Segnali da un satellite geostazionario

Il problema

Un satellite geostazionario emette segnali a intervalli regolari, che vengono ricevuti sulla Terra, da un ricevitore in posizione nota sull'equatore. Calcolare l'intervallo di tempo tra i segnali ricevuti.

S'intende che gli intervalli in trasmissione sono misurati con un orologio posto a bordo del satellite, e quelli in ricezione con un orologio adiacente al ricevitore.

Prime relazioni

Tutto si svolge nel piano dell'equatore; dunque per individuare qualsiasi evento sono sufficienti due coordinate polari r, φ, oltre alla coordinata temporale t. Le equazioni delle linee orarie del satellite e del ricevitore sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} r &= r_1 \qquad \varphi = \varphi_{10} + \omega t \\ r &= r_2 \qquad \varphi = \varphi_{20} + \omega t \end{aligned} \tag{1}$$

dove φ_{10}, φ_{20} sono le posizioni all'origine del tempo di Schwarzschild t; r_1, r_2 sono entrambe costanti e note. Infatti r_2 è il raggio equatoriale della Terra; r_1 si ricava dalla condizione

$$\omega^2\, r_1^3 = GM. \tag{2}$$

Qui ω è la velocità angolare della Terra (e quindi anche del satellite) rispetto a un RIL solidale al centro della Terra. Da notare che la (1), che si deduce in modo ben noto nella meccanica newtoniana, vale esattamente anche in RG, sebbene la dimostrazione non sia banale.

Eventi e metrica

Consideriamo ora due segnali successivi, A e B, emessi dal satellite. Ad essi sono associati 4 eventi: i due eventi di emissione A_1 e B_1, e i due eventi di ricezione A_2 e B_2. Le loro coordinate spazio-temporali sono:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}_1: \qquad t_{\mathrm{A}1}, \quad r_1, \quad \varphi_{10} + \omega\, t_{\mathrm{A}1} \\ &\mathrm{B}_1: \qquad t_{\mathrm{B}1}, \quad r_1, \quad \varphi_{10} + \omega\, t_{\mathrm{B}1} \\ &\mathrm{A}_2: \qquad t_{\mathrm{A}2}, \quad r_2, \quad \varphi_{20} + \omega\, t_{\mathrm{A}2} \\ &\mathrm{B}_2: \qquad t_{\mathrm{B}2}, \quad r_2, \quad \varphi_{20} + \omega\, t_{\mathrm{B}2}. \end{aligned}$$

Non abbiamo bisogno di studiare in dettaglio la propagazione dei segnali: ci basta assumere che le leggi di propagazione non variano nel tempo, per concludere che i due intervalli

$$t_{\mathrm{A}2} - t_{\mathrm{A}1} \qquad t_{\mathrm{B}2} - t_{\mathrm{B}1}$$

sono uguali. Ne segue che anche $t_{\mathrm{B}1} - t_{\mathrm{A}1}$ e $t_{\mathrm{B}2} - t_{\mathrm{A}2}$ sono uguali: indicherò con Δt il loro comune valore.

L'orologio sul satellite e quello a terra indicano rispettivamente il tempo trascorso tra gli eventi A_1, B_1 e tra A_2, B_2; ma i tempi segnati non sono Δt, bensì i *tempi propri* dei due orologi: chiamiamoli $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$. Questi si ricavano dalla metrica di Schwarzschild, la cui espressione generale è

$$d\tau^2 = \frac{r-1}{r}\,dt^2 - \frac{r}{r-1}\,dr^2 - r^2 d\varphi^2. \tag{3}$$

Nota: Nella (3) per semplificare ho assunto $c = 1$, e ho preso come unità di lunghezza il raggio di Schwarzschild r_* della Terra:

$$r_* = \frac{2\,GM}{c^2} = 0.89\,\mathrm{cm}.$$

In queste unità la (2) si scrive

$$\omega^2\, r_1^3 = \tfrac{1}{2}\,. \tag{4}$$

Abbiamo poi

$$r_1 = 3.0 \cdot 10^9 \qquad r_2 = 7.2 \cdot 10^8.$$

Dalle (1) si ha, sulle linee orarie di ciascun orologio:

$$dr = 0 \qquad d\varphi = \omega\, dt$$

e sostituendo nella (3):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r} - \omega^2 r^2\right) dt^2.$$

L'espressione in parentesi è costante, e possiamo quindi integrare:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_1^2 &= \left(1 - \frac{1}{r_1} - \omega^2 r_1^2\right) \Delta t^2 \\ \Delta\tau_2^2 &= \left(1 - \frac{1}{r_2} - \omega^2 r_2^2\right) \Delta t^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Si vede subito che tutti i termini in parentesi dopo 1 sono molto piccoli, per cui possiamo approssimare, estraendo le radici quadrate:

$$\Delta\tau_1 = \left(1 - \frac{1}{2\,r_1} - \tfrac{1}{2}\,\omega^2 r_1^2\right)\Delta t \tag{6}$$

$$\Delta\tau_2 = \left(1 - \frac{1}{2\,r_2} - \tfrac{1}{2}\,\omega^2 r_2^2\right)\Delta t \tag{7}$$

da cui

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = 1 + \frac{1}{2\,r_1} + \tfrac{1}{2}\omega^2 r_1^2 - \frac{1}{2\,r_2} - \tfrac{1}{2}\omega^2 r_2^2.$$

Posso usare la (4) per eliminare ω:

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = 1 + \frac{3}{4\,r_1} - \frac{1}{2\,r_2} - \frac{r_2^2}{4\,r_1^3}$$

e inserendo i numeri

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = 1 + 2.5\cdot 10^{-10} - 6.9\cdot 10^{-10} - 4.8\cdot 10^{-12} = 1 - 4.4\cdot 10^{-10}. \tag{8}$$

La (8) mostra che $\Delta\tau_2 < \Delta\tau_1$, ossia che il tempo alla ricezione è minore che alla trasmissione. In altre parole, la frequenza dei segnali risulta *aumentata*.

Commento

I termini che seguono l'unità a secondo membro delle (6), (7) vengono usualmente interpretati come segue:

– il primo, come rallentamento dell'orologio nel campo gravitazionale della Terra

– il secondo, come dilatazione relativistica del tempo.

Da questo punto di vista, si vede che i due effetti per l'orologio in orbita sono dello stesso ordine (il secondo è metà del primo, e hanno lo stesso segno); invece per l'orologio sulla Terra il primo è molto maggiore del secondo.

Va anche precisato che quando si parla di "rallentamento" o di "dilatazione" il confronto viene fatto col tempo t di Schwarzschild, che è il tempo segnato da un orologio *fermo a grande distanza*. Entrambi i nostri orologi "rallentano" rispetto a questo, ma in misura diversa; ed è solo questa differenza che noi possiamo misurare.

Ci sono però varie ragioni per cui una tale interpretazione è criticabile. Qui non posso intrattenermi, e mi limito a far notare che le (6), (7) sono *approssimazioni*: nelle formule corrette per $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$, che non ho scritte ma che si possono facilmente ricavare dalle (5), i due contributi *non sono additivi* e quindi non possono essere separati.