

### Le verifiche moderne del PE

Oggi parlerò delle verifiche moderne, dove moderne significa da un secolo a questa parte; si va quindi da esperimenti che potrebbero essere definiti storici, fino a cose veramente recenti.

Sono stato un po' dubbioso se valesse la pena di spendere del tempo su argomenti che di solito vengono trascurati, e anche con buone ragioni. Si può dire: va bene, ci sono le verifiche, ci crediamo; non si deve sempre cercare come veramente sono stati fatti gli esperimenti... Però alla fine ho deciso che proprio perché di solito vengono trascurati, una volta valesse pure la pena di parlarne; anche perché parlare di questi esperimenti è un modo per rinforzare i discorsi che abbiamo fatto. Si vede come si applicano in situazioni reali, quando si fanno davvero delle misure e quindi non restano discorsi un po' astratti, come potrebbero sembrare quelli che abbiamo fatti fin qui.

Ricordate la nostra discussione: se non valesse il PE, se la forza di attrazione del Sole si sentisse sulla Terra, allora un sasso fatto cadere la mattina andrebbe da una parte e la sera andrebbe dall'altra. Ma sappiamo benissimo che non è così, quindi... Bene: ora vedremo che proprio idee del genere sono alla base degli esperimenti cui ho accennato.

### Gli esperimenti di Eötvös

Il più famoso sperimentatore di questo secolo, del quale si parla su tutti i libri, anche se non si dice che cosa esattamente abbia fatto, è il barone Roland von Eötvös, ungherese. Egli condusse una serie di esperimenti sul lago Balaton, dal 1890 alla morte, nel 1919. Altri hanno poi continuato e affinato i suoi esperimenti.

Gli esperimenti di Eötvös sono basati su quest'idea: per un corpo che sta sulla superficie della Terra la forza che noi chiamiamo peso, e che provoca la caduta del corpo, in realtà è la risultante di due forze che hanno origini completamente diverse: una è la vera e propria forza gravitazionale, cioè la forza di attrazione della massa che costituisce la Terra; l'altra è la forza centrifuga derivante dal fatto che siamo in un rif. rotante.

La vera forza di gravità  $\vec{g}_0$  è diretta ... verso il centro della Terra? No. Non è diretta verso il centro, perché la Terra è schiacciata, non ha simmetria sferica (fig. 6-1). Comunque questo per noi è un fatto secondario, che ho sottolineato solo per evitare che si desse per scontata una cosa falsa.

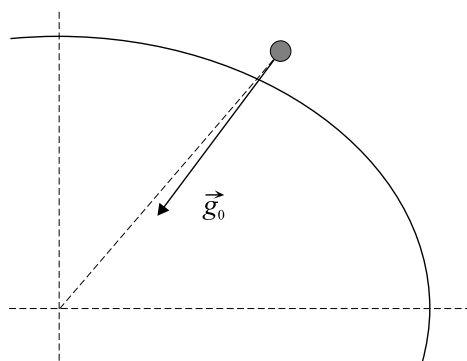


fig. 6-1

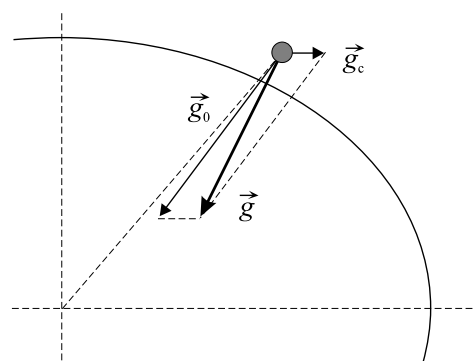


fig. 6-2

Poi c'è la forza centrifuga  $\vec{g}_c$ , che sposta ancora di più la risultante (fig. 6-2). Notate che la superficie della Terra, a parte le montagne e tutte le irregolarità, per ragioni di equilibrio meccanico dev'essere perpendicolare alla forza risultante. In particolare questo è sicuramente vero per un mare o per un lago. Infatti la verticale — la direzione del filo a piombo — è la direzione della forza risultante: non c'è modo di separare le due componenti.

Vediamo ora un po' di numeri: è ben noto che l'intensità del campo gravitazionale della Terra vale  $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ . (Mi fermo alla seconda cifra per

prudenza, perché le successive cambiano da punto a punto.) La forza centrifuga si calcola facilmente: serve la velocità angolare della Terra e la distanza del punto in cui facciamo la misura dall'asse di rotazione. Quindi la forza centrifuga cambia parecchio a seconda del posto in cui siamo: al polo sarebbe nulla, all'equatore sarà massima.

Gli esperimenti sono stati fatti circa a  $45^\circ$  di latitudine, a metà strada fra equatore e polo. Messi i numeri, si trova  $g_c = 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$ , ossia qualche per mille della forza di gravità.

Questa è la situazione: e adesso? A prima vista sembra che non ci si possa fare niente: un momento fa ho detto che non c'è modo di separarle, quando prendiamo un filo a piombo quella che vediamo è la risultante delle due.

Il punto è che se non vale il PE la forza di attrazione gravitazionale non è esattamente proporzionale alla massa del corpo, e allora fra un corpo e l'altro può esserci una differenza: quando si va a comporre i due vettori il risultato non viene sempre della stessa lunghezza, ma — molto più importante — non viene neppure con la stessa direzione.

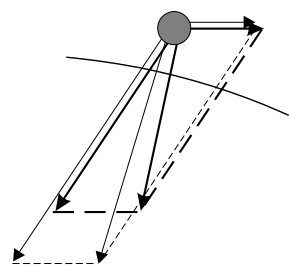


fig. 6-3

Prendiamo dunque due corpi di ugual massa, ma che per ipotesi sentano una forza gravitazionale diversa, proprio perché non vale il PE; allora la forza centrifuga è la stessa, ma l'attrazione gravitazionale no. Ne segue che la freccia segnata in orizzontale in fig. 6-3 ha la stessa lunghezza per i due corpi, mentre la freccia obliqua (verso il centro della Terra ...) per uno è più lunga e per l'altro è più corta. È chiaro quindi che le due risultanti non saranno parallele.

Questo è come dire che se costruissi dei fili a piombo con corpi diversi non si disporrebbero tutti paralleli. Detta così è un'idea peregrina: faccio tanti fili a piombo, li appendo vicini e li guardo; se non stanno tutti paralleli vuol dire che non vale il PE. In linea di principio anche questo è un modo, ma è chiaro che è un modo poco sensibile, si potrebbero vedere solo effetti molto grossi; però è il punto di partenza. La vera idea è di usare una bilancia di torsione.

