Eutocio, nel suo commento a questa breve opera (ed. Heiberg, III, p. 228) mette l'accento sul fatto che essa ha intendimenti pratici; ed a questo proposito cita Eraclide il quale, nella sua Vita di Archimede *(purtroppo non giunta fino a noi: cfr.* Nota biografica, *all'inizio), dice che «questo libro (cioè la* Misura del cerchio) *è necessario per i bisogni della vita». Non si tratta, cioè della determinazione* esatta *della lunghezza della circonferenza in funzione del diametro (determinazione che viene geometricamente eseguita nelle* Spirali, *prop. 18, utilizzando queste curve), ma di una determinazione approssimata eseguita usando soltanto rette e cerchi nel modo classico (usando cioè soltanto le costruzioni* elementari, *eseguite, come noi diciamo, con riga e compasso).*

Dallo stile dell'opera, e da certi elementi che è dato di cogliere alla lettura, si ricava la netta impressione che questa a noi giunta non sia l'opera originale di Archimede, ma soltanto un estratto da altra opera più completa, andata perduta forse proprio a causa dell'estratto stesso, che fu evidentemente preferito nella diuturna lotta per la conservazione delle opere antiche. L'opera a noi giunta contiene solo tre teoremi, e (come il lettore potrà rilevare dall'apposita nota) sembra che il secondo e il terzo teorema non stiano nel giusto ordine, poiché il secondo presuppone il terzo.

Nel primo teorema si ha un classico esatto risultato: essere il cerchio uguale *ad un triangolo rettangolo avente uno dei cateti uguale alla circonferenza del cerchio, l'altro cateto uguale al raggio. Questo teorema collega tra loro i due problemi della rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio.*

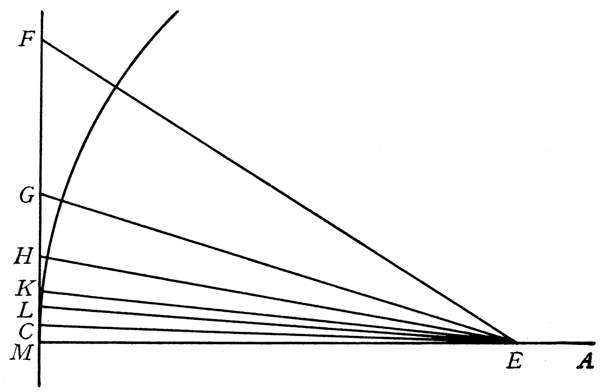
La dimostrazione viene eseguita col classico metodo di esaustione, ideato (a quanto sembra accertato) dal matematico e *astronomo Eudosso di Cnido (IV sec. d. C.). Per notizie su detto metodo si veda* l'Introduzione, *nella quale esso viene esposto in forma generale.*

Nella terza (ed ultima) proposizione si dimostra, anche con calcoli aritmetici, che la circonferenza del cerchio è compresa tra $\left(3 + \frac{1}{7}\right)$ *e* $\left(3 + \frac{10}{71}\right)$ *volte il diametro: in altri termini si stabilisce la famosa doppia limitazione:*

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

Il valore di destra, 22/7, ci dà con numeri piccoli un valore ottimamente approssimato del rapporto tra la circonferenza e il diametro di qualunque cerchio.

Come giunge Archimede a stabilire questi valori che comprendono π*? I valori approssimati per difetto vengon trovati sostituendo al cerchio poligoni regolari inscritti, quelli approssimati per eccesso ricorrendo a poligoni circoscritti. Naturalmente quanto più grande è il numero dei lati del poligono considerato, tanto migliore è l'approssimazione ottenuta. Archimede parte appunto dall'esagono regolare (dapprima circoscritto, poi inscritto): raddoppiando successivamente il numero dei lati giungerà al poligono regolare di 96 lati, e lì si fermerà* ($6 \cdot 2 = 12$;



