E. Fabri *settembre 2007* *

Formalizzazione intrinseca della sincronizzazione

Premessa

Si cerca di dare qui una versione formale ma intrinseca del problema della sincronizzazione in relatività ristretta (RR), anche con l'obbiettivo di trattare il ben noto "paradosso del riferimento rotante."

Sistema di orologi

Un *sistema di orologi* è un campo vettoriale di tipo tempo $\mathbf{u}$, definito in tutto lo spazio-tempo (o solo in una parte? un aperto? un tubo?). Associato al campo $\mathbf{u}$ ci sarà il suo insieme di curve integrali, che possiamo intendere come curve orarie di orologi materiali. Conviene supporre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$, così che il parametro sulle curve integrali è il tempo proprio degli orologi, e $\mathbf{u}$ è la loro quadrivelocità.

Per ogni punto A dello spazio-tempo passa una e una sola curva oraria (un solo orologio). Per ciascun orologio il tempo proprio è fissato *a meno di una costante additiva*, ossia a meno della scelta del particolare punto, sulla propria curva oraria, dove l'orologio segna zero.

Sincronizzazione locale

Una *sincronizzazione locale* in un punto A consiste nella determinazione dei vettori $\mathbf{v}$ tali che

$$\mathbf{q}_+ = \mathbf{v} + k\mathbf{u}, \quad \mathbf{q}_- = \mathbf{v} - k\mathbf{u} \tag{1}$$

siano entrambi vettori nulli, essendo $k > 0$ uno scalare opportunamente scelto.

Spiegazione: Se γ è una curva per $\mathrm{A} = \gamma(0)$, tangente a $\mathbf{v}$, e $\mathrm{B} = \gamma(\lambda)$, scegliamo in A e in B le origini degli orologi che passano per quei punti dello spazio-tempo. Allora la luce che segue la geodetica nulla per A tangente a $\mathbf{q}_+$ raggiunge l'orologio B quando esso segna un tempo $\tau = k\lambda$ (a meno di termini di ordine superiore in λ). Analogamente, la luce che arriva in A seguendo la geodetica tangente a $\mathbf{q}_-$, è partita quando l'orologio B segnava $-\tau$. Si tratta dunque della consueta *sincronizzazione di Einstein.*

Osservazione: La definizione adottata per la sincronizzazione è *intrinseca*: non si fa nessuna ipotesi circa la propagazione della luce "vista da un particolare rif.," ma si usa solo il fatto che le geodetiche della luce sono nulle. Però questa

* Versione originaria: maggio 1996. Nel gennaio 2002 modifiche in diversi punti; in particolare alla discussione dell'esempio 4 e alla sezione finale. Nella presente versione modifiche secondarie.

definizione equivale a supporre che la velocità della luce sia sempre c nel rif. inerziale *tangente* in A al sistema di orologi, cosa inevitabile nella RR.

Dalle (1) segue subito $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = -k^2$, che determina k una volta noto $\mathbf{v}$ e richiede che $\mathbf{v}$ sia di tipo spazio; ma sempre dalle (1) segue anche (e soprattutto)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

che fissa l'insieme dei possibili $\mathbf{v}$. Si tratta di un *sottofibrato* $\mathcal{T}'$ di dimensione 3 e di tipo spazio.

Isocronismo come forma differenziale; sincronizzazione globale

Definiamo la forma $\boldsymbol{\sigma}$ mediante

$$\forall \mathbf{v} : \ \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v};$$

allora la (2) diventa

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = 0. \tag{3}$$

Se $\boldsymbol{\sigma}$ è *integrabile* è possibile estendere la sincronizzazione a tutto lo spazio, nel senso che comunque scelto A esiste un'ipersuperficie Σ, di tipo spazio, passante per A e tale che ogni vettore $\mathbf{v}$ tangente a Σ soddisfa la (3). Parlerò in questo caso di sincronizzazione *globale*.

Nota 1: Poiché il punto A è arbitrario, le ipersuperfici Σ definiscono una "foliazione" dello spazio-tempo. Se g è una funzione scalare che ha le Σ come insiemi di livello, si ha $\langle \mathbf{d}g, \mathbf{v} \rangle = 0$ per ogni $\mathbf{v}$ tangente a Σ, il che mostra che $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{d}g$ sono linearmente dipendenti: esiste una funzione scalare f tale che $\boldsymbol{\sigma} = f\,\mathbf{d}g$. È ovviamente vero il viceversa: comunque scelta f, la forma $f\,\mathbf{d}g$ è certo integrabile.

