

M1. Il problema dei due corpi

Il problema ridotto

Il punto di partenza della meccanica celeste è il *problema kepleriano dei due corpi*. Siano M e m le due masse che assumiamo puntiformi o a simmetria sferica; chiamiamo \vec{r} il vettore indicato in fig. M1-1, O il centro di massa: questo definisce i vettori \vec{r}_1, \vec{r}_2 tali che $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Le forze che si esercitano sui due corpi, di massa m ed M rispettivamente, (legge di gravitazione) sono:

$$\vec{F}_m = -GMm \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{F}_M = GMm \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

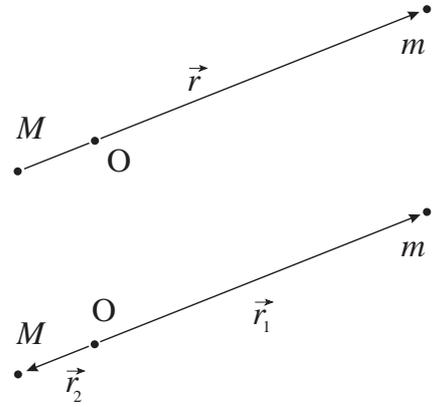


Fig. M1-1

Nel seguito porremo $\gamma = GMm$ (G è la costante di gravitazione universale).

Mettendoci nel riferimento del centro di massa avremo:

$$m \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_m = -\gamma \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$M \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_M = \gamma \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Dividendo per le masse e sottraendo si ha:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Si perviene così all'equazione fondamentale

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{M1.1}$$

che scriveremo anche nella forma

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2 \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{M1.2}$$

avendo posto

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \quad (\mu = \text{massa ridotta})$$

$$k^2 = \frac{\gamma}{\mu} \quad (k = \text{costante di Gauss}).$$

Notare che

$$k^2 = \frac{\gamma}{\mu} = GMm \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) = G(M + m).$$

Nella forma (M1.1) il nostro problema è uguale al problema di un solo corpo di massa μ attratto da un centro fisso O, e si chiama *problema ridotto*.

Le costanti del moto

Il nostro obiettivo finale è l'integrazione della (M1.2), cioè la determinazione della legge oraria e della traiettoria del moto; per ora limitiamoci a dedurre qualcosa dalle costanti del moto che si ottengono dalla (M1.1). Poiché la forza è centrale, avremo i due classici integrali primi:

a) Energia:

$$T + V = E = \frac{1}{2} \mu |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{\gamma}{r}$$

b) Momento angolare:

$$\vec{J} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \quad (\text{M1.3})$$

Si può vedere che questi sono esattamente i valori dell'energia e del momento angolare per il problema dei due corpi riferito al centro di massa.

Dalla (M1.3) segue subito che

- 1) $\vec{J} \cdot \vec{r} = 0$: \vec{J} è perpendicolare a \vec{r} ;
- 2) $\vec{J} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$: \vec{J} è perpendicolare alla velocità.

In questo problema particolare c'è poi un terzo integrale primo:

c) Vettore di Lenz:

$$\vec{L} = \dot{\vec{r}} \times \vec{J} - \gamma \frac{\vec{r}}{r}$$

Deriviamo infatti \vec{L} rispetto al tempo:

$$\dot{\vec{L}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{J} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{J}} - \gamma \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \gamma \vec{r} \frac{d}{dt} \frac{1}{r}$$

dove il secondo termine si annulla perché $\dot{\vec{J}} = 0$. Sviluppando:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \ddot{\vec{r}} \times (\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \gamma \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \gamma \vec{r} \frac{d}{dt} \frac{1}{r} \\ &= \mu (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - \mu (\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - \gamma \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \gamma \vec{r} \frac{d}{dt} \frac{1}{r} \\ &= \left(\mu \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - \gamma \frac{d}{dt} \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \left(\mu \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \frac{\gamma}{r} \right) \dot{\vec{r}} \\ &= \dot{E} \vec{r} - \left[\left(\mu \ddot{\vec{r}} + \gamma \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{r} \right] \dot{\vec{r}} = 0. \end{aligned}$$

Infatti $\dot{E} = 0$, mentre l'espressione in parentesi tonde è nulla per la (M1.1).

Studiamo le proprietà del vettore di Lenz.

Si ha:

$$\vec{J} \cdot \vec{L} = \vec{J} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{J} - \frac{\gamma}{r} \vec{r} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{J} \cdot \vec{L} = 0 \quad (\text{M1.4})$$

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = \dot{\vec{r}} \times \vec{J} \cdot \vec{r} - \gamma \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{J} - \gamma r = \frac{1}{\mu} J^2 - \gamma r$$

$$\vec{L} \cdot \vec{r} + \gamma r = \frac{1}{\mu} J^2. \quad (\text{M1.5})$$

Si vede in modo analogo che

$$L^2 = \gamma^2 + \frac{2}{\mu} E J^2. \quad (\text{M1.6})$$

Possiamo dunque dire che:

- 1) esiste un vettore \vec{J} , costante del moto, sempre ortogonale a \vec{r} : cioè \vec{r} ruota in un piano perpendicolare a \vec{J} (*moto piano*);
- 2) allora per la (M1.4) \vec{L} è sul piano dell'orbita (fig. M1-2).