$12 \cdot 2 = 24$; $24 \cdot 2 = 48$; $48 \cdot 2 = 96$). *Supponendo che* CF *sia la metà del lato dell'esagono regolare circoscritto al cerchio di raggio* EC *(ci riferiamo alla figura della prop. 3) si* *conduce la bisettrice* EG *dell'angolo al centro* CEF*: il segmento* CG *è allora la metà del lato del dodecagono regolare circoscritto. In linea generale, partendo da un angolo al centro* α *corrispondente alla metà del lato di un poligono regolare circoscritto, si giunge all'angolo-metà* $\alpha/2$ *corrispondente alla metà del lato del poligono regolare circoscritto avente numero doppio di lati.*

Se si conosce il rapporto CF : CE *tra il mezzo lato dell'esagono e il raggio, ossia tra il lato dell'esagono e il diametro, occorre trovare modo di conoscere l'analogo rapporto* CG : CE *tra il lato del dodecagono e il diametro stesso. Il procedimento verrà poi replicato più volte, fino a giungere al rapporto tra il lato del poligono regolare circoscritto di 96 lati e il diametro: basterà allora moltiplicare per 96 il rapporto trovato, per ottenere il rapporto tra il perimetro di detto poligono e il diametro, ossia un valore approssimato per eccesso di* π.

Il procedimento per passare da CF : CE *a* CG : CE *è basato sul notissimo teorema di geometria elementare:* In ogni triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati. *Cioè:* FG : GC = EF : EC *da cui, componendo:* FC : GC = (EF + EC) : EC *e permutando gli estremi:*

$$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{GC}} = \frac{\mathrm{EF} + \mathrm{EC}}{\mathrm{FC}} = \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FC}} + \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{FC}}$$

Si può quindi calcolare il rapporto EC : GC *(l'inverso di quello cercato) conoscendo i rapporti* EF : FC *e* EC : FC *relativi al poligono di partenza. Questi rapporti sono noti per l'esagono, e per gli altri poligoni si ricavano applicando la relazione sopra scritta e il teorema di Pitagora. Osserviamo che la relazione in questione si può porre sotto forma trigonometrica così:*

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha/2} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Partiamo ora finalmente dal mezzo lato CF *dell'esagono regolare circoscritto: l'angolo al centro* CEF *è dunque la dodicesima parte dell'angolo giro (ossia è di* 30°*). E poiché il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio del cerchio,* *cioè ad* EF (*che è il raggio del cerchio circoscritto all'esagono*) *si ha:* EF : FC = 2.

Il rapporto EC : FC *è poi uguale a quello:*

$$\frac{\sqrt{EF^2 - FC^2}}{FC} = \sqrt{\left(\frac{EF}{FC}\right)^2 - 1} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

E qui Archimede introduce un valore approssimato per difetto della radice quadrata di 3 ponendo:

$$\sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

Si ricava allora:

$$EC : GC > 2 + \frac{265}{153} = \frac{571}{153}$$

Conseguentemente, applicando il teorema di Pitagora:

$$\left(\frac{EG}{GC}\right)^2 = \frac{EC^2 + GC^2}{GC^2} = 1 + \left(\frac{EC}{GC}\right)^2 > 1 + \left(\frac{571}{153}\right)^2 = \frac{349450}{153^2}$$

quindi:

$$\frac{EG}{GC} > \frac{\sqrt{349450}}{153} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

E così via, dividendo per metà l'angolo CEG *per mezzo della bisettrice* EH, *tracciando la bisettrice* EK *dell'angolo* CEH, *e finalmente la bisettrice* EL *dell'angolo* CEK. *Il segmento* CL *è allora la metà del lato del poligono regolare di 96 lati circoscritto.*

