esterno
- il Sole emette radiazione
- l'atomo torna allo stato fondamentale.

In termini quantitativi, Einstein dimostrò che in quelle condizioni si ha

$$\Delta m = \Delta E / c^2.$$

È così che si arriva alla famosa relazione

$$E = mc^2$$

che però — **attenzione!** — vale per un corpo *fermo*.

Massa invariante e inerzia dell'energia

Supponiamo di avere già stabilito la relazione fondamentale

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

dove m è la massa *invariante*, ossia quella che si misura con $F = ma$ in un rif. nel quale la velocità del corpo è $\ll c$.

L'inerzia dell'energia si riferisce a *questa* massa. Dobbiamo ora vedere come si dimostra e che cosa significa.

Supponiamo ancora di aver già dimostrato che la relazione tra quantità di moto e velocità è:

$$p = m \gamma v$$

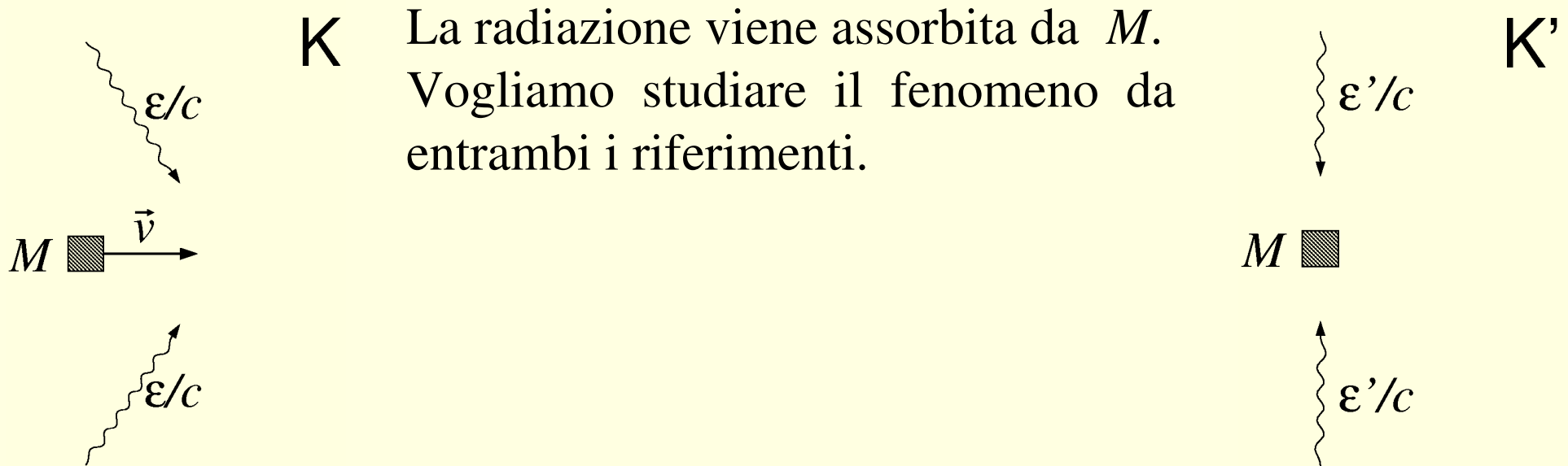
dove γ ha la nota espressione

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Un esperimento ideale

Abbiamo un corpo di massa M , nero (assorbitore ideale). Su di esso mandiamo due pacchetti di radiazione (es. impulsi laser) uguali, che provengono da direzioni opposte nel rif. K' in cui M è fermo. Sia ε' l'energia di ciascun pacchetto.

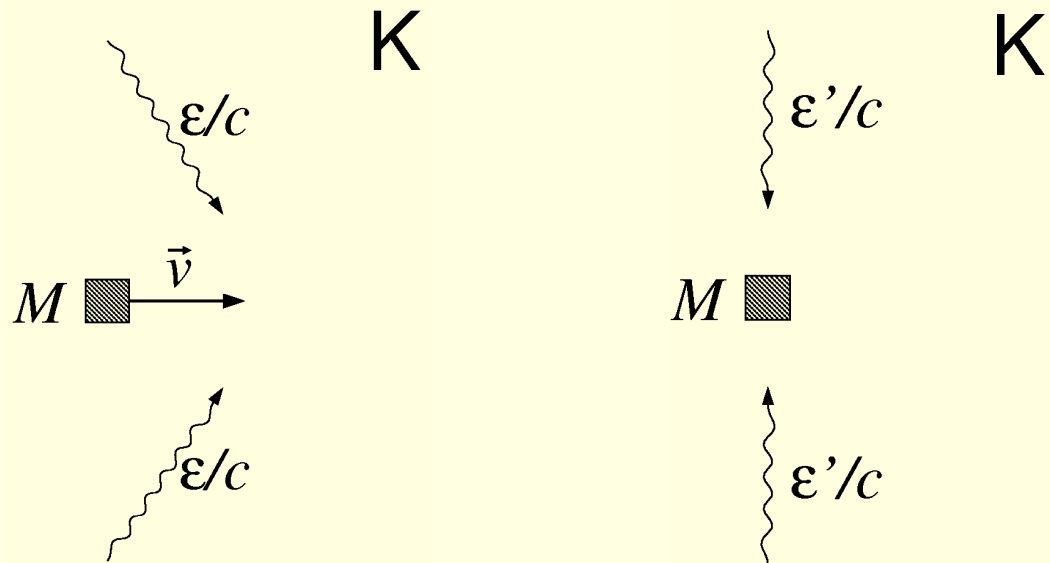
Nel rif. K (laboratorio) M si muove verso destra, con velocità v . I pacchetti di radiazione si muovono obliquamente (e hanno energia ε diversa da ε' , che non occorre conoscere).