Ai due estremi del braccio orizzontale della bilancia di torsione si attaccano due corpi diversi (supponiamo per semplicità di uguale massa) uno ferro e uno piombo, oppure uno legno e uno marmo, quello che vi pare. Il filo della bilancia di torsione (fig. 6-4) si disporrà secondo la risultante delle forze che agiscono sui due corpi: una direzione intermedia fra le due.

Però le forze che agiscono sul corpo A e sul corpo B non sono parallele al filo: quindi hanno momento non nullo rispetto al filo stesso, e si vede dalla figura che i due momenti hanno lo stesso segno. Ne segue che l'equipaggio della bilancia di torsione ruoterà in un certo verso.

Se mi fermo qua però non ho concluso niente: come faccio a sapere quale sarebbe stata la posizione di equilibrio se non ci fossero state quelle forze, visto che non le posso eliminare? L'idea è molto semplice: si prende tutto l'apparato e lo si ruota di  $180^\circ$ . In tal modo le forze si scambiano, e il verso dei momenti diventa opposto. L'apparato porta una scala graduata e tutto il necessario per vedere la posizione dell'equipaggio: perciò quando lo ruoto

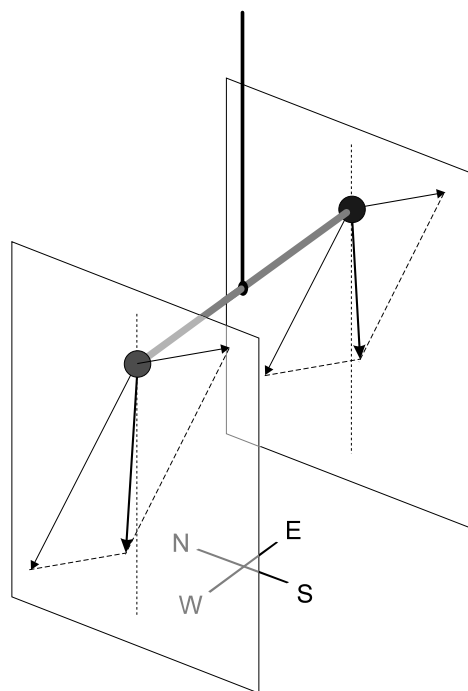


fig. 6-4

di 180° mi aspetto di vedere un (piccolo) spostamento. Questa è l'idea, ma fra dire e fare l'esperimento per bene ci corre: non a caso Eötvös ci ha lavorato un bel po' di anni. È facile una misura all'ingrosso, ma spingere la sensibilità agli estremi cui è arrivato Eötvös, è un altro discorso...

I risultati dell'esperimento di Eötvös sono noti: ripetuto con materiali diversi, in tante combinazioni, non si è mai visto niente. Ciò vuol dire semplicemente che se una differenza c'è, è al di sotto della sensibilità dello strumento, stimata  $10^{-9}$ . Quindi in base a questi esperimenti possiamo dire che il PE vale entro  $10^{-9}$ .

Riassumo: l'idea è di giocare sul fatto che l'attrazione gravitazionale e la forza centrifuga non varino in maniera proporzionale quando si passa da un corpo a un altro. Se variano in modo proporzionale, vale il PE e l'esperimento darà risultato nullo; ma se non variano in modo proporzionale allora ci sarà uno spostamento della verticale da un oggetto all'altro, e questo provocherà una rotazione.

### Gli esperimenti di Dicke e di Braginskij

Molti anni dopo (anni '60-'70) sono stati fatti altri esperimenti, basati su un'idea simile, ma che contiene anche un elemento nuovo e più astuto. Gli esperimenti sono stati fatti in due fasi: prima da Dicke e coll. negli Stati Uniti, poi da Braginskij a Mosca. Sono sostanzialmente uguali come idea; differisce l'apparato sperimentale. Il secondo è stato fatto con l'intenzione di migliorare il primo, di renderlo più sensibile.

L'idea comune è che invece di confrontare l'attrazione terrestre con la forza centrifuga, come nell'esperimento di Eötvös, si confronta la forza di attrazione del Sole con la forza apparente dovuta all'accelerazione della Terra. Si tratta della stessa cosa di cui abbiamo già parlato: i sassi che dovrebbero cadere un po' a est la mattina e un po' a ovest la sera.

Il problema è: la forza di attrazione del Sole sarà esattamente compensata dal moto accelerato della Terra in orbita intorno al Sole, oppure no? Se viene compensata esattamente questa è una prova del PE; se non viene compensata esattamente me ne devo accorgere. Come me ne accorgo? Si usa ancora una bilancia di torsione, solo che ora la deviazione non è dovuta alla forza centrifuga. L'idea è che se la forza di attrazione del Sole agisce in maniera diversa su due corpi di materiali diversi, allora la bilancia deve ruotare.

A prima vista sembra che stiamo facendo lo stesso esperimento, e che ci sia uno svantaggio, perché mentre la forza centrifuga vale  $2.4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$ , la forza del Sole è  $6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$ , come avevamo calcolato la volta passata: circa un fattore 4 più piccola. Allora che ci si guadagna a usare il Sole? Il grande vantaggio è questo: che la forza di attrazione del Sole cambia direzione nel tempo, perché il Sole ha un moto apparente. Noi sulla Terra vediamo il Sole a est la mattina, poi si alza verso sud e si riabbassa a ovest: quindi l'effetto dovuto alla forza di attrazione del Sole, se c'è, cambia periodicamente nel corso di un giorno.

Cambia direzione e cambia anche grandezza, perché all'alba e al tramonto il Sole è sull'orizzonte, quindi l'effetto è massimo; a mezzogiorno il Sole è più alto, in direzione obliqua, perciò agisce solo la componente orizzontale della forza. Ma la cosa più importante è che cambia direzione, con un periodo di 24 ore. Non c'è bisogno di girare l'apparato, come faceva Eötvös: l'apparato resta fermo, e ci pensa il moto del Sole a far girare la forza!

Notate: il dispositivo non ruota. Sì, d'accordo, ruota con la Terra; ma se ci mettiamo in un rif. solidale alla Terra dovremo solo aggiungere la forza centrifuga per tenerne conto. Però la forza centrifuga è costante: la Terra ruota con velocità angolare costante, l'apparato è fermo rispetto alla Terra, quindi le forze centrifughe che agiscono sulle due palle sono sempre le stesse. Anche l'attrazione terrestre non cambia, perché non muovo



niente: se vedo muovere qualcosa non può che essere dovuto al fatto che s'è mosso il Sole.