Proseguendo i suoi calcoli con lo stesso metodo, Archimede trova il seguente valore approssimato per difetto del rapporto CE : CL, *cioè:*

$$CE : CL > 4673\,\frac{1}{2} : 153$$

Raddoppiando ambedue i termini del primo rapporto abbiamo:

$$D : L > 4673\,\frac{1}{2} : 153$$

dove con D *abbiamo indicato il diametro del cerchio, con* L *il lato del poligono regolare di 96 lati circoscritto al cerchio stesso. Se ora moltiplichiamo* L *per 96 abbiamo il perimetro* P *del poligono in questione: per mantenere valida la disuguaglianza moltiplichiamo anche 153 per 96 (ottenendo il prodotto 14688) giungendo così alla:*

$$D : P > 4673 \frac{1}{2} : 14688$$

Per il rapporto cercato P : D *abbiamo allora:*

$$P : D < 14688 : 4673 \frac{1}{2}$$

Ma $4673 \frac{1}{2}$ *è contenuto in 14688 tre volte con l'avanzo di* $667 \frac{1}{2}$, *quindi:*

$$P : D < 3 + \frac{667 \frac{1}{2}}{4673 \frac{1}{2}}$$

Ora, caso invero fortunato, $4673 \frac{1}{2}$ *è assai vicino al sèttuplo di* $667 \frac{1}{2}$. *In verità, moltiplicando* $667 \frac{1}{2}$ *per 7 si ottiene* $4672 \frac{1}{2}$ *(una sola unità in meno!). Possiamo dunque porre a più forte ragione:* $P : D < 3 + \frac{1}{7}$ *(abbiamo in sostanza impiccolito di una unità il denominatore della frazione, quindi abbiamo, sia pur di poco, ingrandita la frazione).*

Ma il perimetro P *di un poligono circoscritto ad un cerchio è maggiore della circonferenza* C *del cerchio stesso, quindi:* $\pi = C : D < 3 + \frac{1}{7}$ *ossia:* $\pi < \frac{22}{7}$.

Ricorrendo ai poligoni inscritti, dopo di quelli circoscritti, Archimede trova l'altra limitazione: $\pi > 3 + \frac{10}{71}$ *quindi stabilisce la classica doppia limitazione:*

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

L'esame del procedimento seguito da Archimede apre una difficile questione. Come calcolò egli valori così bene approssimati della radice quadrata di 3? Si tratta di due valori: quello sopra veduto 265/153, approssimato per difetto, ed un altro (1351/780) approssimato per eccesso, utilizzato nel procedimento che si riferisce ai poligoni inscritti, anziché a quelli circoscritti. Scrive in proposito Eutocio nel suo commento (ed. Heiberg, III, p. 232): «Come si deve trovare approssimativamente la radice quadrata d'un dato numero (τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν) *è detto da Erone nelle sue* Metriche, *da Pappo, da Teone e da altri». Effettivamente troviamo in Erone* (Metrica, *I, 8*) *un esempio relativo alla radice quadrata di 720: ma il metodo usato non sembra sia il migliore possibile per* $\sqrt{3}$. *Ipotesi numerosissime sono state formulate da molti storici della matematica* [1].

A noi (pur contro il parere di Heiberg: Quaestiones Archimedeae, *p. 63*) *sembra che la più semplice e verosimile sia quella formulata nel lontano 1723 dal De Lagny* (Mémoires de l'Académie des sciences, *1723, pp. 55-69*). *Essa parte dal presupposto che il metodo seguito da Archimede sia una estensione di quello seguito dai matematici greci per ottenere* $\sqrt{2}$. *Si tratta di questo: visto che è impossibile trovare due numeri interi tali che sia* $y^2 / x^2 = 2$ *o, ciò che fa lo stesso:* $y^2 - 2x^2 = 0$ *si ripiega sulla ricerca di valori approssimati* y / x *tali che* x, y *soddisfino alla relazione:* $y^2 - 2x^2 = \pm 1$.

La prima coppia di valori soddisfacenti a tale condizione è costituita da $x = 1$, $y = 1$. *Infatti: in questo caso:* $y^2 - 2x^2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$.

La seconda coppia è data da $x = 2$, $y = 3$. *Infatti si ha:* $y^2 - 2x^2 = 9 - 2 \cdot 4 = 1$. *E si può continuare per tentativi, in questa ricerca. Scriviamo uno sotto l'altro i successivi valori corrispondenti di* x, y *così trovati:*

y)	1	3	7	17	41	99 ...
x)	1	2	5	12	29	70 ...

