La simmetria in matematica e in fisica

Idee didattiche sparse

Simmetria in matematica

L’argomento simmetria nell’insegnamento della matematica è interessante perché è “nuovo” per lo studente.

Sembra sconnesso dagli argomenti tradizionali.

Questo consente un approccio diverso, in cui il concetto matematico viene “costruito” a partire da ossservazioni sul mondo reale,

Per tale motivo sarebbe bene far conquistare il concetto di simmetria in modo graduale, facendo esperienza con oggetti e figure.

Molto utile in particolare la manipolazione di modelli solidi.

Un obiettivo (forse ambizioso?) sarebbe arrivare alla *struttura astratta* di gruppo: legge di composizione, associatività, inverso.

Di passaggio: la necessità dell'elemento neutro non è un fatto spontaneo.

Un'operazione che "non cambia niente" che operazione è?

Un po' la stessa cosa che è capitata con lo zero nell'aritmetica: una conquista relativamente tarda.

Sottogruppi

Che cosa vuol dire che un oggetto è più (meno) simmetrico di un altro?

In termini astratti, si tratta del concetto di *sottogruppo*: se A è più simmetrico di B, il gruppo di simmetria di B è sottogruppo di quello di A.

Ci si può arrivare con esempi semplici, ad es. dei fiori.


© - josef hlasek
www.hlasek.com
Ophrys apifera 4869


©2004 Diana Lavarini

I gruppi di simmetria dell'orchidea e della pervinca sono entrambi sottogruppi di quelli dell'elleboro, e non hanno elementi comuni (a parte l'identità).

Quindi è corretto dire che l'elleboro è *più simmetrico* così dell'orchidea come della pervinca, mentre tra questi due non si può dire che uno sia più simmetrico dell'altro.

(Nel reticolo dei sottogruppi la relazione di ordine è solo parziale.)

Isomorfismo

Vediamo ora un esempio diverso, che ci introdurrà al concetto di *isomorfismo*.

Il giglio ha 3 piani di simmetria

Ma ha anche un asse *ternario*.

Attenzione, ternario e non senario, sebbene i petali siano 6, perché sono uguali solo tre a tre.
Una rotazione di 60° manderebbe un petalo grande in uno piccolo e viceversa.


A
Q
K

Q
K
A

K
A
Q

Ecco la simmetria completa

AKQ QAK KQA

AQK QKA KAQ

AKQ, QAK, KQA, AQK, QKA, KAQ

sono le 6 *permutazioni* delle tre lettere

A, K, Q.

Si vede così che c'è una stretta corrispondenza (*isomorfismo*) fra le *simmetrie* del fiore e le *permutazioni* di tre lettere.

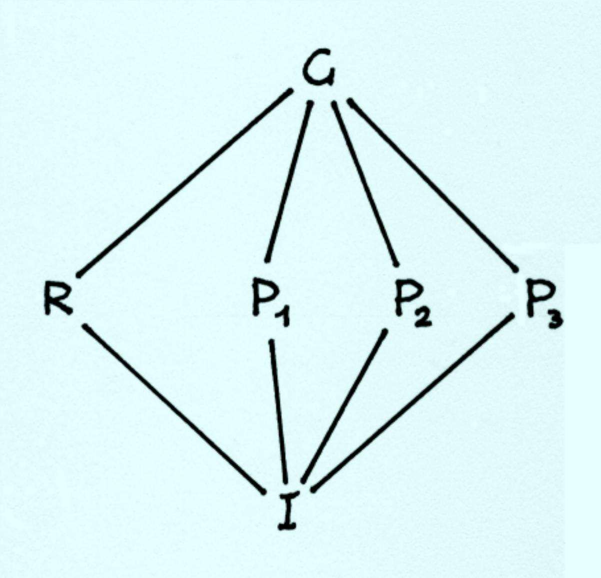
Le rotazioni corrispondono alle permutazioni cicliche; le riflessioni agli scambi di due lettere.

Dal punto di vista astratto abbiamo a che fare con *lo stesso gruppo*.

La figura qui sotto mostra il *reticolo dei sottogruppi* del gruppo di simmetria G del giglio.

R è il sottogruppo delle rotazioni, P_1 , P_2 , P_3 sono i tre sottogruppi delle riflessioni.

Nel caso dell'elleboro si avrebbe la stessa struttura, ma con 5 sottogruppi di riflessione.