Nota 2: Ne segue anche che $\forall h$, $\boldsymbol{\varrho} = h\boldsymbol{\sigma}$ è integrabile sse lo è $\boldsymbol{\sigma}$, in ogni aperto in cui $h \neq 0$.

Dim.: Condizione nec. e suff. perché $\boldsymbol{\sigma}$ sia integrabile è (*Bishop–Goldberg*, p. 201, teorema 4.10.1) che esista una forma $\boldsymbol{\mu}$ tale che

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\sigma}.$$

Se $\boldsymbol{\sigma}$ è integrabile

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\varrho} = \mathbf{d}h \wedge \boldsymbol{\sigma} + h\,\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{d}h + h\boldsymbol{\mu}) \wedge \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{1}{h}\,\mathbf{d}h + \boldsymbol{\mu} \right) \wedge \boldsymbol{\varrho}$$

e anche $\boldsymbol{\varrho}$ è integrabile. Il viceversa è ovvio: basta scambiare $\boldsymbol{\varrho}$ con $\boldsymbol{\sigma}$. ∎

Nota 3: Anche in caso di sincronizzazione globale, non è affatto detto che fra due diverse Σ della famiglia il $\Delta\tau$ sia lo stesso per tutti gli orologi: è ancora possibile un effetto di "redshift," come sarà mostrato negli esempi.

Il principale risultato di questa sezione è che la possibilità di una sincronizzazione globale dipende solo dalla scelta del campo $\mathbf{u}$, ossia dalla *legge di moto* degli orologi. In particolare, non dipende dalla metrica in sé: infatti basta prendere un sistema di coordinate $\{x^\alpha\}$ tale che le ipersuperfici $x^0 = \text{cost.}$ siano di tipo spazio, e porre $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}x^0$, per soddisfare tutti i requisiti per la sincronizzazione. Si noti però che $\mathbf{u}$ non sarà in generale parallelo a $\mathbf{e}_0$: questo accade solo se i g_{0i} sono nulli (sistema di coordinate *time-orthogonal* secondo Møller).

Esempio 1

In uno spazio-tempo piatto, con coordinate cartesiane t, x, y, z, prendiamo come curve orarie degli orologi

$$t = \lambda, \quad x = \bar{x} + v\lambda, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}$$

da cui

$$\mathbf{u} = \gamma\,(\mathbf{e}_t + v\,\mathbf{e}_x) \qquad \boldsymbol{\sigma} = \gamma\,(\mathbf{d}t - v\,\mathbf{d}x).$$

Poiché $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$, $\boldsymbol{\sigma}$ è integrabile:

$$\boldsymbol{\sigma} = \gamma\,\mathbf{d}(t - vx)$$

e le ipersuperfici Σ hanno equazione $t - vx = \text{cost.}$

Posso usare come coordinate λ, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$: trovo per la metrica

$$d\tau^2 = (1 - v^2)\,d\lambda^2 - d\bar{x}^2 - 2v\,d\lambda\,d\bar{x} - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2.$$

Su Σ si ha $t = vx + \text{cost.}$, da cui segue che posso sostituire $d\lambda$ con $v\,d\bar{x}/(1 - v^2)$. Ottengo così

$$ds^2 = \gamma^2\,d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2$$

e la sezione riesce euclidea, come si vede con un ulteriore cambiamento della coordinata $\bar{x}$ per il fattore moltiplicativo γ.

Abbiamo così mostrato la sincronizzazione globale degli orologi di un rif. inerziale che si muove con velocità v rispetto a quello di partenza. In questo caso si ha, per tutti gli orologi, $\tau = \gamma\,(t - vx)$ che è costante su ciascuna Σ.