[1] *No puzzle has exercised more fascination upon writers interested in the history of mathematics*: T. HEATH, *A history of Greek Mathematics*, Oxford, 1921, vol. II, p. 51.

Naturalmente i valori approssimati corrispondenti di $\sqrt{2}$ *sono*:

$$\frac{1}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{17}{12};\ \frac{41}{29};\ \frac{99}{70}\ \ldots$$

La legge di formazione delle successive coppie di valori di x *e di* y *si trova con estrema facilità: i valori di* x *si trovano addizionando i valori immediatamente precedenti di* x *e di* y, *mentre i valori di* y *si trovano addizionando il valore precedente di* y *al doppio del valore precedente di* x, *cioè secondo lo schema:*

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Questa relazione si trova anche, sotto veste geometrica, in Euclide (Elementi, *II, 9 e 10*), *come ben riconobbe lo Zeuthen. E questo fatto offre un argomento in favore dell'ipotesi che stiamo esponendo: la pratica del calcolo di valori approssimati della radice quadrata di 2 doveva essere ben diffusa, e comunque al procedimento doveva annettersi grande importanza, se perfino il* teoricissimo *Euclide ritenne necessario inserirlo negli* Elementi, *sia pure sotto una forma geometrica che quasi nasconde le operazioni aritmetiche soggiacenti.*

Passiamo ora alla radice quadrata di 3. Non essendo possibile neppure questa volta trovare due numeri interi x, y *tali che sia:* $y^2 - 3x^2 = 0$ *si ripiega su soluzioni approssimate. Questa volta, però, oltre all'approssimazione:* $y^2 - 3x^2 = \pm 1$ *si ammette anche l'approssimazione meno buona:* $y^2 - 3x^2 = \pm 2$.

Si comincia col procedere per tentativi, come per la radice di 2. Si parte, ad esempio, da $x = 1$, $y = 1$. *Si ha allora:* $y^2 - 3x^2 = 1 - 3 = -2$, *dunque la coppia di valori scelta è accettabile. Se passiamo ora ai valori* $x = 1$, $y = 2$ *abbiamo:* $y^2 - 3x^2 = 4 - 3 = 1$. *Si tratta quindi di una coppia di valori dell'altra serie di approssimazione. Proseguendo per tentativi si trova* $y = 5$, $x = 3$ *e poi:* $y = 7$, $x = 4$ *valori che vanno assegnati ordinatamente a ciascuna delle due serie. E proseguendo ancora si ottiene*:

I)	y)	2	7	26 ...	II)	y)	1	5	19 ...
	x)	1	4	15 ...		x)	1	3	11 ...

La legge di formazione dei valori successivi è assai simile a quella relativa alla radice di 2: variano soltanto i coefficienti. Qui, per $\sqrt{3}$, *si ha lo schema:*

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

Trovare questa legge di formazione è appena meno facile di quanto lo fosse per la radice di 2: ad essa può giungersi con tentativi di carattere empirico. Comunque si può ben supporre che una così semplice estensione fosse alla portata del grande Archimede!

Possiamo ora prolungare le due serie dei valori di x, y. *Otteniamo così:*

I)	y)	2	7	26	97	362	1351 ...
	x)	1	4	15	56	209	780 ...
II)	y)	1	5	19	71	265 ...	
	x)	1	3	11	41	153 ...	

Ritroviamo cioè, ad un certo punto, i due valori approssimati, rispettivamente per difetto e per eccesso, della radice quadrata di 3 (265/153 e 1351/780) che Archimede adopera nella sua Misura del cerchio.