Ecco invece, a titolo di curiosità, il reticolo dei sottogruppi del gruppo di simmetria di un cubo (riflessioni escluse) che è isomorfo al gruppo S_4 delle permutazioni di 4 oggetti.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathrm{O} & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \\
 & & 3\mathrm{D}_4 & & \mathrm{T} & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
3\mathrm{V}' & & 3\mathrm{C}_4 & & \mathrm{V} & & 4\mathrm{D}_3 \\
\downarrow & & \downarrow & \swarrow & & \swarrow & \\
6\mathrm{C}'_2 & & 3\mathrm{C}_2 & & 4\mathrm{C}_3 & & \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & & & \\
 & & \mathrm{C}_1 & & & &
\end{array}
$$

Maggiori dettagli in
`http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/gruppi/gruppi04.pdf`

Gli argomenti di simmetria in fisica

Che cosa vuol dire “per ragioni di simmetria”?

Spesso si fa ricorso a un “principio di ragion sufficiente”, che però è troppo vago per consentire ragionamenti chiari e precisi.

Tuttavia è possibile dare al problema una formulazione esatta e rigorosa: possiamo vederlo su qualche esempio.

Alcuni esempi

1) Un grave lasciato libero da fermo cade in verticale.

2) L'orbita di un pianeta è una curva piana.

3) Il campo elettrico di un conduttore sferico *a*) è radiale *b*) la sua intensità dipende solo da r.

4) Il campo elettrico di un filo carico infinito *a*) è radiale *b*) la sua intensità dipende solo da r.

5) Il campo magnetico di un filo infinito percorso da corrente:
a) ha linee di campo circolari in piani perpendicolari al filo e con centro sul filo
b) la sua intensità dipende solo da r.

Il ragionamento si basa su due premesse:

a) Se esiste invarianza rispetto a una trasformazione di simmetria, allora applicando la simmetria una *qualunque situazione fisica possibile si trasforma in un'altra ugualmente possibile*.

b) Determinismo: *la soluzione di un problema è unica* date le condizioni iniziali (o le condizioni al contorno).

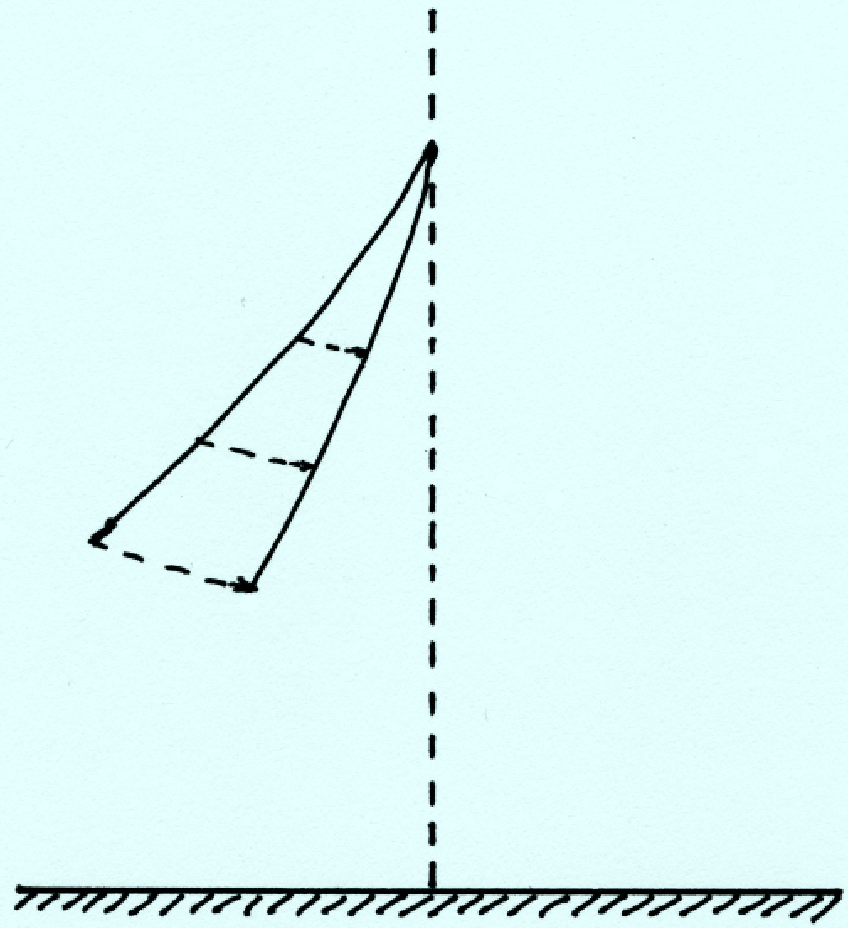
1) Un grave lasciato libero da fermo cade in verticale.

Dim.: Campo gravitazionale e condizioni iniziali restano invariati per rotazioni attorno a una retta verticale.

Quindi deve restare invariata anche la traiettoria.

L'unica curva invariante per rotazioni è l'asse di rotazione.

Questa è dunque la traiettoria.