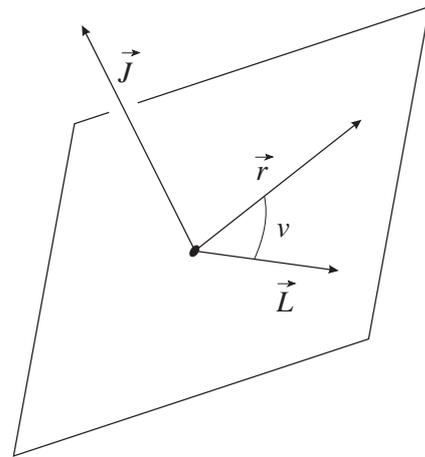


Fig. M1-2

La forma dell'orbita

Definiamo *anomalia vera* v l'angolo tra \vec{L} e \vec{r} ; dalla (M1.5) avremo:

$$L r \cos v + \gamma r = \frac{1}{\mu} J^2$$

$$r = \frac{J^2 / \mu}{\gamma + L \cos v}.$$

Ponendo

$$p = \frac{J^2}{\gamma \mu} \quad e = \frac{L}{\gamma} \quad (\text{M1.7})$$

abbiamo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (\text{M1.8})$$

che è l'equazione di una conica: iperbole per $e > 1$, parabola per $e = 1$, ellisse per $e < 1$. Si vede inoltre che questa conica ha l'asse lungo \vec{L} : infatti per $v = 0$, essendo sempre $e > 0$, r è minimo (mentre è massimo per $v = \pi$). Questo è dunque il significato fisico della direzione di \vec{L} che è quella del *pericentro*; il suo

modulo non ci dà altre informazioni, dato che non è indipendente da E e da $|\vec{J}|$. Notiamo ancora che p dipende solo da $|\vec{J}|$, mentre e dipende solo da $|\vec{L}|$.

Vediamo ora la relazione tra la forma dell'orbita e l'energia. Dalla seconda delle (M1.7) e dalla (M1.6) abbiamo che

$$e \geq 1 \iff L \geq \gamma \iff E \geq 0.$$

Dato che l'energia potenziale è negativa e si annulla all'infinito, se $E = T + V > 0$ ($e > 1$, traiettoria iperbolica) il corpo può arrivare all'infinito con una certa energia cinetica e una certa velocità. Per $E = 0$ ($e = 1$, parabola) il corpo può andare all'infinito, ma con velocità tendente a zero. Per $E < 0$ ($e < 1$, ellisse) il corpo non può andare all'infinito, dove si avrebbe $T < 0$.

Studiamo più in dettaglio l'ultimo caso, quello di orbita ellittica. In primo luogo si pone:

$$q = r_{\min} = \frac{p}{1+e}, \quad Q = r_{\max} = \frac{p}{1-e}, \quad (\text{per } v = 0, v = \pi \text{ risp.})$$

Calcoliamo il semiasse maggiore:

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{J^2/\gamma\mu}{1-L^2/\gamma^2} = \frac{\gamma J^2/\mu}{\gamma^2 - L^2} = \frac{\gamma J^2/\mu}{-2EJ^2/\mu} = -\frac{\gamma}{2E}$$

(notare che nel nostro caso $E < 0$). La relazione trovata

$$a = \frac{\gamma}{2|E|}$$

realizza una connessione tra gli aspetti geometrici e dinamici del moto.

Per avere il semiasse minore basta ricordare che $b/a = \sqrt{1-e^2}$ e si trova facilmente

$$b = \frac{J}{\sqrt{2\mu|E|}}.$$

Si vede che mentre il semiasse maggiore è inversamente proporzionale all'energia, il semiasse minore dipende da E , ma a parità di E è proporzionale al momento angolare: fissata l'energia, al crescere di J cresce b , cioè l'ellisse tende a un cerchio. Ne segue che per una certa energia E , J non può superare quel valore per il quale $a = b$ (orbita circolare):

$$J_{\max} = \gamma \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}.$$

Possiamo infine calcolare il periodo del moto, ricordando che il momento angolare è proporzionale alla velocità areale \mathcal{A} : precisamente è $J = 2\mu\mathcal{A}$. L'area dell'ellisse è πab , e avremo perciò $JT = 2\mu\pi ab$ da cui si ricava T . È interessante mettere tale espressione nella forma seguente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k^2}} \quad (\text{M1.9})$$

in cui interviene la costante gaussiana k . Se si assume $M \gg m$ (k quindi non dipende da m) se ne ricava la relazione $T \propto a^{3/2}$ (*terza legge di Keplero*). Poiché a dipende solo da E , vediamo che anche il periodo dipende solo dall'energia.