Iniziamo dal rif. K' .

Qui M è inizialmente fermo; la q. di moto si conserva, quindi M *rimane fermo* anche dopo aver assorbito la radiazione.

Ne segue che anche in K la sua velocità, che era inizialmente v , dovrà restare *invariata*.

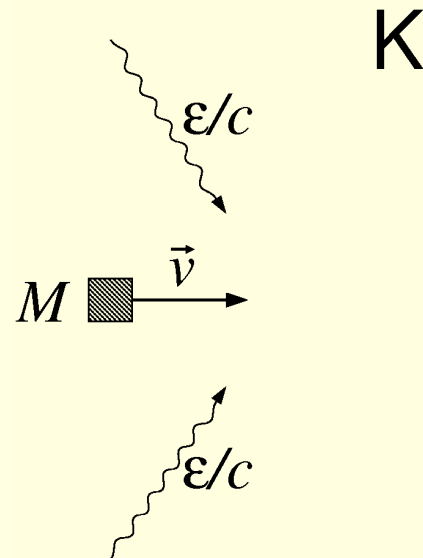


Ragioniamo invece applicando la conservazione della q. di moto in **K**. Sia α l'angolo che la direzione della radiazione forma con la verticale; sappiamo che un pacchetto di energia ε ha q. di moto (modulo) ε / c .

Dunque se v_f è la velocità finale di M , avremo:

$$M \gamma_f v_f = M \gamma v + 2 (\varepsilon / c) \sin \alpha$$

che è in contraddizione con $v_f = v$!



Dov'è l'errore?

L'idea di Einstein è che l'errore stia nell'aver dato per scontato che la massa resti invariata. Proviamo infatti a supporre che la massa finale M_f sia diversa da M ; allora potremo salvare $v_f = v$.

Scriviamo

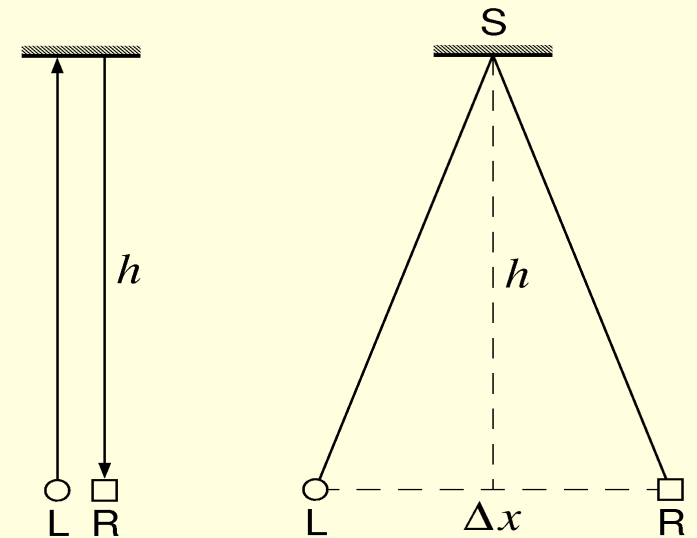
$$M_f \gamma v = M \gamma v + 2 (\varepsilon/c) \sin \alpha$$

Per arrivare al risultato finale abbiamo ancora bisogno di determinare α , ma per questo basta ripensare all'orologio a luce: si vede che $\sin \alpha = v/c$. Allora

$$M_f = M + 2 \varepsilon / (\gamma c^2).$$

Ma il corpo M ha giusto assorbito l'energia 2ε , che possiamo quindi sostituire con ΔE :

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2).$$



Interpretazione

Siamo arrivati a

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2) \quad (*)$$

che in parole si esprime così:

*Quando un corpo che si muove con velocità v assorbe un'energia ΔE senza cambiare velocità, la sua massa **aumenta** come indicato dalla (*).*

In particolare, dato che per un corpo fermo $\gamma = 1$:

*Quando un corpo **fermo** assorbe un'energia ΔE **restando fermo**, la sua massa **aumenta** di*

$$\Delta M = \Delta E / c^2.$$

Nelle parole di Einstein:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia.

Commenti importanti

1. Abbiamo stabilito la relazione $\Delta M = \Delta E / c^2$ con un particolare esperimento ideale, ma la sua validità è *universale*.

Infatti possiamo dare energia al corpo per una strada e poi toglierla per un'altra strada. Se la variazione di massa non fosse sempre la stessa, ci troveremmo ad avere uno stato finale del corpo uguale a quello iniziale, ma con massa diversa...

2. Abbiamo usato un esperimento *ideale*; questo non significa che “nella realtà” le cose vadano diversamente...

Un esperimento ideale usa la fisica conosciuta: è solo un modo per descrivere una deduzione teorica.

Se accettiamo la tale e tale legge generale, allora ne segue necessariamente che ...

La cosiddetta “massa relativistica”

L'inerzia dell'energia *non ha niente a che fare* con la “massa relativistica”.

Questa viene introdotta per salvare la relazione $p = m v$, che nella dinamica relativistica non vale se m è la *massa invariante*: quella che figura in

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4.$$

In realtà la massa relativistica *non è che l'energia* di un corpo in moto, divisa per c^2 . Apparentemente sembra giustificare la “famosa relazione” $E = mc^2$.

Ma è *del tutto inutile*: nessun fisico la usa mai, e serve solo a creare confusione.

La relazione valida in generale è

$$E = m \gamma c^2$$

dove si legge che *ci sono due modi distinti* per cambiare l'energia di un corpo:

- a) cambiarne la velocità, col che cambia γ
- b) cedergli energia senza cambiare la velocità (es. dell'esperimento ideale), col che cambia m .