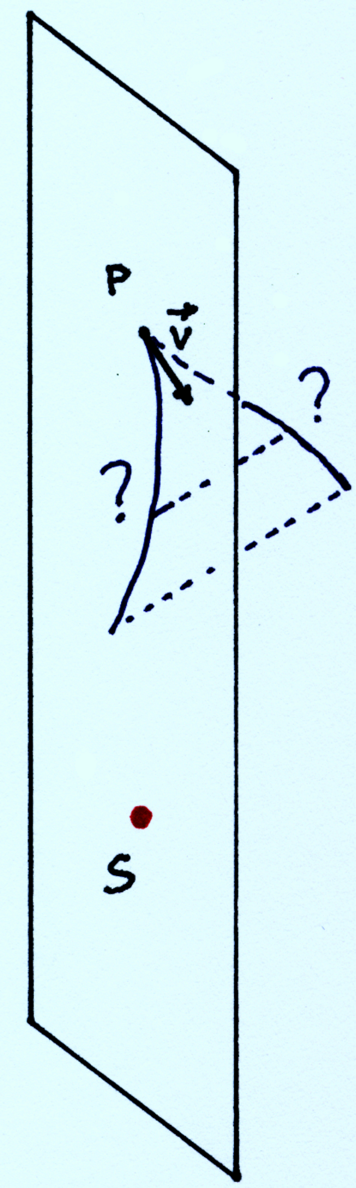


2) L’orbita di un pianeta è una curva piana.

Dim.: Campo gravitazionale e condizioni iniziali restano invariati per riflessione rispetto al piano che passa per il centro del Sole e contiene *posizione* e *velocità* iniziali del pianeta.

Quindi deve restare invariata anche la traiettoria.

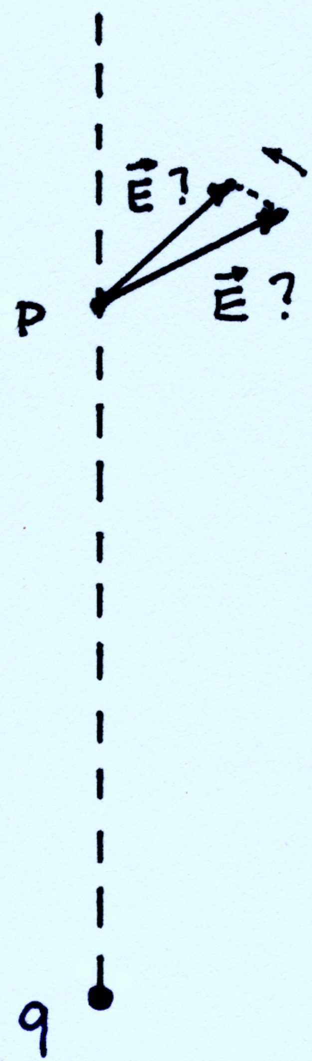
Solo le curve appartenenti al piano di simmetria hanno questa proprietà.



3) Il campo elettrico di un conduttore sferico *a*) è radiale *b*) la sua intensità dipende solo da *r*.

Dim. *a*): Di nuovo, si usa l'invarianza per rotazioni rispetto alla retta che passa per il centro della carica e per il punto P.

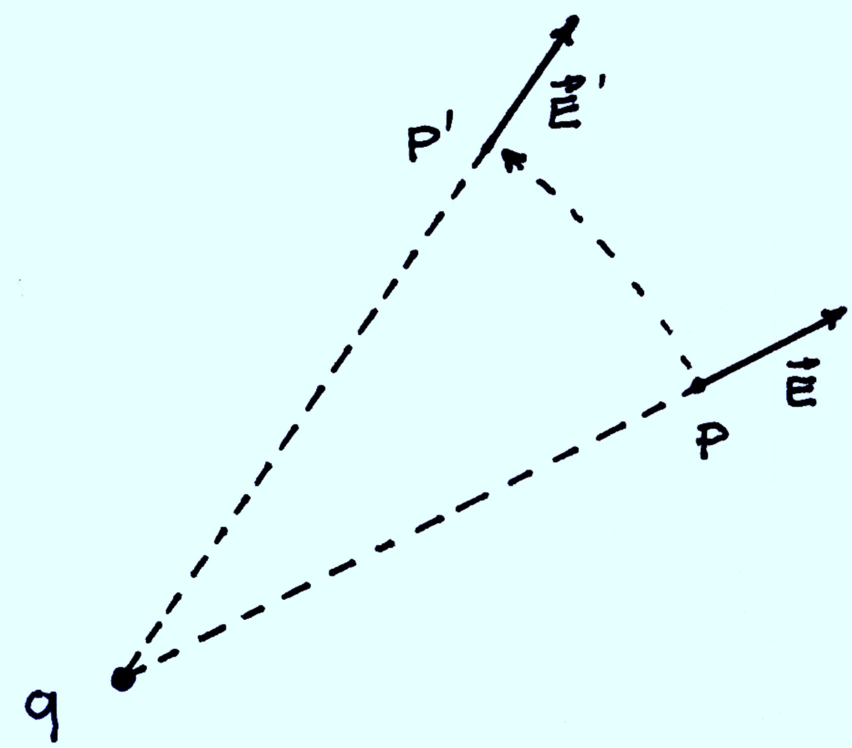
Solo un vettore diretto come l'asse di rotazione è invariante.