Esempio 2

Sempre in uno spazio-tempo piatto, prendiamo come curve orarie degli orologi

$$t = \bar{x}\,\sinh\lambda, \quad x = \bar{x}\,\cosh\lambda, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}$$

da cui

$$\mathbf{u} = (x^2 - t^2)^{-1/2}\,(x\,\mathbf{e}_t + t\,\mathbf{e}_x) \qquad \boldsymbol{\sigma} = (x^2 - t^2)^{-1/2}\,(x\,\mathbf{d}t - t\,\mathbf{d}x).$$

Poiché

$$\mathbf{d}(x\,\mathbf{d}t - t\,\mathbf{d}x) = 2\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t = \frac{2}{x}\,\mathbf{d}x \wedge (x\,\mathbf{d}t - t\,\mathbf{d}x)$$

anche $\boldsymbol{\sigma}$ è integrabile. Infatti

$$\boldsymbol{\sigma} = \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - t^2}\,\mathbf{d}\ln\frac{x-t}{x+t}$$

e le ipersuperfici Σ hanno equazione $(x-t)/(x+t) = \text{cost.}$, ossia $x/t = \text{cost.}$

Posso ancora usare come coordinate λ, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$: trovo per la metrica

$$d\tau^2 = \bar{x}^2 d\lambda^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2.$$

Su Σ si ha $\lambda = \text{cost.}$, per cui

$$ds^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2$$

e la sezione riesce ancora euclidea.

Nota: Da un punto di vista formale la cosa è banale, perché le coordinate y e z non entrano in gioco, e siamo ridotti a una varietà bidimensionale. Ora una forma diff. in una varietà bidim. *è sempre integrabile*, perché lo spazio delle 2-forme è unidimensionale. Per la stessa ragione, le superfici Σ *sono sempre euclidee.*

Questo esempio dimostra che è possibile sincronizzare globalmente un sistema di orologi in moto iperbolico (rif. uniformemente accelerato). Tuttavia qui $\tau = \bar{x}\lambda$ che non è costante su Σ (salvo per $\lambda = 0$): è il noto redshift del rif. accelerato.

Esempio 3

Prendiamo ora come curve orarie degli orologi

$$t = a\,\sinh\lambda, \quad x = \bar{x} + a\,\cosh\lambda, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}$$

da cui

$$\mathbf{u} = \sqrt{a^2 + t^2}\,\mathbf{e}_t + t\,\mathbf{e}_x \qquad \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{a^2 + t^2}\,\mathbf{d}t - t\,\mathbf{d}x.$$

Anche questa è integrabile:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}\left(a\,\ln\frac{\sqrt{a^2 + t^2} - a}{|t|} + \sqrt{a^2 + t^2} - x\right)$$

e le ipersuperfici Σ hanno equazione

$$x = a\,\ln\frac{\sqrt{a^2 + t^2} - a}{|t|} + \sqrt{a^2 + t^2} + \text{cost.}$$

La metrica indotta su Σ si ottiene nel modo più semplice usando coordinate t, $\bar{y}$, $\bar{z}$, e ponendo $dx = \sqrt{a^2 + t^2}\,(dt/t)$:

$$ds^2 = a^2 (d \ln |t|)^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2.$$

La metrica è ancora euclidea, per la stessa ragione dell'esempio 2.

Esempio 4

Sempre in uno spazio-tempo piatto, in coordinate cilindriche t, r, φ, z, prendiamo come sistema di orologi il seguente:

$$t = \lambda, \quad r = \bar{r}, \quad \varphi = \bar{\varphi} + \omega\lambda, \quad z = \bar{z}. \tag{4}$$

Ne segue

$$\mathbf{u} = (1 - \omega^2 r^2)^{-1/2}\,(\mathbf{e}_t + \omega\,\mathbf{e}_\varphi)$$

da cui

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega^2 r^2)^{-1/2}\,(\mathbf{d}t - \omega\,r^2\mathbf{d}\varphi). \tag{5}$$

Ma

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}t - \omega\,r^2\mathbf{d}\varphi) = -2\omega\,r\,\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\varphi$$

e da qui si vede subito che $\boldsymbol{\sigma}$ *non è* integrabile.

Posso usare come coordinate λ, $\bar{r}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{z}$:

$$d\tau^2 = (1 - \omega^2 \bar{r}^2)\,d\lambda^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\varphi}^2 - 2\omega\,\bar{r}^2 d\lambda\,d\bar{\varphi} - d\bar{z}^2$$

e in queste coordinate la (1) si scrive:

$$(1 - \omega^2 \bar{r}^2)\,v^\lambda - \omega\,\bar{r}^2\,v^{\bar{\varphi}} = 0 \tag{6}$$

che posso usare per eliminare v^λ, nel senso che per tutti i $\mathbf{v} \in \mathcal{T}'$ so che v^λ e $v^{\bar{\varphi}}$ sono legati dalla (6).