Che succede quando si scalda un corpo?

Per es. un pezzo di ferro...

Succede che la sua massa *aumenta* (di pochissimo: nessuna bilancia potrebbe rivelarlo).

Ma a livello microscopico?

Gli atomi del ferro sono sempre in movimento: oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio. Se si aumenta la temperatura, l'ampiezza media delle oscillazioni cresce: crescono quindi tanto l'energia cinetica come quella potenziale.

E le masse?

Le masse (invarianti) degli atomi *non cambiano*; eppure la massa del pezzo di ferro aumenta...

Dobbiamo quindi concludere che la massa *non è additiva*:

in generale la massa di un sistema non è uguale alla somma delle masse delle parti componenti.

Massa non additiva e difetto di massa

Nel caso del pezzo di ferro, o anche di un gas, la massa del sistema è *maggiore* della somma di quelle dei componenti.

Ma può anche essere *minore*: è quello che accade

- in una *molecola* rispetto agli *atomi* che la formano
- in un *atomo* rispetto a *nucleo ed elettroni*
- in un *nucleo* rispetto ai *protoni e neutroni*.

In tutti questi casi si parla di *difetto di massa*.

Per atomi e molecole il difetto di massa è piccolissimo e non misurabile: 10^{-9} o 10^{-10} della massa.

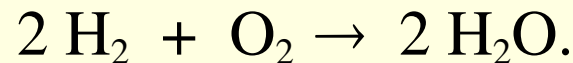
Per i nuclei invece è dell'ordine di 10^{-3} e può essere misurato con grande precisione.

Ma in linea di principio *non c'è nessuna differenza*.

Un esempio più complicato: una reazione chimica

In un recipiente (a pareti robuste e isolanti) mettiamo due moli d'idrogeno e una di ossigeno, a temperatura e pressione ambientali. Il volume totale è quindi circa 67 litri.

Con la solita scintilla inneschiamo la reazione che produce acqua:



Domanda: Confrontare la massa totale prima e dopo la reazione.

Risposta 1: Dato che due molecole di H_2O hanno massa minore di una molecola di O_2 più due di H_2 , la massa sarà *diminuita*.

Risposta 2: Dato che il sistema è isolato, l'energia e quindi la massa *non cambia*.

La risposta esatta è la 2.

Spiegazione e numeri

L'entalpia di reazione è **572 kJ**.

Questo è il calore che occorre sottrarre perché la reazione avvenga a temperatura e pressione costanti: in queste condizioni si formerebbero **36** grammi di acqua liquida (**36 cm³**).

La massa diminuirebbe in corrispondenza:

$$572 \text{ kJ} / c^2 = 6.4 \times 10^{-12} \text{ kg} = 6.4 \times 10^{-9} \text{ g}.$$

La diminuzione è dovuta in buona parte al *difetto di massa* delle molecole di H₂O, ma anche all'*ulteriore legame* delle molecole nell'acqua liquida.

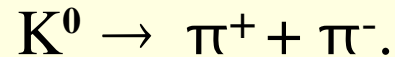
Se invece si lascia il sistema isolato, la temperatura e la pressione salgono moltissimo.

Ma dato che l'energia non è cambiata, non cambia neppure la massa.

N.B. L'esperimento è irrealizzabile, per varie ragioni...

L'esempio del K^0

Il mesone K^0 è una delle prime particelle “strane” che sono state scoperte. Ha una vita media molto breve ($< 10^{-10}$ s) e diversi modi di decadimento. A noi interessa quello in due pioni:



La massa del K^0 è $498 \text{ MeV}/c^2$; quella di ciascun pione è $140 \text{ MeV}/c^2$.

Come si vede, mancano $218 \text{ MeV}/c^2$: dov'è finita la massa mancante?

Si dice di solito che questa massa si è “convertita in energia”: infatti i due pioni non sono fermi, ma hanno un'energia cinetica, che fra tutti e due vale appunto 218 MeV .

Però attenzione: *se si vuole usare la massa relativistica*, i pioni — essendo in moto — hanno una massa *maggiore* di quella di riposo, esattamente **249 MeV/c²** ciascuno.

Infatti l'energia si conserva, e l'energia di riposo iniziale del K⁰, che è **498 MeV**, si sarà ripartita tra i due pioni: **249 MeV** per ciascuno.

Ma allora la somma delle masse finali è uguale alla massa iniziale, e **non c'è nessuna conversione di massa in energia!**

Se invece usiamo la *massa invariante*, allora effettivamente la somma delle masse finali è minore di quella iniziale, e la differenza si ritrova come energia cinetica.

Però l'energia si conserva comunque, e quindi non si deve parlare in ogni caso di conversione di massa in energia: se mai, di conversione di *energia di riposo* in *energia cinetica*.

Modelli cosmologici – premessa

Ho già mostrato che una presentazione della relatività non può fare a meno della **RG**. Ma c'è ovviamente un altro motivo: la **RG** è la *porta* per la *comprensione dell'Universo*, della sua struttura ed evoluzione.

Come si può ignorare un tale argomento?

Ma un conto è dire questo, e un altro è avere un traccia didattica corretta e accessibile...

Che cos'è un modello cosmologico?

Fare un modello cosmologico significa fare ipotesi sulla *distribuzione di materia* nell'Universo e sulla *geometria dello spazio-tempo*.

Le due ipotesi non sono indipendenti nel quadro della **RG**, dal momento che la teoria lega appunto la geometria alla distribuzione della materia.

Per affrontare il primo problema bisogna guardare l'Universo più o meno con l'atteggiamento cui siamo abituati quando studiamo un gas.