Introducendo il moto medio n definito da

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

si ha $n = \sqrt{k^2/a^3}$ da cui si ricava un'altra forma della (M1.9):

$$n^2 a^3 = k^2$$

che prende il nome di *relazione di Keplero*.

Si osservi che l'approssimazione fatta sulle masse è decisamente grossolana, almeno per i pianeti maggiori del sistema solare. Il rapporto M/m vale circa 1000 per Giove e circa 3500 per Saturno, cosicché il valore di k^2 può essere assunto uguale per tutti i pianeti solo entro 10^{-3} mentre sia le osservazioni che i calcoli danno molte più cifre significative.

La legge del moto

Nella fig. M1-3 il punto B si trova sul cerchio circoscritto all'ellisse sulla perpendicolare per A all'asse maggiore. Allora si ha

$$r \cos v = a \cos u - ae$$

dove si è introdotto l'angolo $u = \widehat{BCP}$, detto *anomalia eccentrica*. Usando la (M1.8) è facile verificare che

$$r = a(1 - e \cos u). \quad (\text{M1.10})$$

Inoltre, uguagliando la (M1.10) alla (M1.8) si ha:

$$a(1 - e \cos u) = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

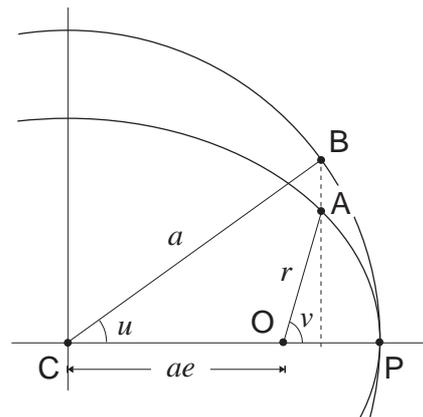


Fig. M1-3

e usando l'identità

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

si arriva a questo risultato:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = f \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad (\text{M1.11})$$

con

$$f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (\text{M1.12})$$

In alcuni casi è anche utile la seguente relazione

$$\cos^2 \frac{v}{2} = \frac{a}{r} (1 - e) \cos^2 \frac{u}{2} \quad (\text{M1.13})$$

che si ottiene esprimendo $\cos^2(v/2)$ mediante la (M1.11) e usando la (M1.10). Differenziando la (M1.11) si trova

$$\frac{1}{2} \frac{dv}{\cos^2(v/2)} = \frac{1}{2} f \frac{du}{\cos^2(u/2)}.$$

Moltiplicando termine a termine per la (M1.13) e ricordando la forma (M1.12) di f si ha:

$$dv = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} du = \frac{b}{r} du$$

cioè

$$\dot{v} = \frac{b}{r} \dot{u}.$$

Moltiplicando per $\frac{1}{2} r^2$:

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{v} = \frac{1}{2} b r \dot{u} = \frac{1}{2} ab (1 - e \cos u) \dot{u} = \frac{1}{2} ab \frac{d}{dt}(u - e \sin u).$$

Poiché $\frac{1}{2} r^2 \dot{v}$ è la velocità areale $\mathcal{A} = \pi ab/T = \frac{1}{2} nab$, abbiamo:

$$\frac{d}{dt}(u - e \sin u) = n.$$

Conviene perciò definire l'angolo φ (*anomalia media*) mediante l'equazione di Keplero

$$\varphi = u - e \sin u \quad (\text{M1.14})$$

e si ottiene così

$$\dot{\varphi} = n$$

M1-6

che s'integra in

$$\varphi(t) = \varphi_0 + nt = n(t - t_0) \quad (\text{M1.15})$$

dove φ_0 è il valore di φ all'istante $t = 0$ e t_0 è l'istante per cui $\dot{\varphi} = v = 0$, cioè quando il corpo passa al *pericentro* dell'orbita.

Si è trovata così un'ultima costante arbitraria (φ_0 oppure t_0) e si vede che le costanti del moto indipendenti sono 6: $E, J_x, J_y, J_z, \vec{L}, t_0$. (Per \vec{L} s'intende solo la direzione nel piano dell'orbita, in quanto il modulo dipende da E e da $|\vec{J}|$.) Questo è quanto ci si doveva aspettare, per un problema con tre gradi di libertà. Trattandosi poi di un problema conservativo (autonomo) è chiaro che delle 6 costanti 5 riguardano la geometria del moto, e solo una dà un'informazione temporale.