Allora, se $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ appartengono a $\mathcal{T}'$, il loro prodotto scalare si scrive

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -v^{\bar{r}} w^{\bar{r}} - \frac{\bar{r}^2}{1 - \omega^2\,\bar{r}^2}\,v^{\bar{\varphi}} w^{\bar{\varphi}} - v^{\bar{z}} w^{\bar{z}}.$$

Esiste dunque una *metrica indotta su* $\mathcal{T}'$, che con grossolano abuso di notazione posso scrivere

$$ds^2 = d\bar{r}^2 + \frac{\bar{r}^2}{1 - \omega^2\,\bar{r}^2}\,d\bar{\varphi}^2 + d\bar{z}^2.$$

Questa sembra indicare una "geometria spaziale non euclidea," ma naturalmente ciò non è vero perché *la sezione spaziale non esiste*, visto che $\boldsymbol{\sigma}$ non è integrabile.

Nota 1: L'impossibilità di sincronizzazione globale di questo sistema di orologi non dipende dall'aver supposto che nel loro riferimento (rotante) la velocità della luce sia invariante, ma solo che questo sia vero nel rif. inerziale tangente.

Nota 2: Viceversa, la presunta "geometria spaziale non euclidea" è strettamente connessa con la definizione adottata per la sincronizzazione locale. Se si rinuncia a questa, ad es. sincronizzando a t costante, il che implica rinunciare all'invarianza della velocità della luce, la metrica spaziale non può essere dedotta.

Esiste la contrazione della lunghezza della circonferenza?

Si può affrontare la questione da diversi punti di vista. L'argomento classico (Einstein) è che un metro campione sulla piattaforma appare più corto nel rif. del laboratorio; d'altra parte nel rif. del laboratorio la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$, quindi il rapporto fra il numero di metri che la ricoprono, e di quelli che ricoprono il raggio, sarà $> 2\pi$. Ma tali numeri sono invarianti: ne segue che il fisico sulla piattaforma giudicherà che la circonferenza è $> 2\pi r$.

Se è necessario precisare che cosa s'intende per "piattaforma rotante," la definizione è data dall'es. 4: le (4) possono essere lette come le curve orarie dei punti della piattaforma, che a un certo t hanno ruotato rigidamente di un angolo ωt. Non è importante che possa essere difficile o impossibile realizzare, anche approssimativamente, la piattaforma con un corpo solido, causa la forza centrifuga: si può sempre pensare di correggere le deformazioni con un sistema attivo.

Sorge la difficoltà che non esiste una sincronizzazione globale. Però per stabilire la contrazione di Lorentz questa non è necessaria: basta postulare che *in un percorso di andata e ritorno* la velocità della luce sia c (notare: andata e ritorno, non genericamente curva chiusa). Ciò posto, si può fare una misura di lunghezza col metodo radar, e analizzare l'esperimento dal rif. del laboratorio. Il risultato è appunto la contrazione di Lorentz.

Il riferimento tangente

Può essere utile descrivere il moto della piattaforma dal rif. tangente. Per fissare le idee, considero il rif. tangente al punto che per $t = 0$ occupa la posizione $x = r$, $y = 0$. La velocità del rif. tangente è quindi $v = \omega r$, ed è diretta nel verso positivo dell'asse y. Chiamerò K$'$ questo rif., K quello in cui il centro della piattaforma è in quiete.

In mecc. newtoniana la situazione è (relativamente) semplice: la piattaforma rotola all'indietro, senza strisciare, sulla retta $x = r$. I punti della circonferenza descrivono cicloidi di passo $2\pi r$, ecc.

In mecc. relativistica le cose si complicano parecchio. In primo luogo, il bordo della piattaforma non è circolare, ma ellittico, causa la contrazione di Lorentz nel passaggio da K a K$'$. La lunghezza dell'ellisse è ovviamente minore di $2\pi r$:

l'espressione esatta è $l = 4r\,E(v^2)$, dove E indica l'integrale ellittico completo di seconda specie. Si ha

$$l = 2\pi r\left(1 - \tfrac{1}{4}\,v^2 - \tfrac{3}{64}\,v^4 - \cdots\right).$$

Poi, se considero punti equidistanti (in K) sul bordo, essi in K′ non sono più equidistanti: nel punto in cui il bordo è tangente alla retta $x = r$ la distanza è maggiore, perché quel punto della piattaforma è momentaneamente fermo rispetto a K′, mentre il punto diametralmente opposto si muove a velocità $2v/(1+v^2)$ e quindi si ha una contrazione ulteriore. Col passare del tempo i punti scorrono lungo l'ellisse, che si sposta indietro a velocità v, e allo stesso tempo le distanze cambiano.