Dim. *b*): Una generica rotazione con asse passante per il centro della carica manda P in un punto qualsiasi P' alla stessa distanza.

La distribuzione di carica resta invariata. Quindi anche il campo prodotto è invariante.

Ne segue che l'intensità è la stessa in P e in P'.

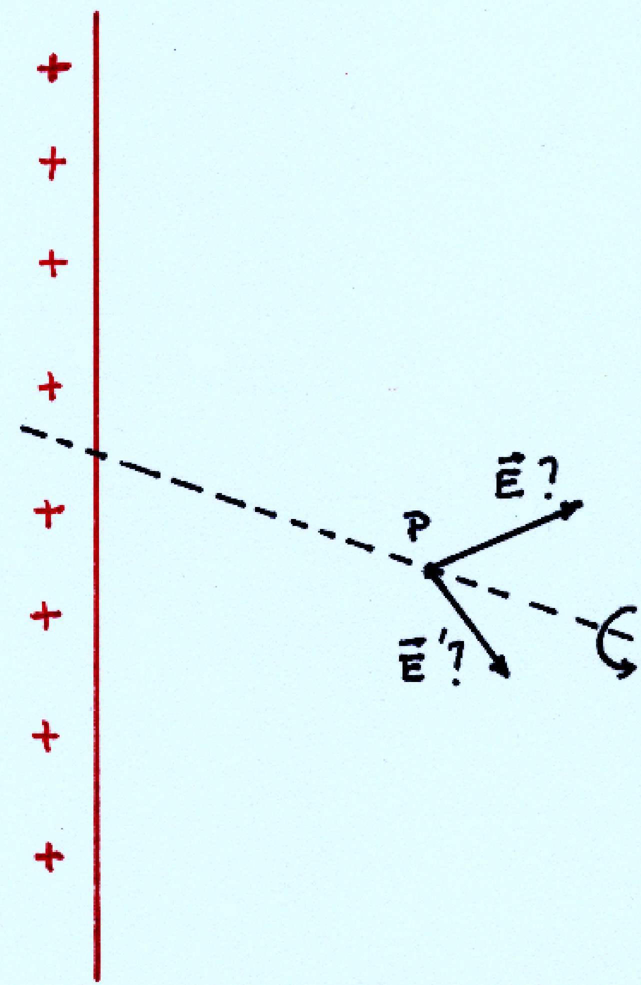


4) Il campo elettrico di un filo carico infinito *a*) è radiale *b*) la sua intensità dipende solo da *r*.

Dim. a): Una rotazione di 180° attorno alla retta per P perpendicolare al filo lascia invariata la distribuzione di carica, quindi anche il campo.