È singolare che la proposizione terza, la quale, con la sua determinazione approssimata di π, *costituisce uno dei più noti titoli di merito di Archimede, abbia incontrato le critiche di Leonardo Pisano (detto il Fibonacci), il grande matematico italiano vissuto tra la fine del XII e il principio del XIII secolo. Questi sostiene che l'*invenzione *di Archimede è, sì,* bella e sottile assai, *ma che egli, Leonardo, può far meglio ottenendo gli stessi risultati operando su numeri più piccoli di quelli da Archimede usati.*

Senza entrare nel merito del confronto tra i metodi seguiti (confronto che può dar luogo a qualche dubbio nei riguardi di quello di Leonardo Pisano) constatiamo che è immenso l'ardimento mostrato da un matematico del Duecento, nel presumere di poter far meglio di Archimede! Leonardo Pisano precorre, è vero, i suoi tempi, e solo agli inizi del secolo XVI si avrà, *con la risoluzione dell'equazione cubica, il vero superamento dell'opera degli antichi: non esitiamo, tuttavia, a vedere, quasi simbolicamente, in quella pagina della* Practica geometriae *di Leonardo Pisano, l'atto di nascita della matematica moderna! Per maggiori particolari cfr. A. Frajese,* Attraverso la storia della matematica (op. cit.), *pp. 300-302.*

PROPOSIZIONI

Proposizione I.

Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [= all'altro cateto] [1].

Si abbia il cerchio $ABCD$ [che] rispetto al triangolo E [sia] come s'è supposto: dico che esso è uguale [al triangolo].

[1] L'enunciato di questo primo teorema si presenta in forma alquanto contorta: noi preferiremmo dire: « Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo avente uno dei cateti uguale al raggio e l'altro cateto uguale alla circonferenza del cerchio ».

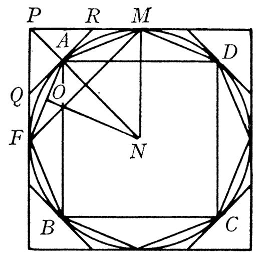
Il teorema costituì il punto di partenza per la determinazione intuitiva della superficie della sfera, come Archimede stesso ci fa sapere alla fine della prop. 2 del *Metodo*.

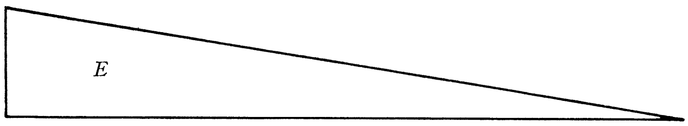
La dimostrazione di questo primo teorema ci offre un esempio tipico di applicazione del classico metodo di esaustione (per esso cfr. paragrafo 3 della *Introduzione* generale). Si procede *per assurdo*, dimostrando l'impossibilità che il cerchio C sia maggiore del triangolo E, e che sia minore di esso: se ne deduce l'uguaglianza $C = E$.

1) Supposto $C > E$ si consideri la differenza $C - E$ e si inscriva nel cerchio il quadrato, poi l'ottagono regolare e così via, raddoppiando sempre il numero dei lati. Archimede si serve cioè, senza farvi riferimento esplicito, del procedimento costruttivo-dimostrativo della XII, 2 degli *Elementi* di Euclide, di cui già si è servito nell'opera *Sulla sfera e il cilindro* (cfr. nota 10 a *Sf. cil.*, I, 6). Ad un certo punto, per un poligono P, la somma dei segmenti circolari *residui* diventi minore di $C - E$ (Eucl., XII, 2): si avrà allora: $C - P < C - E$ da cui $P > E$. Ma ciò è assurdo: infatti tutti i poligoni inscritti rappresentano valori approssimati per difetto non soltanto di C, ciò che è evidente, ma anche di E, poiché ogni poligono P equivale ad un triangolo avente per base il perimetro del poligono (minore dunque della base di E) e per altezza l'apotema NO (minore del raggio del cerchio, e quindi minore dell'altezza del triangolo E). Si sarebbe invece *infiltrato* un poligono P tra E e C, ciò che è assurdo.

2) Similmente si procede per dimostrare impossibile l'ipotesi $C < E$: si ricorre questa volta ad analoga costruzione relativa ai poligoni circoscritti anziché inscritti.