La traiettoria di ciascun punto del bordo è una cicloide dilatata di un fattore γ in direzione y.

Vediamo i conti: usando coordinate cartesiane, la relazione fra K e K′ è ovviamente

$$t = \gamma\,(t' + vy'), \quad x = x', \quad y = \gamma\,(y' + vt'), \quad z = z'. \tag{7}$$

con le inverse

$$t' = \gamma\,(t - vy), \quad x' = x, \quad y' = \gamma\,(y - vt), \quad z' = z. \tag{8}$$

Inoltre

$$x = r\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\varphi \tag{9}$$

e

$$\varphi = \bar\varphi + \omega t. \tag{10}$$

Dalle (8) segue $x^2 + y^2 = r^2$, e usando le (7)

$${x'}^2 + \gamma^2(y' + vt')^2 = r^2$$

che è l'equazione di un'ellisse di semiassi r e r/γ, con centro in $(0, -vt')$.

Per ottenere la curva oraria di un orologio in K′ debbo esprimere x', y' in funzione di t'. Questo si fa come segue: sostituisco le (7) nelle (9):

$$x' = r\,\cos\varphi, \quad y' = \frac{r}{\gamma}\,\sin\varphi - vt' \tag{11}$$

dove φ è espresso dalla (10) eliminando t, sempre con le (7):

$$\varphi = \bar\varphi + \omega\gamma\,(t' + vy'). \tag{12}$$

Notare che la (12) definisce φ solo implicitamente, perché y' dipende ancora da φ. Sostituendo la seconda delle (11) nella (12), e risolvendo rispetto a t', trovo

$$t' = \frac{\gamma}{\omega}\,(\varphi - \bar{\varphi}) - v\gamma r \sin\varphi \tag{13}$$

e sostituendo nelle (11):

$$x' = r\,\cos\varphi, \quad y' = \gamma r\,(\sin\varphi - \varphi + \bar{\varphi}). \tag{14}$$

Se nelle (14) teniamo fisso $\bar{\varphi}$ abbiamo la curva oraria cercata, parametrizzata da φ anziché da t'. Si vede comunque che si tratta di una cicloide dilatata, come asserito.

Per calcolare la distanza fra due orologi in K$'$ procedo così: differenzio le (11) a t' costante:

$$dx' = -r\,\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy' = \frac{r}{\gamma}\,\cos\varphi\,d\varphi \tag{15}$$

e differenzio anche la (13), che mi dà la relazione fra $d\varphi$ e $d\bar{\varphi}$:

$$d\bar{\varphi} = (1 - v^2\cos\varphi)\,d\varphi = (1 - \omega^2 r x')\,d\varphi.$$

Eliminando $d\varphi$ nelle (15):

$$dx' = -\frac{\gamma y'}{1 - \omega^2 r x'}\,d\bar{\varphi} \qquad dy' = \frac{1}{\gamma}\,\frac{x'}{1 - \omega^2 r x'}\,d\bar{\varphi}.$$

Da queste si ottiene

$$dl'^2 = dx'^2 + dy'^2 = r^2\,(1 - v^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2 = \frac{1 - \omega^2 x'^2}{(1 - \omega^2 r x')^2}\,r^2 d\bar{\varphi}^2$$

e infine

$$dl' = \frac{\sqrt{1 - \omega^2 x'^2}}{1 - \omega^2 r x'}\,dl.$$

Il problema delle molle

Metto n palline sul bordo di una circonferenza, collegate da molle non tese. Faccio ruotare il tutto: se fosse vero il discorso alla Einstein, le distanze dovrebbero aumentare, quindi le molle si tendono e l'energia aumenta. Da dove viene?