Su scala microscopica un gas consiste di atomi, che a loro volta hanno dei costituenti interni; analogamente possiamo dire che le stelle nel loro insieme si raggruppano in oggetti compatti, che sono le galassie.

Le galassie sono, grosso modo, gli “atomi” dell'Universo.

Ci sono almeno 6 *ordini di grandezza* fra le dimensioni di una galassia tipica e quelle dell'Universo visibile.

Quanto alla geometria dello spazio-tempo, ci torneremo fra poco.

Il principio cosmologico

La prima semplificazione fondamentale è di assumere che la densità di galassie — e quindi la *densità di materia* nell'Universo — *sia la stessa dappertutto*.

Possiamo esprimere quest'ipotesi col *principio cosmologico* (PC): le proprietà fisiche dell'Universo sono le stesse *in tutti i punti dello spazio e in tutte le direzioni*.

Brevemente: l'Universo è *omogeneo e isotropo*.

(In realtà l'omogeneità è necessaria per avere l'isotropia: ometto la spiegazione.)

Argomenti a favore del principio cosmologico

Che motivo abbiamo per fare un'ipotesi del genere?

Cominciamo col dire che questo è *l'unico modello semplice* che si può fare; studiamone le conseguenze.

Se le previsioni risultassero in disaccordo coi dati di osservazione, cercheremo di fare un modello più sofisticato.

Ci sono anche delle indicazioni. Ne cito tre:

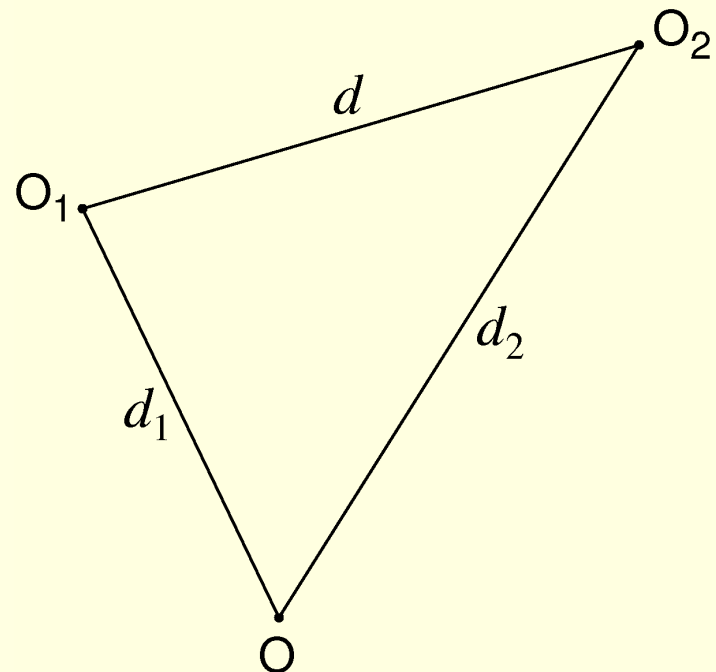
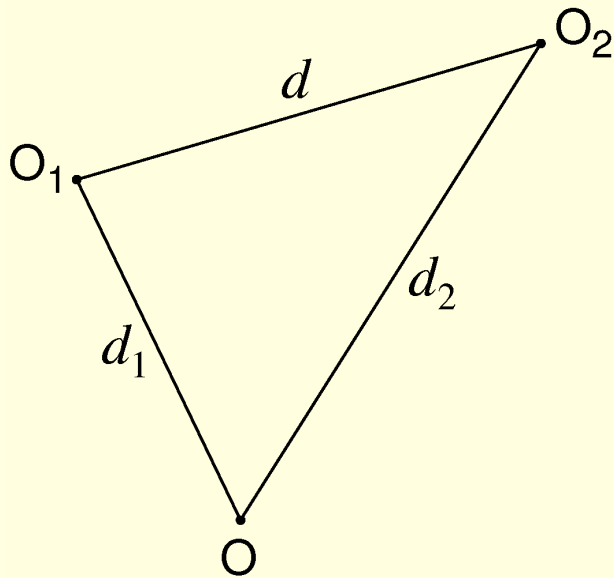
- la legge di Hubble
- la distribuzione delle galassie
- l'isotropia della radiazione di fondo.

La legge di Hubble

Questa legge c'insegna che — almeno per quanto riguarda il moto delle galassie — ciò che vediamo dal nostro osservatorio O non è diverso da ciò che vedremmo in O_1 o in O_2 .

Questo ci autorizza a pensare che gli osservatori O , O_1 e O_2 siano *nelle stesse condizioni fisiche*.

Naturalmente non si tratta di una *prova*, ma solo di un *indizio*; che però parla a favore di un modello *omogeneo*.



Gli altri indizi

Quanto alla distribuzione delle galassie, si tratta di un tema assai complesso e ancora in evoluzione.

Esistono *ammassi* e *super-ammassi* di galassie.

A scala più grande l'Universo avrebbe una *struttura a “bolle”*: grandi regioni quasi vuote, con superfici o filamenti dove si concentra la materia.

Tuttavia la distribuzione osservata giustifica ancora di prendere quella omogenea come una “approssimazione zero”, da cui partire.

E d'altra parte al nostro livello non è pensabile affrontare modelli più complicati...

Della radiazione di fondo non avremo tempo di occuparci.

Il problema del tempo

Il PC parla di omogeneità spaziale dell'Universo; tuttavia nell'enunciarlo non ho messo in evidenza il ruolo giocato dal *tempo*.

Il problema non esisterebbe se l'Universo fosse *stazionario*; ma abbiamo visto che la distanza delle galassie aumenta, e quindi la densità della materia *diminuisce nel tempo*.

Potremo dunque dire che l'Universo è omogeneo solo se lo guardiamo in *un determinato istante*.