D: È più grande l'accelerazione dovuta al Sole di quella data dalla Luna?

F: Sì, almeno due ordini di grandezza maggiore.

Riepilogando: se non vale il PE mi devo aspettare che la bilancia oscilli con un periodo di 24 ore. Siccome il fenomeno in esame ha un periodo noto, posso usare tutte le tecniche standard nella costruzione dell'apparato e nell'analisi dei dati. Per esempio costruirò la bilancia di torsione in modo che abbia un periodo proprio di 24 ore; cosa che non è precisamente facile, come potete immaginare, però è stata fatta.

In questo modo lavoro in risonanza, e l'oscillazione risulta molto più grande; se l'oscillatore ha un fattore di merito piuttosto alto si riesce a esaltare di qualche ordine di grandezza l'ampiezza dell'oscillazione. Si ottiene così un aumento notevole di sensibilità.

Ecco il risultato: da  $10^{-9}$  che aveva trovato Eötvös, si arriva a  $10^{-11}$  nel lavoro di Dicke e forse  $10^{-12}$  in quello di Braginskij, che — per quanto ne so — è il meglio che si è fatto finora. Questi esperimenti dimostrano che la forza di attrazione gravitazionale è rigorosamente proporzionale alla massa del corpo; detto in altri termini, che massa inerziale e massa gravitazionale sono rigorosamente proporzionali. Gli esperimenti dimostrano questo per corpi di diversi materiali, entro il limite di  $10^{-12}$ .

Non ci sono molte leggi fisiche di cui siamo sicuri con 12 cifre, quindi si può essere contenti. Intendo dire che la gran parte delle leggi fondamentali sono verificate con parecchi ordini di grandezza in meno, eppure si accettano tranquillamente; quindi il PE si può considerare fondato molto solidamente.

## I laser sulla Luna

Un altro tipo di verifiche, completamente diverse, sono state fatte più di recente (a partire dagli anni '70). Il laser è stato utilizzato per misurare la distanza della Luna dalla Terra, ma l'idea di base dell'esperimento è sempre la solita: se la forza di attrazione del Sole sulla Terra e sulla Luna non fosse proporzionale alle loro masse, l'orbita della Luna ne verrebbe perturbata. Non nel modo semplificato che abbiamo visto l'altra volta per i satelliti di Giove, perché noi abbiamo fatto il conto supponendo che la forza che tiene in orbita il satellite fosse elastica; però la perturbazione ci sarebbe comunque ed è calcolabile. Basta quindi studiare il moto della Luna e vedere se la perturbazione c'è o no.

Dato che bisognerà cercare effetti di  $10^{-11}$  o meno, dovremo misurare la distanza Terra-Luna con grandissima precisione, e con il laser si riesce. Si è potuto usare un laser dal momento in cui sono stati messi sulla Luna i famosi riflettori: c'è voluto prima un omino che è andato sulla Luna. Quei riflettori sono così fatti che se si manda un fascio laser sulla Luna, lo rimandano indietro nella stessa direzione da cui è venuto (non sono quindi semplici specchi!). Tutto quello che c'è da fare è dunque misurare la distanza, in base al tempo che impiega un impulso laser per andare e tornare. Naturalmente per misurare la distanza in questo modo, bisogna credere che la velocità di propagazione sia la solita  $c$ , altrimenti non si arriva a niente.

L'incertezza di queste misure è dell'ordine della decina di centimetri. La distanza Terra-Luna è 384 000 km in media, e 10 cm/384 000 km è dell'ordine di  $10^{-10}$ .

D: come fanno a sapere di preciso dove hanno messo i riflettori?

F: Non importa, perché il fascio laser quando arriva sulla Luna è bello largo. È vero che i laser sono ben collimati, ma facciamo i conti! Ve lo suggerisco come problema: utilizzando la migliore tecnica di cui potete disporre, quanto sarebbe grande la macchia di luce prodotta da un laser sulla Luna?

È chiaro che se risultasse, poniamo, un metro sarebbe un guaio: come si potrebbe puntare il laser in modo da colpire il riflettore? Ma per fortuna la macchia è bella grossa, e non c'è problema.

Tornando alla misura, per fare questo esperimento ci sono diverse altre difficoltà. La fondamentale è che il moto della Luna è complicato; nessuno creda che sia una bella ellisse kepleriana. Perché? Ecco una serie di ragioni:

#### *La forza di marea che abbiamo già nominata:*

La famosa compensazione per cui la forza di attrazione del Sole sulla Luna è cancellata dalla forza apparente, è vera solo se il campo gravitazionale del Sole là dove si trova la Terra e quello dove si trova la Luna sono uguali. Il che non è, perché la Luna sta in un altro posto, e per di più la sua posizione cambia nel tempo; quindi in certi momenti il campo gravitazionale sulla Luna è più intenso e in altri momenti è meno intenso; poi ha una direzione diversa a tempi diversi. Dunque la cancellazione esatta non c'è, e questa "non cancellazione esatta" è quella che si chiama *forza di marea*: ne ripareremo.

A conti fatti, l'effetto della forza di marea sul moto della Luna è importante. Però quelli che si occupano di meccanica celeste conoscono il problema da moltissimo tempo e sanno benissimo come tenerne conto; quindi anche se il moto non è puramente kepleriano, si sa esattamente quale dovrà essere tenendo conto delle forze di marea.

#### *Non sfericità della Terra:*

Succede la stessa cosa che capita per un grave alla superficie terrestre: non vi potete aspettare che la forza di attrazione della Terra sulla Luna punti sempre verso il centro della Terra. Per di più, mentre la Luna gira attorno alla Terra direzione e grandezza di questa forza cambiano in un modo che non è quello dato dalla semplice legge di Newton:  $1/r^2$ .

Però anche questo si sa benissimo: si sa com'è fatta la Terra, si sa come va modificato il suo campo gravitazionale, quindi se ne sa tener conto. È solo un lavoro in più per chi deve confrontare le misure con la teoria, però è perfettamente fattibile (in pratica, è solo una maggior complicazione in un programma di computer...).

#### *Attrazione degli altri pianeti:*

A prima vista può sembrare incredibile, ma la Luna sente anche la forza di attrazione degli altri pianeti; principalmente di Venere. Principalmente di Venere perché, sebbene non sia il pianeta di più grande massa, è quello che passa più vicino. L'effetto è piccolo, ma quando si fanno quelle misure e si confrontano coi calcoli, bisogna tener conto anche della forza di attrazione degli altri pianeti.