Preliminare: due palline e molla, le accelero (con la stessa accelerazione) per un certo tempo. Alla fine hanno la stessa velocità e sono restate alla stessa distanza nel laboratorio, ma si sono allontanate nel riferimento di quiete. Di nuovo la molla si è tesa: stessa domanda.

Soluzione (banale): una molla tesa ha più energia di una a riposo. Se mentre la accelero si allunga, debbo fare lavoro anche per darle questa energia addizionale. In altre parole, la massa (a riposo, ovviamente) della molla, va crescendo man mano che accelera, e perciò non può essere trascurata.

Analogamente, le palline in cerchio una volta messe in moto saranno collegate da molle tese (questo è indiscutibile: basta mettersi, per ciascuna molla, nel suo rif. tangente). Quindi occorrerà del lavoro addizionale per mettere in rotazione il sistema.

Un paradosso?

Se abbiamo un filo rettilineo percorso da corrente, una carica che si muova, per es. parallelamente al filo, sente la forza di Lorentz. Questa forza si spiega, mettendosi nel rif. della carica, col fatto che in questo rif. il filo *non è più neutro*, perché le cariche positive (che erano ferme nell'altro rif.) e quelle negative (che si muovevano) hanno ora densità lineari diverse (diversa contrazione di Lorentz). Facendo i conti, si ritrova sempre, *quali che siano le velocità in questione*, la formula di Biot–Savart per il campo magnetico del filo.

Invece di un filo infinitamente lungo posso pensare a una spira rettangolare, e mettere la carica vicina a un lato, in modo che il campo prodotto dagli altri lati sia trascurabile: il risultato è lo stesso.

Ripetiamo ora il ragionamento per una spira circolare. Se è ferma, una carica vicina e ferma non sente alcuna forza, perché non c'è campo elettrico. Se però mettiamo in rotazione la spira, la carica vicina al filo dovrebbe essere in situazione analoga al caso rettilineo (non dovrebbe accorgersi di come si chiude la corrente a distanza). Invece, se è vero che nel rif. inerziale la lunghezza della circonferenza non cambia, non cambiano neppure le densità di carica, quindi non c'è campo elettrico. Di più: anche se non assumo che la lunghezza resti inalterata, sarà sempre vero per simmetria che le due densità, delle cariche positive e di quelle negative, sono uguali.

Invece nel rif. tangente K' la spira è localmente ferma, ma ancora percorsa da corrente; la carica si muove in un campo magnetico, quindi sente la forza di Lorentz. Dunque la carica deve sentire una forza anche in K, il che richiede un campo elettrico. Come si conciliano questi due risultati?

Questioni aperte

La metrica

$$d\tau^2 = (1 - \omega^2 r^2)\, dt^2 - dr^2 - 2\omega r^2 dt\, d\varphi - r^2\, d\varphi^2 - dz^2$$

in quale varietà esattamente è definita? Problema connesso: la trasformazione di coordinate

$$\psi = \varphi + \omega t$$

ha senso nella stessa varietà? È corretto concludere che porta alla metrica

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\,d\psi^2 - dz^2$$

di Lorentz–Minkowski?

La sincronizzazione degli orologi si può fare nel rif. rotante mediante segnali dal centro. Agli effetti di orologi posti alla stessa r il ritardo non ha importanza, e comunque è una costante additiva. Si verifica ovviamente che orologi a diversa r non restano sincronizzati (redshift "gravitazionale" nel rif. rotante?)

Che cosa sappiamo della fisica in un riferimento rotante?

Anche senza fare nessuna ipotesi:

1. Alcune cose possiamo assumerle in base ad argomenti di simmetria:
   a) Punti con la stessa r hanno le stesse proprietà.
   b) C'è invarianza per traslazioni temporali.
2. Altre si ricavano ragionando in K:
   c) Esiste un "blueshift" in direzione radiale, per un fattore $\sqrt{1-\omega^2 r^2}$.
   d) Luce lanciata dal centro non si propaga in direzione radiale, ma viene curvata in senso opposto alla rotazione.
   e) Luce lanciata dal bordo verso il centro non segue la stessa traiettoria (non reversibilità del cammino ottico).
   f) Più in generale, le curve orarie di punti materiali liberi non sono rette nelle coordinate t, $\bar{x} = \bar{r}\,\cos\bar{\varphi}$, $\bar{y} = \bar{r}\,\sin\bar{\varphi}$, $\bar{z}$.