Però questo apre nuovi problemi. *Che significato ha* parlare di “stesso istante” per tutto l'Universo?

La densità come orologio

La risposta in sostanza consiste nell'usare il PC, e servirsi della densità della materia come orologio.

Dato che l'Universo si espande, la densità in un dato punto cambierà nel tempo, mentre il PC richiede che essa sia la stessa *in punti diversi allo stesso tempo* (per ora non definito).

Bene: diciamo che in due diversi punti dello spazio siamo allo *stesso tempo* (cosmico) se misuriamo la *stessa densità* di materia.

In realtà la questione andrebbe approfondita, ma il tempo (nostro) non ce lo consente...

Il modello di universo a curvatura costante

L'idea fondamentale della **RG** è che le *proprietà geometriche* dello spazio-tempo dipendono esclusivamente dalla *distribuzione della materia*.

Per esempio lo spazio-tempo è curvo intorno al Sole appunto perché c'è il Sole: la curvatura dipende dalla massa del Sole.

Questo presupposto va adesso combinato col PC: se si ammette che la densità di materia è la stessa dappertutto, anche la *curvatura* dello spazio-tempo sarà *la stessa dappertutto*.

Quindi abbiamo un modello di universo *a curvatura costante*.

Però attenzione: si tratta di costanza *nello spazio, non nel tempo*.

Lo spazio-tempo è quadrimensionale: se consideriamo *le sezioni tridimensionali* a t assegnato, il PC ci dice che *queste sezioni sono a curvatura (tridimensionale) costante*.

Però se la misuriamo a tempi successivi, la curvatura può benissimo cambiare.

Anzi, dal momento che oggi sappiamo che *l'Universo si espande*, è chiaro che il raggio di curvatura *va aumentando nel tempo*.

Il parametro di scala

Questo raggio di curvatura è il parametro cosmologico fondamentale, ed è una funzione del tempo $R(t)$.

Se noi conosciamo la funzione $R(t)$, abbiamo un *modello cosmologico* ben determinato.

Supponiamo quindi di conoscere questa funzione, e vediamo che cosa se ne può ricavare.

In cosmologia il rapporto $R(t) / R(t_0)$, con t_0 tempo presente, si chiama *parametro di scala*.

Ci sono due buone ragioni per preferire l'uso del parametro di scala:

- esistono geometrie per le quali il termine “raggio” è poco appropriato (quelle a curvatura *nulla* o *negativa*)
- dato che al variare di R la sezione si espande o si contrae, cambiando “scala”, il termine “parametro di scala” rende adeguatamente l'effetto dell'*evoluzione nel tempo*.

Gli spazi a curvatura costante

Esistono solo tre tipi di spazi (tridimensionali) a curvatura costante, tradizionalmente contraddistinti dal valore di un parametro k :

- lo spazio *euclideo* ($k = 0$, curvatura nulla)
- lo spazio *sferico* ($k = 1$, curvatura positiva)
- lo spazio *iperbolico* ($k = -1$, curvatura negativa).

Uno spazio tridimensionale curvo è un'idea poco intuitiva, perché lo spazio a cui siamo abituati è euclideo.

Si solito si ricorre a un'analogia, che consiste nel *togliere una dimensione*, cioè nello studiare uno spazio a curvatura costante *bidimensionale*.

L'esempio più semplice di spazio bidimensionale a curvatura costante è la *superficie di una sfera*.

È però molto importante non commettere un errore.

Noi abbiamo esperienza della superficie di una sfera *come superficie immersa in uno spazio tridimensionale*.

Si sarebbe così indotti a credere che *se lo spazio* tridimensionale *è curvo*, ciò vuol dire che *esiste una quarta dimensione* spaziale, in cui il nostro spazio s'incurva.

Tale quarta dimensione non va neppure confusa col tempo, che è sì una quarta dimensione, ma dello *spazio-tempo*.

Le coordinate comoventi

Ragioniamo dunque sulla sfera: la superficie di una sfera S^2 sarà il nostro modello dell'Universo.

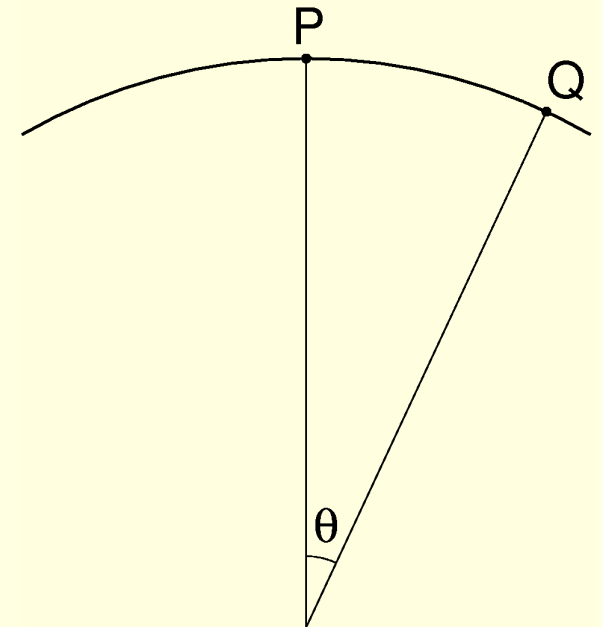
Poiché l'Universo è in espansione, il raggio della sfera cresce al passare del tempo: e noi dobbiamo immaginare di vivere sopra questa sfera che cresce.

La cosa che ora c'interessa di più è farci un'idea di *come viaggia la luce* in un universo così fatto.

Cerchiamo prima di tutto di caratterizzare i punti di questa superficie con un *sistema di coordinate*.