Fatto tutto questo, tenuto conto di tutte le complicazioni, il risultato è che tutto torna entro  $10^{-11}$ . Quindi non esattamente come nell'esperimento di Braginskij, ma almeno come in quello di Dicke.

Ora una domanda: perché è stato fatto quest'esperimento? Tutto sommato non è venuto meglio degli altri già fatti, quindi se ne poteva fare a meno... Si potrebbe pensare che in fase di progetto forse ci si aspettava un risultato migliore, ma non c'è solo questo: è che si tratta di un esperimento diverso. Il punto è che gli oggetti con cui sono stati fatti gli esperimenti di Eötvös, di Dicke e di Braginskij sono piccoli, di dimensioni umane, massa di qualche chilo. Inoltre (e questa è la cosa importante) sono corpi solidi, tenuti insieme da forze di attrazione di tipo elettrico tra gli atomi e le molecole che li costituiscono.

Terra e Luna sono oggetti del tutto differenti: in primo luogo perché hanno masse molto più grandi, ma soprattutto perché sono tenute insieme da una forza totalmente diversa, che è la gravità. Il punto importante è di far vedere che qualunque sia la struttura dell'oggetto e qualunque sia il tipo di forze che determinano la costituzione dell'oggetto (e quindi anche la sua massa: di questo ripareremo), che si tratti di un oggetto a scala



umana o di un pianeta, che le forze interne dominanti siano di tipo elettrico o siano gravitazionali, il PE vale ugualmente.

Avrebbe potuto andare diversamente: avrebbe potuto funzionare con oggetti di certe dimensioni e con un certo tipo di forza, e con altri no. Ma a questo punto sulla validità del PE possiamo stare tranquilli, non avere più dubbi; almeno finché qualche nuovo esperimento non cambi le carte in tavola.

### La “quinta forza”

Ricorderete che un po' di anni fa si è discusso se non ci potevano essere deviazioni dalla legge di gravitazione di Newton: una dipendenza della forza di gravità dalla composizione chimica o dalla costituzione dei corpi, e anche una diversa dipendenza dalla distanza. È la famosa questione della quinta forza.

La cosa è nata così: qualcuno ha riesaminato i risultati di tutti gli esperimenti di Eötvös e ha creduto di vedere che in realtà le deviazioni (che ci sono sempre, perché nessun esperimento dà risultati perfettamente in accordo con la teoria) non fossero accidentali. Vi ricordo che Eötvös aveva usato diversi materiali: ora sembrava che le deviazioni potessero avere una certa regolarità, una correlazione con la composizione chimica.

Poi è stato sollevato un altro problema, relativo alla scala di distanze. Tutti gli esperimenti sulla forza di gravità hanno questa caratteristica: o sono fatti in laboratorio, quindi a distanze dell'ordine del metro, o sono fatti su pianeti, su satelliti, quindi a distanze a dir poco di migliaia di chilometri. C'è un salto di vari ordini di grandezza: o distanze piccole, o distanze grandi; ma nella scala delle distanze c'è un buco. Potrebbe darsi che un esperimento a distanza poniamo di un chilometro trovi una forza di gravità con andamento un po' differente?

Così sono stati pensati ed eseguiti esperimenti a questo scopo. A quel tempo, forse 10 anni fa, c'è stato parecchio rumore, molta eccitazione che però dopo si è spenta. Il che vuol dire che alla fine gli esperimenti non hanno portato a niente di conclusivo.

Oggi possiamo dire tranquillamente: è stato bene pensarci, farsi venire tutti quei dubbi, anche fare gli esperimenti; ma la conclusione è stata che le cose continuano ad andare come pensavamo che andassero, va tutto liscio. Per questa ragione avrei potuto anche non parlarne affatto. Mi sembra interessante però ricordarvi che nella ricerca scientifica accadono anche queste cose. Passati gli anni si possono pure dimenticare: è stata fatta una congettura, non ha funzionato, basta; dalla scienza “consolidata” questa ricerca sparisce, perché non ha prodotto risultati.

Dunque il PE va bene; la legge di gravità funziona come ci ha insegnato Newton. Ma forse voi state pensando da un po': e la relatività quando arriva? Sembra che di tutto parliamo tranne che di relatività... In realtà stiamo parlando di relatività, ma in una maniera che non è secondo le abitudini consuete; sembra che tutto questo con la relatività non c'entri niente, che stiamo divagando. Va bene: allora passiamo a cose più vicine alla relatività...

### PE debole e PE forte

Si tratta di una distinzione che faccio più per utilità espositiva, che non per necessità; vedremo infatti che in realtà questa distinzione non è neanche condivisa da tutti. Inoltre non consiglierai una presentazione didattica basata su PE debole e PE forte.

Si chiama talvolta “debole” il PE come si è usato fino ad ora: *tutti i corpi si muovono allo stesso modo in un campo gravitazionale*. Questo è uno dei modi per enunciarlo, e detto così non è che l'esatta generalizzazione, dovuta a Newton, della scoperta di Galileo. Questi dice che tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione; più in generale, dalle leggi di Newton segue che il moto di un corpo in un campo gravitazionale non dipende dalla natura del corpo, dalla massa, dalla composizione. In particolare, una

conseguenza del PE debole è la cancellazione della gravità in un riferimento in caduta libera.

Ora finalmente si comincia a parlare di relatività. Einstein estende il PE, dal moto a tutti fenomeni fisici. Il PE come l'abbiamo appena enunciato dice solo che *agli effetti del moto* di un corpo la sua costituzione, la massa, non contano; e come conseguenza, la forza apparente in un riferimento accelerato è equivalente alla forza di gravità. Ecco perché si chiama PE: perché afferma l'equivalenza meccanica tra forza di gravità e forze apparenti.

Quello che Einstein dice è: l'equivalenza non sussiste solo agli effetti meccanici, un rif. in caduta libera è equivalente *a tutti gli effetti* a un RI nello spazio vuoto. Quando dico "a tutti gli effetti" intendo dire a tutti gli effetti fisici. Avrei potuto usare una formulazione un po' diversa, ma equivalente: le leggi fisiche in un rif. in caduta libera sono identiche a quelle in un RI che si muova nello spazio vuoto. Per *qualsiasi fenomeno fisico* un rif. in caduta libera è indistinguibile da un RI.