Infatti sia, se possibile, maggiore il cerchio, e si inscriva in esso il quadrato AC, e si dividano [successivamente] gli archi della circonferenza per metà, e siano i segmenti [circolari] già minori dell'eccesso di cui il cerchio supera il triangolo; il poligono [$AMDCBF$ così ottenuto] sarà dunque pure maggiore del triangolo. Si prenda il centro N e la per-





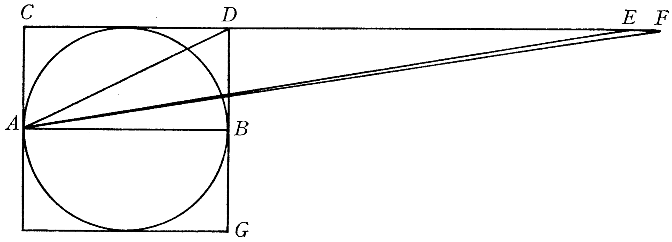
pendicolare NO [al lato AF]; dunque la NO è minore del lato [VU] del triangolo. Ed è anche il perimetro del poligono [$AMDCBF$] minore dell'altro lato [UZ del triangolo E], poiché è [minore] anche del perimetro del cerchio (*Sf. cil.*, I: alla fine dei postulati): dunque il poligono è minore del triangolo E, ciò che è impossibile.

Sia ora il cerchio, se possibile, minore del triangolo E, e si circoscriva [ad esso] il quadrato, e si dividano [successivamente] per metà gli archi della circonferenza, e si conducano [rette] tangenti per i punti [di divisione]: dunque l'angolo PAR è retto (Eucl., III, 18). La PR è dunque maggiore della MR: infatti la RM è uguale alla RA; e il triangolo RPQ è maggiore della metà della figura $PFAM$. Si lascino [segmenti circolari] simili a quello QFA minori dell'eccesso di cui il [triangolo] E supera il cerchio $ABCD$: dunque ancora il poligono circoscritto è minore di E, ciò che è impossibile: è infatti maggiore, poiché la NA è uguale all'altezza [VU] del triangolo, e il perimetro è maggiore della base [UZ] del triangolo. Dunque il cerchio è uguale al triangolo E.

PROPOSIZIONE 2.

Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14 [2].

Sia un cerchio, il diametro del quale [sia] la AB, e si circoscriva [ad esso] il quadrato CG, e il doppio di CD sia DE, ed EF sia la settima parte di CD. E poiché il [trian-



golo] ACE ha rispetto al [triangolo] ACD il rapporto che 21 ha rispetto a 7, il [triangolo] ACD ha rispetto a [quello]

[2] Questa proposizione seconda applica la terza: quindi (come abbiamo già avvertito nella nota 37 alla prop. *Sf. cil.*, I, 13) deve essere stata scambiata di posto con la seguente da un copista. Va poi constatata una certa grossolanità nell'enunciato di questa prop. 2: non si fa alcuna menzione del fatto che si tratta di risultati approssimati, come invece chiaramente mostra la prop. 3. Tutto ciò, oltre ai caratteri linguistici che l'opera presenta, starebbe a dimostrare che la *Misura del cerchio* non è giunta a noi esattamente secondo la stesura di Archimede.

Nella dimostrazione viene circoscritto al cerchio il quadrato CG (che è quindi il *quadrato del diametro*): esso risulta quadruplo del triangolo ACD. Si costruisce poi: $DE = 2\,CD$ ed: $EF = CD$, sicché: $CF = \left(3 + \frac{1}{7}\right) CD = \frac{22}{7}\,CD$. Per la prop. 3 il segmento CF è *approssimativamente* uguale alla circonferenza del cerchio di diametro AB, quindi il triangolo ACF è *approssimativamente* uguale a detto cerchio, avendo la base uguale alla circonferenza approssimata e l'altezza uguale al raggio. Ma detto triangolo ACF sta al triangolo ACD nel rapporto $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, quindi se consideriamo il rapporto tra il triangolo ACF e il quadrato del diametro CD (quadrato che è quadruplo del triangolo ACD) il rapporto è quattro volte minore del precedente: può pertanto essere espresso dalla frazione $11 : 14$ (dividendo per 2 il numeratore 22 e moltiplicando per 2 il denominatore 7).