Dato che si tratta di una superficie sferica, le coordinate più naturali sono quelle *polari*.

Scelto un polo P, per ogni punto Q avremo le coordinate ϑ e φ . L'angolo ϑ posso disegnarlo facilmente, mentre φ è meglio immaginarlo.

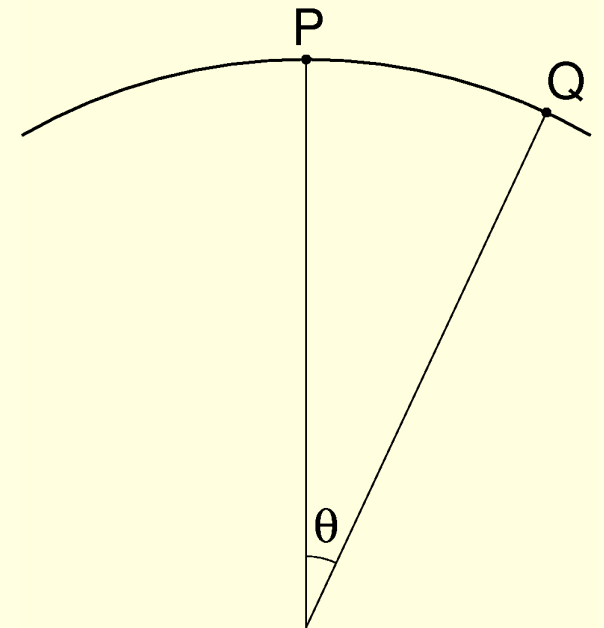


Il punto P della figura potremmo essere noi, mentre Q è un'altra galassia: Q è caratterizzato dagli angoli ϑ , φ .

Il fatto che l'Universo si espande *non fa cambiare le coordinate*: se il raggio della sfera cresce, le coordinate ϑ e φ rimangono le stesse (ecco il vantaggio di aver usato degli angoli!)

Dunque le coordinate polari di un determinato punto, di una determinata galassia, *sono costanti*.

Per questo motivo le coordinate ϑ , φ si chiamano *coordinate comoventi*.



La distanza da P a Q è un'altra cosa.

Poiché noi viviamo sulla sfera, quando parliamo di distanza dobbiamo intendere *l'arco di cerchio massimo* — cioè di geodetica — sulla superficie della sfera.

La distanza sarà naturalmente $R \vartheta$.

Abbiamo detto che ϑ non cambia, però R cambia: quindi la distanza cambia, *cresce nel tempo*.

Come si fa a sapere se davvero lo spazio è curvo?

E a determinare il segno della curvatura?

E il valore di R ?

Domande più che legittime, alle quali risponde la *cosmologia osservativa* messa a confronto con le *previsioni teoriche* relative ai diversi modelli di universo.

Ma purtroppo queste domande sono fuori della nostra portata...

Diremo solo che i dati degli ultimi anni riescono *compatibili col caso euclideo* ($k = 0$).

Ci sono però diverse ragioni per non abbandonare la discussione del modello sferico.

1) Capire un modello euclideo in espansione non è più semplice (per quanto possa apparire strano).

2) C'è il vantaggio che il modello sferico si appoggia alla geometria familiare della sfera.

3) Un modello sferico con R molto grande non differisce apprezzabilmente da un modello *euclideo* (e del resto, i dati di osservazione sono sempre affetti da *incertezze*).

Il redshift cosmologico

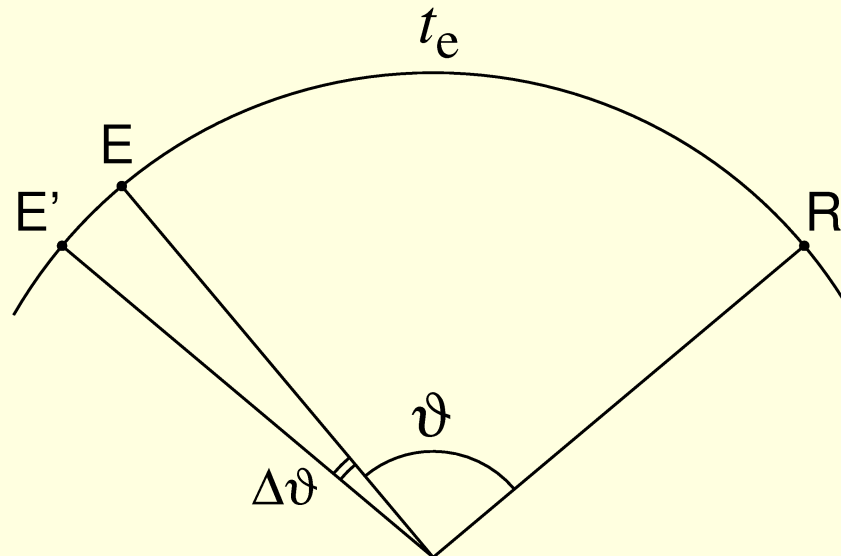
Problema: se una sorgente lontana emette luce di una certa lunghezza d'onda, che noi riceviamo dopo un certo tempo, con quale lunghezza d'onda la riceviamo?

Procediamo così: l'emettitore E emette un segnale al tempo t_e , e il ricevitore R lo riceve al tempo t_r . In questo tempo il raggio dell'Universo aumenta, passando da R_e a R_r .

Supponiamo che i due punti E ed R abbiano la stessa φ , mentre differiscono per ϑ nell'altra coordinata. Ricordiamo che le coordinate comoventi *non cambiano* durante l'espansione.

Aggiungiamo ora un emettitore ausiliario E', che precede E di $\Delta\vartheta$ nel senso della propagazione della luce; anche E' emette un segnale al tempo t_e .