Questa è la formulazione più generale del PE, ed è quello che di solito si chiama PE forte. Il "forte" sta nel fatto che ora non si parla più soltanto del moto, ma di qualunque fenomeno fisico: se voi siete in un rif. in caduta libera, facendo esperimenti non vi potete accorgere che siete in caduta libera in un campo gravitazionale; non potete distinguerlo dal moto in uno spazio vuoto dove non c'è niente, non ci sono campi gravitazionali e voi state viaggiando per inerzia con velocità costante. In queste due situazioni trovate gli stessi risultati: vale ancora il principio del taccuino.

Viceversa: la forza di gravità equivale *a tutti gli effetti* alla forza apparente in un riferimento accelerato. È chiaro che le due cose sono strettamente collegate: se siamo in un riferimento accelerato noi sentiamo una forza apparente, che si ripercuote sugli esperimenti che facciamo (non solo su quelli di meccanica). Bene: diciamo che la forza di gravità ha lo stesso effetto, è indistinguibile *per qualunque fenomeno fisico* dalle forze apparenti che si manifestano in un rif. accelerato.

Ma un momento: Einstein dice questo, ma perché lo dice? Potrei anche rispondere che la cosa importante non è tanto sapere com'è venuta questa idea, quanto vedere se è giusta: se ha conseguenze verificate sperimentalmente oppure no. Però può anche essere interessante sapere che cosa ha portato Einstein a fare quest'affermazione. Certo non gli esperimenti di cui abbiamo parlato, perché quegli esperimenti riguardavano solo il moto e le forze apparenti, e perciò restavano nell'ambito della meccanica: non consentivano la generalizzazione espressa dal PE forte.

L'esigenza di Einstein è scritta esplicitamente in un lavoro del 1911: a lui dava fastidio che i RI (nel senso newtoniano del termine) avessero un ruolo privilegiato. Le leggi della meccanica sono giuste solo in un RI, mentre per poterle applicare in un rif. accelerato bisogna aggiungere le forze apparenti. Stando così le cose, i rif. accelerati sono diversi dai RI. Questo ad Einstein non piace, e scrive: vorrei generalizzare l'equivalenza dei RI, cioè il PR, trasportandola anche ai rif. accelerati.

Ora che cos'ha di strano l'accelerazione? Sappiamo che in un rif. accelerato qualcosa cambia, però Einstein osserva: in un rif. accelerato basta introdurre una forza apparente, che almeno nell'ambito meccanico è come avere un campo gravitazionale. Da qui l'idea: potrò applicare tutte le leggi fisiche anche ai riferimenti accelerati, a patto di considerare le forze apparenti come forze gravitazionali. O inversamente, a patto di vedere la gravità come la manifestazione del fatto che non siamo un RI. Da questo punto di vista sarà inerziale un rif. in cui la gravità non si vede, ossia un rif. *in caduta libera*.

Se questo sia vero, se sia in accordo con i fatti osservati è un problema che rimane aperto, perché abbiamo fatto un'ipotesi. Chiamiamolo principio, congettura, postulato; chiamiamolo come volete, ma fino a questo punto non c'è nessuna base sperimentale.

Una piccola parentesi. Spero che a qualcuno sia venuto in mente un dubbio. Quando affermo che in un rif. in caduta libera tutto va come in un RI nello spazio vuoto, non mi

sto dimenticando delle forze di marea? Ho detto poco fa che se guardo la Luna da un rif. che si muove con la Terra (e che quindi è in caduta libera nel campo del Sole) non la vedo muoversi proprio come se l'attrazione del Sole non ci fosse, perché le forze non si compensano esattamente. Quindi guardando il moto della Luna mi posso accorgere che c'è il Sole. Allora come la mettiamo?

La soluzione è che la cancellazione si può fare con buona precisione se ci si limita a una regione di spazio abbastanza piccola, in cui il campo gravitazionale non cambia apprezzabilmente; comunque anche di questo riparleremo. Per ora metto solo un'avvertenza accanto alla formulazione del PE: stiamo dimenticando le forze di marea, cosa che si esprime dicendo che l'equivalenza vale solo "in piccolo." Il termine tecnico è: l'equivalenza ha valore *locale*.

Un tipico esempio è l'ascensore: nell'ascensore che cade la forza di gravità sparisce. A rigore, non è proprio vero nemmeno nell'ascensore, perché sul pavimento dell'ascensore, che sta più vicino alla Terra, la forza di gravità è un po' più grande di quella al centro; invece sul soffitto la forza di gravità è un po' più piccola. Ne segue che quando l'ascensore cade la forza di gravità non si può cancellare esattamente dappertutto: resta un piccolo residuo. Però fate i conti, calcolate questo residuo, e poi trovatemi l'esperimento che sia in grado di vederlo.

Dato che l'ascensore è piccolo, questa non esatta cancellazione è trascurabile. Meglio: per quanto precisi siano gli esperimenti che posso fare, basta prendere una regione spaziotemporale abbastanza piccola e la forza di gravità si cancella entro i limiti sperimentali.

Quindi "locale" qui significa "al limite": comunque fissata una precisione sperimentale, si può trovare una regione di spazio-tempo così piccola che entro quella regione non sarà possibile mettere in evidenza nessun effetto di marea.

Prima di arrivare al discorso più importante, premetto un'osservazione. L'ordine di esposizione che sto seguendo è sicuramente inconsueto: non è l'ordine tradizionale. Parlando di relatività, abbiamo cominciato con discorsi sul PR, e fin qui niente di strano; ma ora dove vi sto portando? Vi sarete resi conto che stiamo passando alla RG! Questo è voluto, perché intendo mostrare che la RG non è quella cosa astrusa, da tenere lontana, o magari da lasciar perdere del tutto, perché inaccessibile. Come vedete, stiamo arrivando alla RG con una transizione naturale dalla meccanica newtoniana, dallo studio dei moti nei rif. accelerati: argomenti tradizionali nell'insegnamento della fisica.

Più avanti torneremo a parlare di cose che riconoscerete come RR; del resto abbiamo già parlato d'invarianza della velocità della luce. Ho scelto di alternare gli argomenti proprio per farvi vedere che non c'è una differenza qualitativa di difficoltà; ma c'è anche un altro motivo, ed è che le cose sono intimamente legate: *c'è una sola relatività*. Ma questo lo vedremo meglio nel seguito.

## Il nuovo paradigma

Questo titolo è un evidente richiamo alle ormai antiche tesi di Kuhn a proposito dei paradigmi della ricerca scientifica. Senza affrontare una vera discussione epistemologica, voglio solo sottolineare che per seguire Einstein nel suo ragionamento bisogna imparare a fare una certa ginnastica mentale: vedere cose vecchie in modo nuovo. Il che non implica ancora necessariamente di vedere cose nuove; ci sono anche queste, ma prima bisogna imparare a rivedere le cose che ci sono familiari, interpretandole in un modo diverso. Questo appunto significa un *cambiamento di paradigma*.