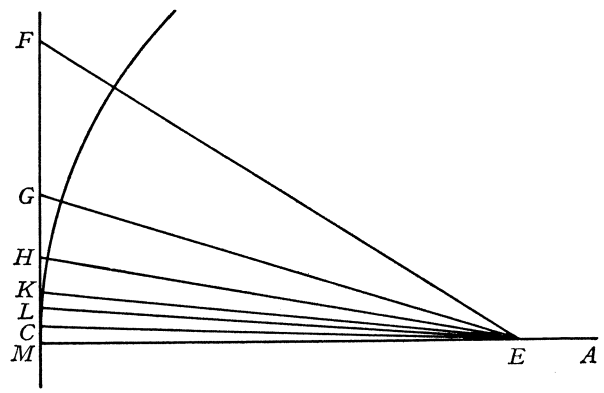
AEF il rapporto che 7 ha rispetto a 1 (Eucl., VI, 1); dunque il triangolo *ACF* ha rispetto al triangolo *ACD* il rapporto che 22 ha rispetto a 7 (Eucl., V, 24 o V, 2). Ma il quadruplo del triangolo *ACD* è il quadrato *CG* (Eucl., I, 34), e il triangolo *ACDF* è uguale al cerchio [di diametro] *AB* (prop. 1): il cerchio ha dunque rispetto al quadrato *CG* il rapporto che 11 ha rispetto a 14 (prop. 3).

Proposizione 3.

La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi [3].

Sia un cerchio: il diametro [sia] la *AC*, il centro [sia] il [punto] *E*, la [retta] *CLF* sia tangente, e [l'angolo] *FEC* [sia] la terza parte di un [angolo] retto.

La *EF* ha rispetto alla *FC* il rapporto che 306 ha rispetto a 153, mentre la *EC* ha rispetto a *CF* il rapporto



che 265 ha rispetto a 153 [$EF : CF = 306 : 153$; $EC : CF = 265 : 153$].

Si divida ora l'angolo *FEC* per metà mediante la *EG*; si ha dunque: $EF : EC = FG : CG$ (Eucl., VI, 3) quindi

[3] Per la prop. 3 il lettore troverà un ampio commento nella *Nota introduttiva* a quest'opera *Misura del cerchio*.

[componendo e permutando]: $(EF + EC) : FC = EC : CG$ cosicché EC ha rispetto a CG rapporto maggiore di quello che 571 ha rispetto a 153.

Dunque il rapporto duplicato di EG rispetto a CG è lo stesso di 349450 rispetto a 23409: dunque il rapporto semplice di EG a CG è quello di 591 1/8 rispetto a 153.

Di nuovo [si divida] per metà l'angolo GEC mediante la EH: per mezzo delle stesse cose [prima vedute] dunque la EC ha rispetto a CH rapporto maggiore di quello che 1162 1/8 ha rispetto a 153: dunque la HE ha rispetto a HC rapporto maggiore di quello che 1172 1/8 ha rispetto a 153 [$EC : CH > 1162\ 1/8 : 153$; $HE : HC > 1172\ 1/8 : 153$].

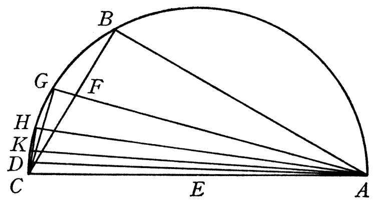
Ancora [si divida] per metà l'angolo HEC mediante la EK: dunque la EC ha rispetto a CK rapporto maggiore di quello che 2334 1/4 ha rispetto a 153; [$EC : CK > 2334\ 1/4 : 153$].

Ancora [si divida] per metà l'angolo KEC mediante la EL: dunque la EC ha rispetto alla LC rapporto maggiore di quello che 4673 1/2 ha rispetto a 153: [$EC : LC > 4673\ 1/2 : 153$].