Il problema del moto dunque è risolto: la (M1.15), noti n e t_0 , fornisce $\varphi(t)$ e da qui si trova $u(t)$ invertendo la (M1.14). Con la (M1.10) si ottiene poi $r(t)$, e con la (M1.11) si ha $v(t)$.

Si noti che la (M1.14) non è invertibile in termini di funzioni elementari: si può però provare che nel nostro caso ($e < 1$) la funzione inversa è ben definita, e si tratta perciò solo di trovare un adeguato procedimento di calcolo.

A proposito degli angoli v, u, φ , notiamo che essi coincidono se $e = 0$; altrimenti, definendoli compresi fra $-\pi$ e π , si ha sempre $|\varphi| < |u| < |v|$.

Approssimazione per piccola eccentricità

È utile vedere come si semplificano alcune delle formule se l'eccentricità è piccola. Al primo ordine in e avremo $f \simeq 1 + e$, e dalla (M1.11)

$$\text{tg} \frac{v}{2} - \text{tg} \frac{u}{2} = e \text{tg} \frac{u}{2}$$

D'altra parte

$$\text{tg} \frac{v}{2} = \text{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{v-u}{2} \right) \simeq \text{tg} \frac{u}{2} + \frac{(v-u)/2}{\cos^2(u/2)}$$

e confrontando risulta

$$v - u \simeq e \sin u \simeq e \sin \varphi. \quad (\text{M1.16})$$

La (M1.14) si approssima con

$$u \simeq \varphi + e \sin \varphi \quad (\text{M1.17})$$

e infine

$$v \simeq \varphi + 2e \sin \varphi.$$

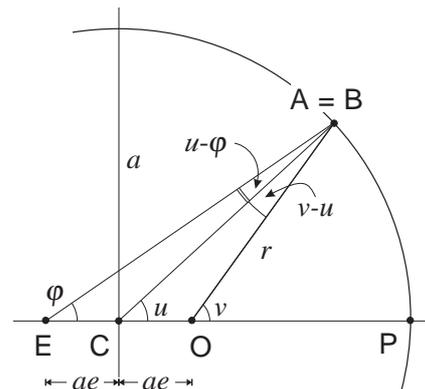


Fig. M1-4

Nella fig. M1-3 i punti A e B in questa approssimazione coincidono (l'ellisse si confonde col cerchio); perciò riferendosi alla fig. M1-4 si ottiene l'interpretazione geometrica (approssimata) di φ che giustifica l'equante di Tolomeo. Infatti preso E tale che $\overline{EC} = \overline{CO}$, gli angoli E \hat{A} C e C \hat{A} O sono uguali a meno di e^2 ; il secondo vale $v-u$ per costruzione, ma vale anche $u-\varphi$ per le (M1.16), (M1.17). Allora il triangolo AEC mostra che l'angolo in E, nella solita approssimazione, è proprio φ .

Gli elementi dell'orbita

Vediamo adesso quali sono i parametri usuali per la determinazione dell'orbita di un pianeta. Il piano dell'orbita è individuato dalla sua inclinazione i sul piano dell'eclittica e dalla posizione del Ω , cioè dalla sua longitudine eclittica, che indicheremo con ψ . La posizione del pericentro è data dall'angolo χ (fig. M1-5), oppure dall'angolo $\bar{\chi} = \psi + \chi$ detto impropriamente "longitudine" del pericentro. Per fissare poi la forma dell'orbita occorre dare il semiasse maggiore a e l'eccentricità e . Spesso per orbite molto eccentriche, come quelle delle comete, invece di a si dà la distanza q al perielio.

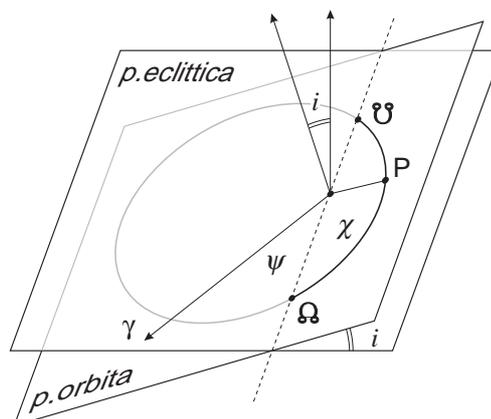


Fig. M1-5

Infine l'ultimo dato sarà t_0 oppure φ_0 , anomalia media all'origine dei tempi (questo è il più usato; l'origine dei tempi viene chiamata "epoca"). Talvolta, in luogo di φ_0 , si trova usato $\bar{\lambda}_0 = \bar{\chi} + \varphi_0$, chiamato "longitudine media all'epoca."

Riassumendo: l'orbita è caratterizzata da:

$$i, \psi, \chi, \text{ (oppure } \bar{\chi}), a \text{ (oppure } q), e, \varphi_0 \text{ (oppure } \bar{\lambda}_0).$$