Intanto un'osservazione: il passo che Einstein fa a proposito del PE è perfettamente parallelo a quello che ha fatto col PR. Abbiamo visto che il PR esiste già nella meccanica newtoniana: l'equivalenza agli effetti del moto, agli effetti delle leggi della meccanica, di tutti i rif. in moto traslatorio uniforme (TRU) si conosceva già. L'idea di Einstein è che quest'equivalenza non valga solo agli effetti della meccanica, ma agli effetti fisici in



generale: che due rif. in moto TRU uno rispetto all'altro sono completamente equivalenti a tutti gli effetti fisici; che nessun esperimento permette di riconoscere ecc.

Bene, col PE accade la stessa cosa. Di nuovo il punto di partenza era già noto: che in un rif. in caduta libera la gravità si cancelli, lo aveva già capito Newton. Ricordate: lo dice a proposito del moto dei satelliti di Giove. La novità introdotta da Einstein è che la gravità non si cancella solo agli effetti del moto — quindi agli effetti meccanici — ma per qualunque fenomeno fisico. Un rif. in caduta libera è *completamente* equivalente a un RI. Come vedete siamo proprio sullo stesso terreno; nel caso del PR sono completamente equivalenti i rif. in moto TRU uno rispetto all'altro; nel caso del PE un rif. in caduta libera è completamente equivalente a un RI.

Il procedimento è lo stesso: si afferma sempre l'equivalenza fisica di due rif. agli effetti di qualunque fenomeno. La differenza è che nel primo caso confrontiamo moti relativi uniformi; nel secondo confrontiamo il vecchio RI nello spazio vuoto senza niente intorno, senza masse, campi gravitazionali ecc., col rif. in caduta libera.

Einstein dice: per un rif. in caduta libera dimenticate la gravità, dimenticate che sta cadendo, e vedrete che è equivalente all'altro rif., quello inerziale di Newton. Ecco dove comincia il cambiamento di paradigma: il PE di Einstein porta a ridefinire che cos'è un RI. I nuovi RI sono quelli dove valgono le leggi della fisica che noi conosciamo, senza bisogno di aggiungere forze apparenti o altri effetti "strani." Quali sono questi rif.? Sono i rif. in caduta libera. Ciò che conta è che sul rif., sul laboratorio (che, ricordate, è un oggetto materiale, quindi una stanza, un'astronave, quello che vi pare) non agisca altro che la forza di gravità di qualcosa. Se invece è presente la resistenza dell'aria, o la pressione di radiazione o altro, allora l'equivalenza non funziona più.

Un caso particolare di RI è un riferimento in moto TRU lontano da sorgenti di campo gravitazionale. Spedite la vostra astronave lontano dal Sole, dalla Terra, dai pianeti, il più possibile lontano da tutte le stelle. Mettetevi a un paio di anni luce, tra qui e  $\alpha$  Centauri... Spegnete i motori: quello è un RI. Fin qui erano d'accordo tutti anche prima, però secondo Einstein questo è solo un caso particolare. Dal suo punto di vista l'astronave rimane un RI anche se si trova vicino al Sole; basta che abbia i motori spenti, questo sì è necessario. L'astronave starà in orbita, si muoverà non so come? Non importa: dentro l'astronave io non me ne accorgo.

Invece non sono inerziali, in un campo gravitazionale, i rif. fermi o comunque che non siano in caduta libera. Se per es. la mia astronave sta nelle vicinanze del Sole e invece di lasciarla girare in orbita la voglio fermare, posso farlo: oriento l'astronave in modo che gli ugelli del motore guardino verso il Sole, regolo i razzi così che la loro spinta compensi l'attrazione solare, e l'astronave se ne sta ferma sospesa... Però ho i motori accesi, e allora l'astronave non è un RI. Oppure: l'astronave viaggia dentro un'atmosfera che la frena: allora non ho più un RI.

Ci sono domande?

D: Allora noi nel rif. della Terra non saremmo in un RI.

F: Giustissimo: da questo punto di vista, con questa ridefinizione di RI, noi in questo momento *non siamo* in un RI. E non perché la terra gira!

Mi sono fermato a chiedere se c'erano domande, perché chi parla sente l'atmosfera. Mi sembra di sentirvi pensare: "Ma che ci sta dicendo questo? Ci obbliga a buttare all'aria tutto quello che abbiamo pensato fino adesso, quello che ci hanno insegnato, e che noi abbiamo insegnato. Ci chiede di pensare cose totalmente diverse: quelli che erano RI non lo sono più, e viceversa."

Non a caso ho richiamato prima il "cambiamento di paradigma." Ma badate bene: non sto dicendo che questo che ho appena asserito è vero e quello che sapevate prima è falso; non sto dicendo che Newton ha sbagliato tutto. Fin qui è solo questione di definizioni, di utilità di una definizione, di punto di vista.

Insomma: che cos'è un RI? Nella meccanica newtoniana viene data una certa definizione, e c'è un certo vantaggio a definirlo in quel modo. Il punto di vista di Einstein è che se vogliamo usare conseguentemente il PE, se vogliamo affermare che la forza di gravità non è distinguibile dalla forza apparente in un rif. accelerato, allora la cosa più semplice da fare è chiamare inerziale un rif. in caduta libera. Ci semplifica la vita, è più convincente e poi vedremo meglio che è anche qualcosa di più: probabilmente è più profondo.

D: Un laboratorio in caduta libera mentre ruota...

F: No, non deve ruotare: se ruota compare la forza centrifuga, la forza di Coriolis... Avrei dovuto dirlo chiaramente: caduta libera significa anche che non deve ruotare.

D: Ma la forza centrifuga in un rif. rotante non equivale a una forza gravitazionale? Sto pensando a *2001 odissea nello spazio*, dove c'è un'astronave che ruota per creare una gravità artificiale.

F: Dipende sempre dal punto di vista in cui uno si mette. Se ho tutto il laboratorio a disposizione, compreso l'asse di rotazione, è chiaro che mi posso accorgere che la forza centrifuga cambia intensità con la distanza dall'asse, cambia direzione da un punto all'altro; quindi mi accorgo che c'è qualcosa di strano. Ma se penso all'astronave fatta ad anello, un anello di sezione piccola rispetto al raggio, allora l'asse di rotazione non è accessibile; è accessibile solo un piccolo spessore nel quale la forza centrifuga è praticamente costante. Se per di più il mio laboratorio è solo una stanzetta in questo anello, la forza centrifuga è costante anche come vettore. Quindi localmente è come se ci fosse un campo gravitazionale.