Poiché dunque l'angolo FEC, che è la terza parte di un [angolo] retto, è stato diviso quattro volte in [due] parti uguali, l'angolo CEL è un quarantottesimo di angolo retto. Si ponga ora ad esso uguale l'angolo CEM [con vertice] nel punto E: dunque l'angolo LEM è uguale ad un ventiquattresimo di [angolo] retto, e dunque la retta LM è il lato del poligono circoscritto al cerchio avente 96 lati. E poiché dunque è stato dimostrato che la EC ha rispetto alla GL rapporto maggiore di quello che 4673 1/2 ha rispetto a 153, ma AC è doppia della EC, ed LM è doppia della CL, anche la AC ha dunque rispetto al perimetro del poligono di 96 lati rapporto maggiore di quello che 4673 1/2 ha rispetto a 14688. E 14688 è triplo di 4673 1/2 con l'avanzo di 667 1/2, avanzo che è minore della settima parte di 4673 1/2: sicché il perimetro del poligono circoscritto al cerchio è minore del triplo e un settimo del diametro: dunque la circonferenza del cerchio a più forte ragione è minore del triplo e un settimo del diametro (*Sf. cil.*, I, 1).

Sia ancora un cerchio e il diametro sia AC, e l'angolo BAC sia un terzo di [angolo] retto: la AB ha dunque rispetto a BC rapporto minore di quello che 1351 ha rispetto a 780: $[AB : BC < 1351 : 780]$.

Si divida per metà l'angolo BAC mediante la AG. Poiché dunque l'angolo BAG è uguale a quello GCB (Eucl., III, 26) ma anche a quello HAC, anche [l'angolo] GCB è uguale a[ll'angolo] GAC. Ed è comune l'[angolo] retto AGC, e dunque il terzo angolo GFC è uguale al terzo [angolo] ACG. Dunque il [triangolo] AGC ha gli angoli uguali a quelli del triangolo CGF; si ha quindi: $AG : GC = GC : GF = AC : CF$. Ma $AC : CF = (CA + AB) : BC$ (Eucl., VI, 3; V, 18; V, 16) e: $(CA + AB) : BC = AC : GC$.



Per questo dunque AG ha rispetto a GC rapporto minore di quello che 2911 ha rispetto a 780: $[AG : GC < 2911 : 780]$ e la AC ha rispetto alla GC rapporto minore di quello di 3013 3/4 rispetto a 780: $AC : CG < 3013\ 3/4 : 780$.

Si divida per metà l'[angolo] CAG mediante la AH: dunque per le stesse cose [prima vedute] la AH ha rispetto alla HC rapporto minore di quello che 5924 1/8 ha rispetto a 780: $[AH : HC < 5924\ 1/8 : 780]$; una di esse è infatti i 4/13 dell'altra, cosicché la AC ha rispetto alla HC rapporto minore di quello che 1838 9/11 ha rispetto a 240: $[AC : HC < 1838\ 9/11 : 240]$.

Ancora si divida per metà l'angolo HAC mediante la AK: quindi la AK ha rispetto alla KC rapporto minore di quello che 1007 ha rispetto a 66: $[AK : KC < 1007 : 66]$; una di esse è infatti gli 11/40 dell'altra. Dunque la AC ha rispetto alla KC rapporto minore di quello che 1009 1/6 ha rispetto a 66: $[AC : KC < 1009\ 1/6 : 66]$.

Si divida ancora per metà l'angolo KAC mediante la AL: dunque la AL ha rispetto alla LC rapporto minore di quello che 2016 1/6 ha rispetto a 66: $[AL : LC < 2016\ 1/6 : 66]$

e la AC ha rispetto a CL rapporto minore di quello che 2017 1/4 ha rispetto a 66: [$AC : CL < 2017\ 1/4 : 66$].

Invertendo (Eucl., V, 7, coroll.) si ha dunque che il perimetro del poligono ha rispetto al diametro rapporto maggiore di quello che 6336 ha rispetto a 2017 1/4: [perimetro poligono : diametro $> 6336 : 2017\ 1/4$].

Ma 6336 è maggiore del triplo e 10/71 di 2017 1/4: dunque il perimetro del poligono di 96 lati inscritto nel cerchio è maggiore del triplo e 10/71 del diametro, cosicché il cerchio a più forte ragione è maggiore del triplo e 10/71 del diametro.

Dunque la circonferenza del cerchio è maggiore del triplo del diametro ed eccede il triplo per meno di 1/7 e per più di 10/71.