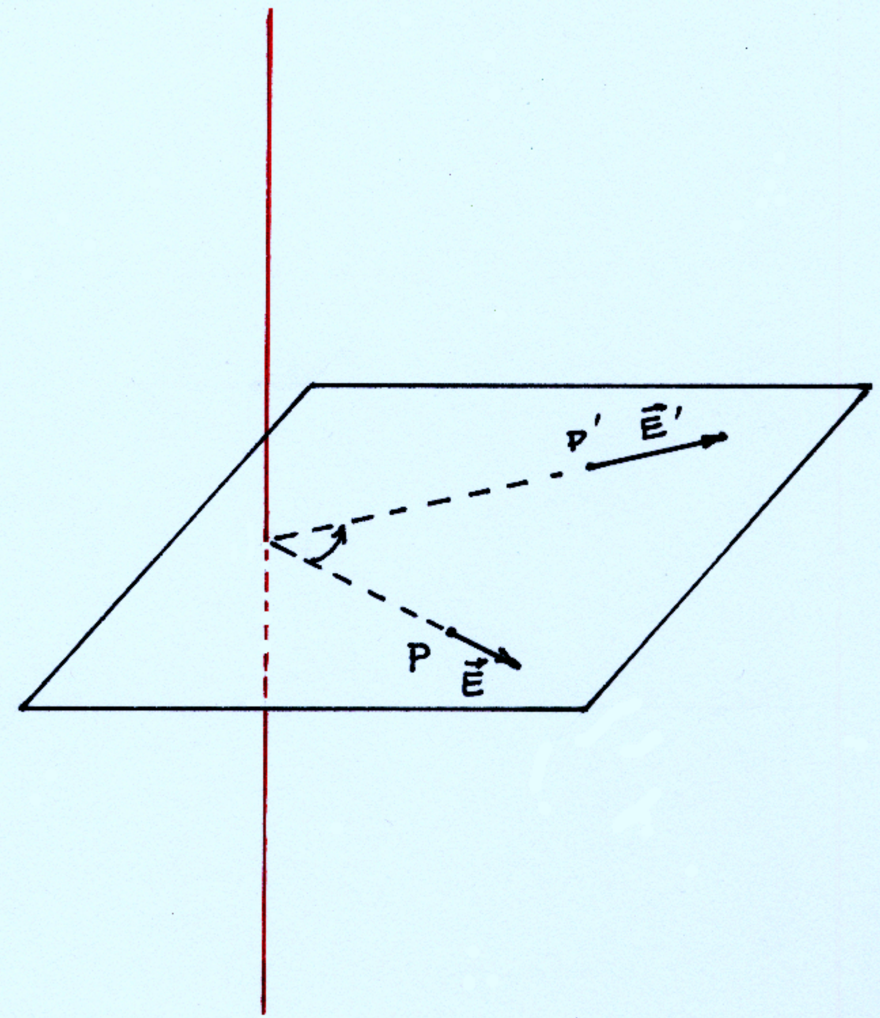
Solo un vettore radiale è lasciato invariato dalla rotazione.

Ne segue che il campo è radiale.



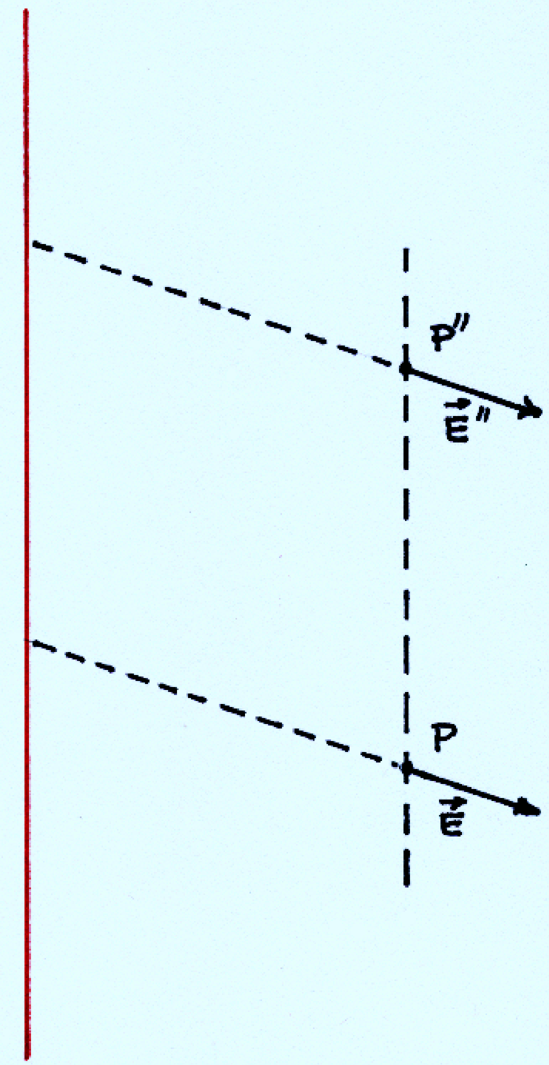
*Dim. b*1): Per due punti P e P' a uguale distanza dal filo e sullo stesso piano ortogonale al filo, una rotazione attorno al filo manda P in P' lasciando invariata la distribuzione di carica.

Quindi il campo in P va nel campo in P' ed è dimostrato che l'intensità è la stessa.