Però se esco dal mio piccolo laboratorio, se mi metto a girare in tondo, lungo tutto l'anello, mi accorgo bene che le cose sono più complicate! Mi pare di ricordare che in *Odissea nello spazio* si veda un astronauta che fa il footing. L'astronauta corre coi piedi "piantati per terra" grazie alla sua brava forza di gravità; però si dovrebbe accorgere di una cosa: che a seconda del verso in cui corre, il suo peso cambia. Non vi dico perché: pensateci.

Ecco che avremmo un fenomeno strano: il peso che dipende dalla velocità. Come vedete, se ho abbastanza spazio a disposizione, mi posso accorgere che non sono in un RI. È per questo che bisogna sempre dire "in piccolo": con poco spazio e poco tempo a disposizione.

Dunque decidiamo di chiamare RI quelli in caduta libera. Ripeto: non siamo obbligati a farlo, ma questa è la linea di ragionamento di Einstein. Uno può anche dire "non mi piace"; risponderci va bene, ma sta' a vedere un po' dove ci porta.

Questo cambiamento di paradigma in partenza non sembra importante: solo un modo diverso di vedere cose già note, quindi non cambia niente. Però il modo diverso può aprire la strada a scoperte: possiamo essere portati a vedere cose di cui per la via abituale non ci si accorgeva. Questo naturalmente è proprio il caso dell'idea di Einstein. Se voglio essere coerente, in questo nuovo paradigma la forza di gravità diventa una forza apparente: quando noi diciamo che c'è la forza di gravità, è solo perché non ci siamo messi nel rif. giusto, nel rif. in caduta libera. Nel rif. in caduta libera la gravità sparisce.

Vediamo due esempi, che vi mostreranno l'analogia completa fra due situazioni. La prima è quella che ci è familiare. Mi metto su una giostra che gira, e mi accorgo che c'è la forza centrifuga. Materialmente me ne accorgo perché se ho in mano un oggetto, quello tende a scapparmi verso l'esterno. Per impedirgli di scappare lo devo trattenerne, cioè gli devo applicare una forza verso l'interno. Poiché vedo che debbo applicare una forza per tenerlo fermo, sono costretto a dire che ci dev'essere un'altra forza, che va compensata. Voi sapete benissimo che se mi metto nel RI "vecchia maniera" non dico così. Dico invece: si capisce che ci vuole una forza; quell'oggetto che tengo in mano

descrive un moto circolare uniforme, che è accelerato e quindi richiede una forza; la mia mano applica appunto la forza che ci vuole. La forza centrifuga c'è nel rif. rotante, non c'è nel RI.

Secondo esempio: mi metto in un rif. solidale alla Terra. In questo rif. scopro che se voglio impedire alle cose di cadere, le devo trattenere: devo applicare una forza verso l'alto. Ne deduco che c'è una forza (apparente) verso il basso. Ho scritto apparente, perché è proprio la stessa cosa della forza centrifuga: è una forza in più che non so da dove viene. E come nell'altro caso, la potrei far sparire: basterebbe che mi mettessi nel rif. in caduta libera.

Dunque in entrambi i casi la risposta è una sola: la forza nasce perché non sto in un RI. Con la nuova definizione di RI le due situazioni sono perfettamente parallele: la giostra non è un RI, ma anche quello in cui stiamo in questo momento non è un RI. Tutti noi siamo fermi perché il pavimento ci sostiene: se non ci fosse, sprofonderemmo.

### Problemi

1. Nell'esperimento di Eötvös, la bilancia di torsione ha il periodo di un'ora e il braccio orizzontale è lungo un metro. Di quanto ruoterebbe l'equipaggio se la forza di gravità su due corpi di ugual massa differisse per  $10^{-9}$ ?
2. Stimare il diametro di un fascio laser sulla Luna, supponendo di usare quanto di meglio permette la tecnica per produrre il fascio.
3. In una stazione spaziale (del genere di quella in *2001 odissea nello spazio*) si simula la gravità facendo ruotare la stazione, che ha la forma di una ciambella. In tal modo una persona può stare "in piedi," poggiando i medesimi sulla parete della stazione volta all'esterno. Un astronauta si esercita a fare del footing: mostrare che egli si sentirà più pesante o meno pesante che se stesse fermo, a seconda del verso in cui corre.
4. Servirsi del PE (ascensore di Einstein) per spiegare la deflessione gravitazionale della luce.
5. Un'astronave nello spazio vuoto ha i motori accesi, che producono un'accelerazione  $a = 10 \text{ m/s}^2$ . Un trasmettitore posto nella coda lancia onde e.m. verso prua. Calcolare la variazione relativa di frequenza nelle onde ricevute a prua, se l'astronave è lunga 30 m.

### Risposte

*Problema 1.* (L'esperimento di Eötvös):

Sia  $m$  la massa comune dei due corpi: la forza centrifuga  $\vec{F}_c$  è la stessa su entrambi, e vale in modulo  $mg_c$ , mentre le forze gravitazionali sono per ipotesi diverse. Scriviamole

$$\vec{F}_1 = m \vec{g}_0 (1 + \varepsilon) \quad \vec{F}_2 = m \vec{g}_0 (1 - \varepsilon) \quad (6-1)$$

rispettivamente; secondo i dati del problema,  $2\varepsilon = 10^{-9}$ .

La sospensione del pendolo si dispone secondo la "verticale," che ha la direzione della risultante di tutte queste forze:  $2m\vec{g}_0 + 2m\vec{g}_c$ . La fig. 6-5 mostra la situazione, e tra gli angoli indicati si ha la relazione:

$$g_0 \sin \psi = g_c \sin \varphi \quad (6-2)$$

dove  $\varphi$  è il supplemento della latitudine del luogo:  $\varphi = 135^\circ$  se la latitudine è  $45^\circ$ .