La distanza tra E' ed E vale $R_e \Delta\vartheta$, per cui il segnale emesso da E' passa per E al tempo $t_e + \Delta t_e$, con $\Delta t_e = (R_e \Delta\vartheta) / c$.

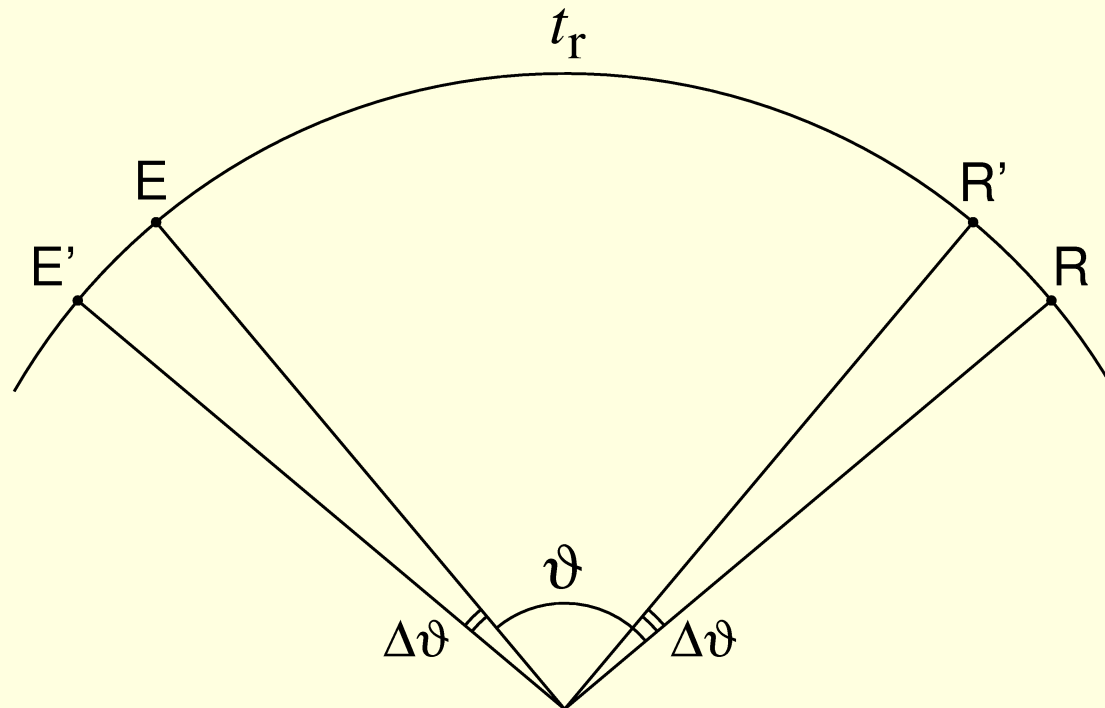


Vediamo ora la situazione al tempo t_r .

Il segnale emesso da E è arrivato in R; e quello emesso da E'?

Avrà percorso lo stesso spazio, e si troverà quindi in R', indietro rispetto a R di $\Delta\vartheta$, ossia alla distanza $R_r \Delta\vartheta$.

Arriverà pertanto in R al tempo $t_r + \Delta t_r$, con $\Delta t_r = (R_r \Delta\vartheta)/c$.



Ma questo è come dire che due segnali, emessi da E con intervallo Δt_e , arrivano in R intervallati di Δt_r .

L'intervallo Δt_e può anche essere il periodo di una radiazione monocromatica, e vediamo che tale periodo all'arrivo è *diverso* (maggiore):

$$\Delta t_r / \Delta t_e = R_r / R_e.$$

Il rapporto delle lunghezze d'onda è uguale a quello dei periodi, e abbiamo quindi trovato che

*la lunghezza d'onda ricevuta sta alla lunghezza d'onda emessa
come il raggio dell'Universo all'istante di arrivo
sta al raggio all'istante di partenza:*

$$\lambda_r / \lambda_e = R_r / R_e.$$

Redshift ed espansione

Se colleghiamo la relazione appena trovata $\lambda_r / \lambda_e = R_r / R_e$ alla definizione del *parametro di redshift* $z = (\lambda_r - \lambda_e) / \lambda_e$, troviamo

$$1 + z = R_r / R_e.$$

Vediamo così un'*interpretazione geometrica* del redshift cosmologico.

Ad es. un redshift di **0.3** (del **30%**) significa che il raggio dell'Universo è aumentato del **30%** nel tempo che la luce ha impiegato ad arrivare fino a noi.

Commenti

Nel ragionamento che porta a $\lambda_r / \lambda_e = R_r / R_e$ non si fa l'ipotesi che z debba essere piccolo.

Se noi conosciamo una sorgente per la quale $z = 10$, questo ci dice che quando la luce è partita il raggio dell'Universo era esattamente **11 volte** più piccolo dell'attuale.

Viceversa *non possiamo dir niente del tempo* al quale la luce è stata emessa, a meno che non conosciamo la funzione $R(t)$.

Se per esempio fosse $R \propto t^{2/3}$ e quindi $t \propto R^{3/2}$, potremmo dire

$$t_r / t_e = 11^{3/2} \simeq 36.$$

Questa interpretazione del redshift cosmologico è più significativa di quella che si basa sull'effetto Doppler, in quanto si connette direttamente alla *struttura geometrica* dello spazio-tempo.

La legge di Hubble come approssimazione

Supponiamo che le galassie che stiamo osservando siano *vicine*.

(“Vicine” va inteso naturalmente su scala cosmologica: una distanza piccola rispetto al raggio dell'Universo.)

Per le galassie vicine z è *piccolo*: infatti nel tempo che la luce impiega ad arrivare, il raggio dell'Universo cambia di poco.