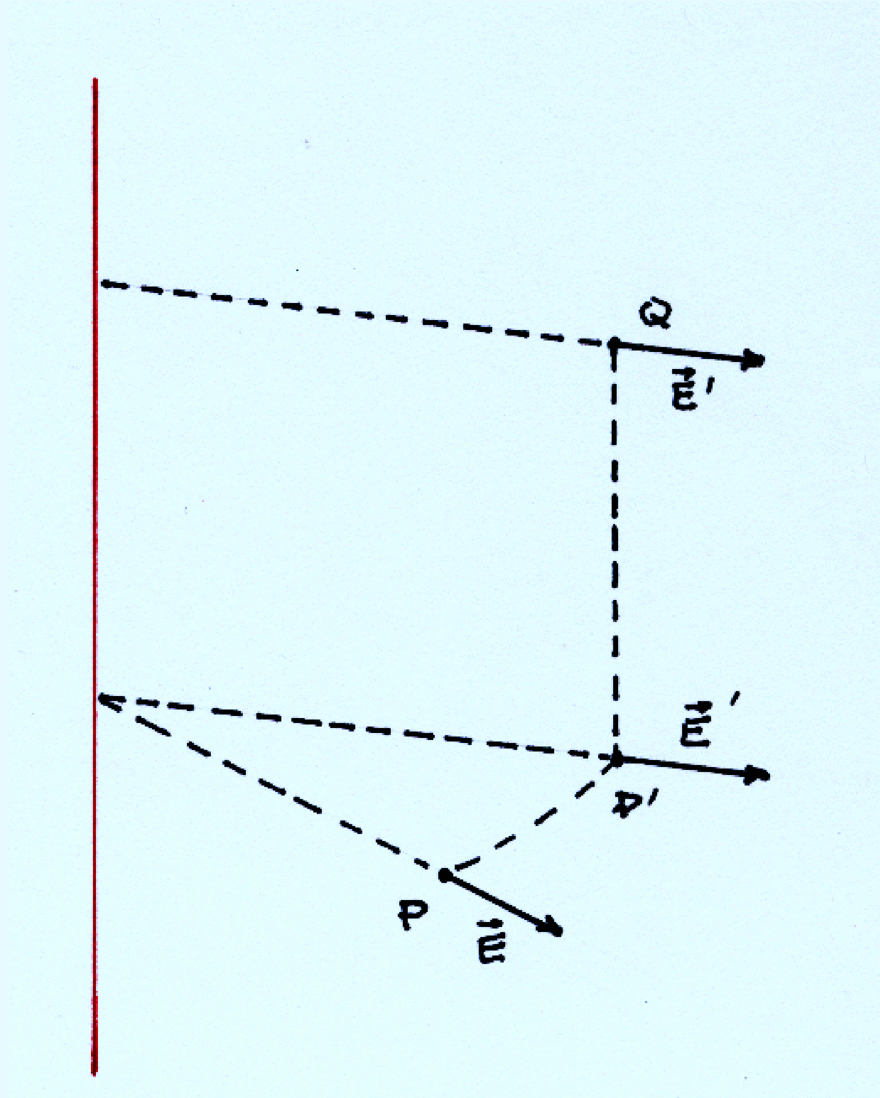
*Dim. b*2): Per due punti P e P'' situati su una parallela al filo, si ragiona con la traslazione parallela al filo.

Di nuovo resta invariata la distribuzione di carica, e quindi il campo in P va nel campo in P''.



*Dim. b*3): Per due punti P e Q alla stessa distanza dal filo ma in posizioni generiche, basta comporre rotazione e traslazione.

Esercizio: Che cosa cambia se il filo ha lunghezza finita?



5) Il campo magnetico di un filo infinito percorso da corrente:

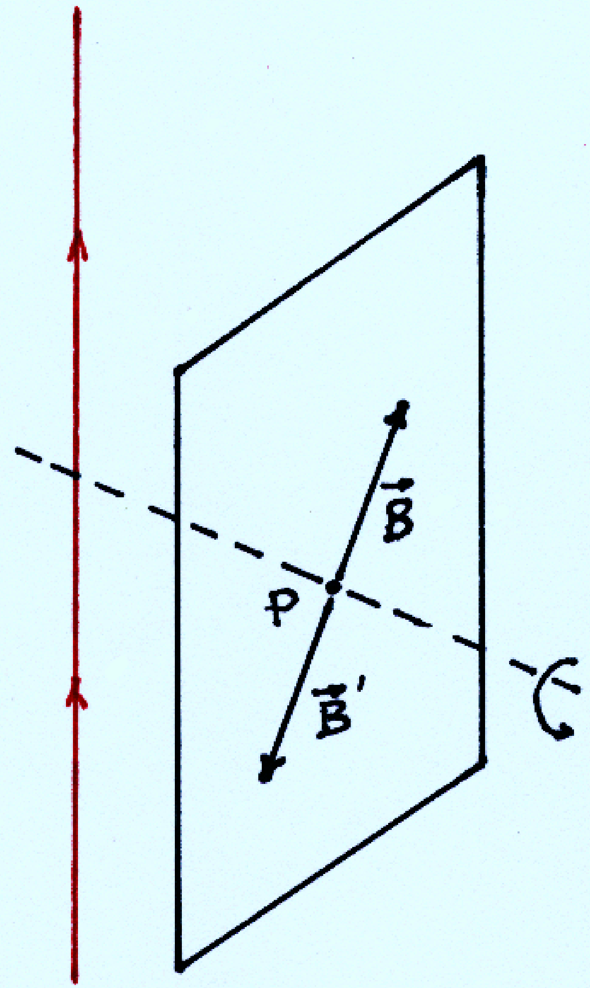
a) ha linee di campo circolari in piani perpendicolari al filo e con centro sul filo

b) la sua intensità dipende solo da *r*.

Dim. *a*): Ora la rotazione di 180° *non permette di determinare il campo*.

Con tale rotazione la corrente s'inverte, e lo stesso deve fare il campo, che quindi starà nel piano per P parallelo al filo e perpendicolare alla normale per P al filo.

Ma la direzione *resta indeterminata*.



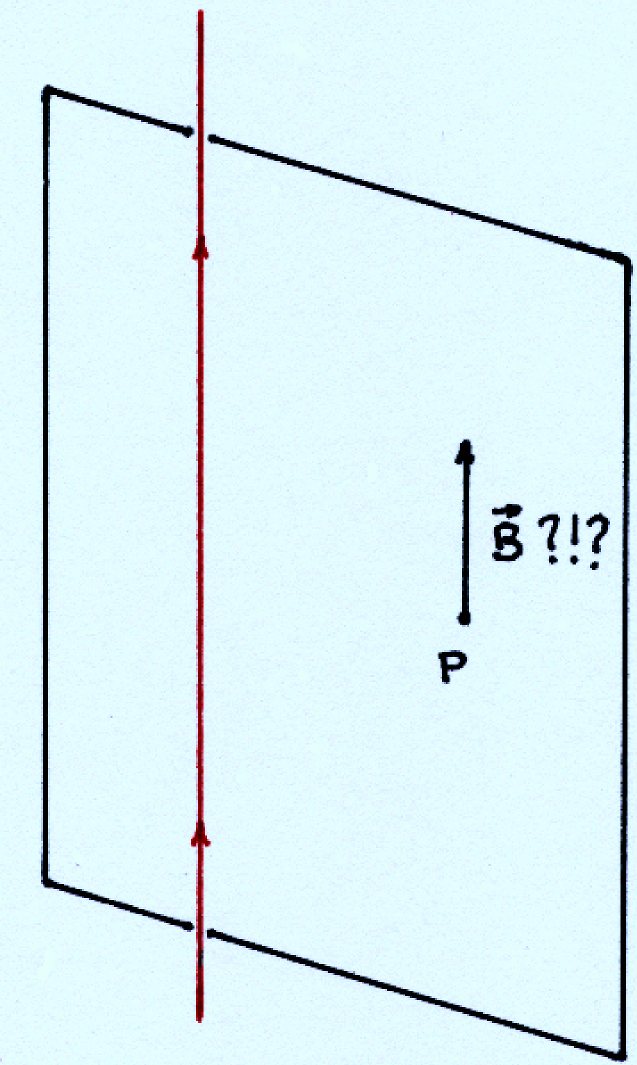
Gli argomenti basati sulla rotazione attorno al filo e sulla traslazione parallela al filo restano validi, ma *non ci dicono la direzione del campo* in P.

Servono solo a collegare direzione e intensità in due punti distinti P e Q.

Si può pensare che occorra ricorrere a un altro tipo di simmetria: la *riflessione*.

Proviamo con una riflessione in un piano che passa per il filo: si otterrebbe che B deve essere parallelo al filo, il che *è sbagliato*.

Che cosa c'è sotto?



Se siamo abbastanza smaliziati, sappiamo che tutto dipende dal fatto che per riflessioni *B non si trasforma come un vettore*, ma come uno pseudo-vettore (vettore assiale).

Ma c'è un modo elementare per arrivarci?

Occorre aggiungere qualche altra informazione, per es. la legge della *forza di Lorentz*.