Dato che per $t_r = t_e$ è anche $R_r = R_e$ e quindi $z = 0$, è intuitivo che z debba risultare proporzionale a $t_r - t_e$ quando questa differenza è piccola.

Ma $t_r - t_e$, nelle stesse ipotesi, è anche proporzionale alla distanza d , e si arriva quindi alla *legge di Hubble*, che per motivi storici viene scritta

$$z = H d / c$$

dove H è la *costante di Hubble*, che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.

Un calcolo più dettagliato porta a dare un'espressione per la *costante di Hubble*:

$$H = (1/R) (dR/dt).$$

Sempre per ragioni storiche, H viene di solito data in un'unità complicata: $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Il suo valore attuale, secondo le stime più recenti, è

$$(69.32 \pm 0.80) \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \cong 6.9 \times 10^{-11} \text{ anni}^{-1}.$$

L'inverso di H è detto *tempo di Hubble* t_H . Dà una stima dell'età dell'Universo, e vale circa 1.4×10^{10} anni.

Considerazioni finali

1. Avevo detto all'inizio:

Insegnare relatività richiede prima di tutto di trattare in modo diverso e approfondito le basi della meccanica.

In particolare:

- *riferimenti inerziali e non*
- *il principio di relatività galileiana*
- *moto dei gravi e cambiamenti di riferimento.*

Ma è anche un'opportunità e una grande motivazione per argomenti che presi a sé possono apparire poco interessanti, al limite noiosi.

Primo fra tutti, proprio la *caduta dei gravi*, da Galileo ad Einstein.

Ora possiamo capire meglio, soprattutto un punto: la relatività non può (non deve) essere materia *solo dell'ultimo anno*.

Almeno gli argomenti che ho appena ricordato debbono essere trattati, fin dall'inizio, avendo in mente che *serviranno come base* per la relatività.

E viceversa, che la loro importanza sta anche in questo: la riflessione di Einstein su certi temi *ha costituito la spinta* alla costruzione della relatività.

Il PR di Galileo è *identico* a quello di Einstein: la differenza sta solo nell'affermazione, esplicita in Einstein, che si tratta di una *legge di validità universale*.

Il PE nasce dalla scoperta di Galileo: *tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione.*

Einstein ne conclude: ma allora se ci mettiamo in un rif. in caduta libera (l' "ascensore di Einstein") *la gravità sparisce.*

E precisa: *a tutti gli effetti*, non solo in ambito meccanico.

Ma ci sono altri temi che possono essere anticipati, in parte anche nel primo biennio.

Un esempio per tutti: la riflessione sulla misura del tempo.

Che cos'è un orologio?

Che cosa significa che due orologi vanno (o no) d'accordo?

Se non vanno d'accordo, come si può sapere qual è quello “giusto”?

2. Argomenti che ho dovuto tralasciare.

Alcuni sono importantissimi, ma dovevo scegliere...

- L'orologio a luce e il tempo proprio.
- Come si arriva alla metrica dello spazio-tempo.
- La modifica alle leggi della dinamica (che non sta affatto nel dire “la massa dipende dalla velocità”: questa è semplicemente un'affermazione sbagliata, o almeno equivoca).
- Come si arriva alla curvatura dello spazio-tempo, passando per le forze di marea.

3. L'eterna questione del tempo, inteso come ore disponibili...

La chiamo “eterna” perché si è continuamente obbligati a delle scelte.

L'importante è farle consapevolmente, e sfuggendo la tentazione di fare “di tutto un po'”: di solito questo modo di procedere non lascia niente.

Perciò se si decide di trattare la relatività, non si potrà forse trattare tutto quello che c'è nel *Quaderno* 16, ma è importante individuare alcuni temi fondamentali, e dedicarsi a quelli.

Inoltre: ho già detto che una parte del contenuto del *Quaderno* può (deve) essere anticipata ai primi anni (i primi 4 capitoli e parte del quinto).

Quindi il tempo richiesto dalla relatività “in senso stretto” si riduce non poco.

4. I problemi.

Tutti sappiamo che insegnando fisica occorre dedicare un tempo adeguato alla discussione e risoluzione di problemi.

Nel *Quaderno* ce ne sono 75, con le soluzioni.

Però sono di un livello medio-alto, alcuni non adatti a studenti.

Non ci sono invece problemi “iniziali”, di base, che forse sarebbe più giusto chiamare “esercizi”.

Per fare degli esempi, non ci troverete

“Un elettrone ha velocità pari a $0.9 c$; calcola (in joule) la sua energia cinetica”.

Dove c'è solo da applicare una formula.

Oppure questo:

“Un elettrone è stato accelerato con una d.d.p. di 200 kV: qual è la sua velocità?”

Che è più difficile del precedente, perché bisogna ricordare la relazione tra d.d.p. ed energia di una particella carica, e poi bisogna invertire la formula dell'energia.

E nemmeno questo:

“Perché la frase che si legge spesso: ‘nello LHC i protoni vengono accelerati fino quasi alla velocità della luce’ è priva di senso?”

(Più adatto a una discussione in classe, non solo qualitativa, ma con esempi numerici.)

Una lettura collaterale, che contiene anche molti problemi, è
Fisica dello spazio-tempo di Taylor e Wheeler.

La linea generale della trattazione è la stessa, ma ci sono anche delle differenze.

- Manca una discussione delle parti preliminari (quelle che ho detto si potrebbero anticipare).
- È molto più ristretta la RG (praticamente solo il PE).
- È un libro “americano”, nel bene e nel male.

Se ne potrebbero leggere alcune parti, per esempio certi dialoghi.

Comunque una lettura molto consigliabile per l'insegnante.