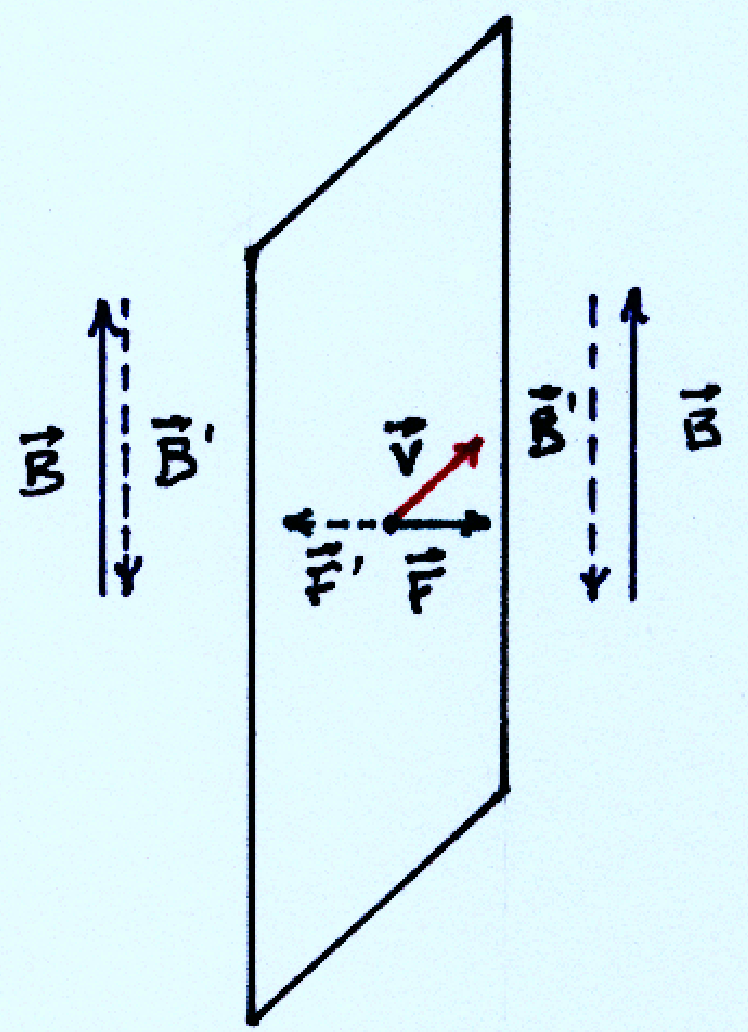
Questo non è strano: dopotutto trattiamo il campo elettrico come vettore perché lo abbiamo definito come forza per unità di carica.

Prendiamo una carica che si muove in un campo magnetico, con velocità perpendicolare al campo.

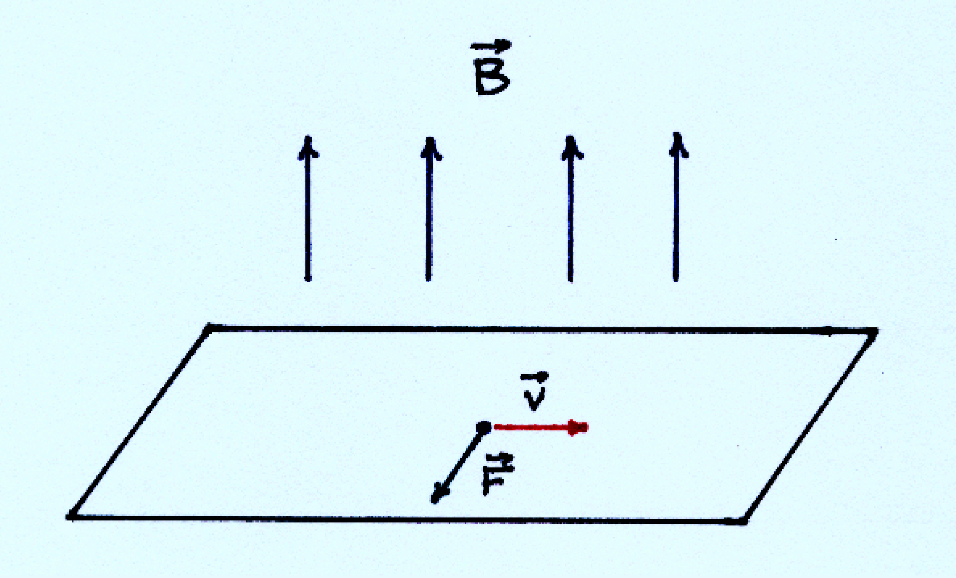
Sappiamo com'è diretta la forza di Lorentz.

Consideriamo la riflessione in un piano passante per la carica, parallelo a *B* e contenente *v*.

Con questa riflessione *v* resta invariata e *F* s'inverte: dunque *si deve anche invertire B*.



Consideriamo ora la riflessione in un piano ortogonale a *B*: sia *v* che *F* restano invariate, quindi *deve restare invariato anche B*.



Dai due esempi ricaviamo che la trasformazione di *B* per riflessioni è *opposta* a quella di un comune vettore, come velocità o forza.

Sapendo questo, la riflessione in un piano passante per il filo deve lasciare invariato *B* perché la corrente non cambia.

Ma ciò accade solo se *B* è *perpendicolare* al piano.

A questo punto possiamo usare le rotazioni con asse il filo e le traslazioni parallele al filo per completare la dimostrazione di *a)* e per dimostrare *b*).

Il file pdf sarà disponibile a giorni in

http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/varie/simmetria2-short.pdf