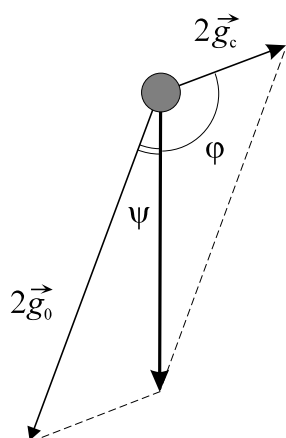


fig. 6-5

Occorre ora calcolare i momenti delle forze rispetto al filo verticale. Le due forze centrifughe sono uguali, e i loro momenti si cancellano; il momento della forza  $\vec{F}_1$  è  $lF_1 \sin \psi$ , se  $l$  è la semilunghezza del braccio orizzontale:  $l = 0.5$  m. Analogamente per il momento di  $\vec{F}_2$ , a parte il segno opposto. Usando la (6-1) e la (6-2) si ha per il momento risultante:

$$M = 2 \varepsilon m g_c l \sin \varphi.$$

Calcoliamo  $g_c$  dai dati della Terra:

$$g_c = \omega^2 R \cos \varphi = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cos \varphi$$

dove  $R$  è il raggio della Terra,  $T$  il suo periodo di rotazione.

L'angolo di torsione del pendolo si ricava partendo dalle relazioni ben note:

$$T_p = 2\pi \sqrt{I/k} \quad M = k\vartheta$$

dove  $I = 2 m l^2$  è il momento d'inerzia del pendolo,  $\vartheta$  l'angolo di torsione e  $T_p$  il periodo. Dunque

$$\vartheta = \frac{M}{k} = \frac{M T_p^2}{8\pi^2 m l^2} = \varepsilon \left( \frac{T_p}{T} \right)^2 \frac{R}{l} \sin \varphi \cos \varphi.$$

e sostituendo i dati si trova  $\vartheta = 5.6 \cdot 10^{-6}$  rad = 1.1''.

*Problema 2.* (Laser sulla Luna):

La cosa migliore che si può fare è di usare un telescopio all'inverso; in tal modo il fascio uscente ha una collimazione limitata (in caso ideale) solo dalla diffrazione, che è dell'ordine  $\lambda/d$  ( $d$  diametro dello specchio del telescopio). Alla distanza  $D$  della Luna si formerà quindi una macchia di diametro  $\lambda D/d$ .

Ponendo  $\lambda = 500$  nm,  $d = 2$  m,  $D = 3.8 \cdot 10^8$  m si trova 95 metri.

Ma il punto essenziale è che questa è anche la risoluzione con cui si può vedere un dettaglio della superficie lunare, e quindi è anche la massima precisione possibile nel puntamento del laser. Non conosco l'esatta procedura che si segue, ma se per es. il riflettore fosse stato messo al centro di un piccolo cratere ben visibile da Terra, basterebbe puntare il laser al centro del cratere per centrare il riflettore.

*Problema 3.* (Footing in una stazione spaziale):

Possiamo risolvere il problema da due punti di vista: o lavorando in un RI, oppure nel rif. rotante della stazione.

A. Sia  $R$  il raggio della ciambella,  $\omega$  la sua velocità angolare. Per simulare la gravità terrestre, si sarà scelta  $\omega$  in modo che sia  $\omega^2 R = g$ .

Scelgo come verso positivo in direzione radiale quello verso l'esterno; in direzione tangenziale quello concorde con la rotazione della stazione.

Se l'astronauta sta fermo rispetto alla stazione, esso si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare  $\omega$  rispetto a un RI, e la forza centripeta occorrente ( $F = -m\omega^2 R = -mg$ ) è fornita dal "pavimento" su cui poggia (piedi in fuori e testa in dentro, rispetto all'asse della ciambella).

Se invece corre a velocità  $v$  rispetto al pavimento, la sua velocità nel RI è  $v' = \omega R + v$ , e la forza occorrente per tenerlo sulla stessa traiettoria è ora

$$F' = -\frac{m v'^2}{R} = -\frac{m (\omega R + v)^2}{R}. \quad (6-3)$$

Questa forza è prodotta dal pavimento e si ridistribuisce sulle parti del corpo come quando l'astronauta è fermo: ciò dà all'astronauta la sensazione di "peso." Dalla (6-3) si vede che  $|F'| \geq |F|$  a seconda che l'astronauta corra nello stesso verso in cui la stazione ruota, o in verso opposto (supponendo che sia comunque  $|v| < \omega R$ ).

B. Nel rif. (rotante) della stazione, sull'astronauta fermo agiscono due forze che si fanno equilibrio: la forza centrifuga  $m\omega^2 R$  e la reazione vincolare  $F$  del pavimento. Dunque  $F = -m\omega^2 R$ , come sopra.

Se invece l'astronauta corre, su di lui agiscono:

- a) la forza centrifuga, che vale ancora  $m\omega^2 R$
- b) la reazione del pavimento  $F'$
- c) la forza di Coriolis  $F_c = 2m\omega v$ .

*Nota:* Il segno di  $F_c$  è giusto con le convenzioni adottate: se  $v > 0$  la forza è verso l'esterno, come si verifica partendo dell'espressione vettoriale  $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ .

La risultante di queste forze è la forza centripeta necessaria per il moto circolare dell'astronauta rispetto alla stazione, con velocità  $v$ :

$$-\frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R + F' + 2m\omega v$$

da cui

$$F' = -\frac{mv^2}{R} - m\omega^2 R - 2m\omega v$$

che coincide con la (6-3).

*Problema 4.* (Deflessione della luce):

L'ascensore in caduta libera è un RI; perciò se nell'ascensore si monta un proiettore che manda un fascio di luce orizzontale, esso incontrerà la parete opposta alla stessa altezza.

Se sparo un proiettile nel rif. dell'ascensore, che è inerziale, esso si muove in linea retta, ma se lo guardo da terra vedo una traiettoria curva. Dico questo non perché aggiungo la gravità, ma solo per ragioni cinematiche: l'ascensore si muove verso il basso di moto accelerato e percorre spazi verticali proporzionali ai quadrati dei tempi, mentre il proiettile percorre spazi orizzontali proporzionali semplicemente ai tempi. Perciò la traiettoria del proiettile, vista da terra, è una parabola.

Notate che per ragionare come Einstein, nel nuovo paradigma, dobbiamo capovolgere il filo logico cui siamo abituati. In primo luogo, so come si muove il proiettile nella cabina, che è un RI; poi guardo come si muove la cabina rispetto al rif. terrestre, e compongo i due moti.

Per la luce la situazione è analoga: cambiano solo gli ordini di grandezza dei parametri che descrivono la traiettoria, causa l'elevata velocità della luce.

- Nel rif. (inerziale) dell'ascensore  $x' = ct$ ,  $y' = 0$ .
- Moto dell'ascensore rispetto alla Terra:  $x = 0$ ,  $y = \frac{1}{2}gt^2$ .

Componendo i due moti:

$$x = ct, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{gx^2}{2c^2}.$$

Se  $x = 10$  m, risulta  $y \simeq 5 \cdot 10^{-5}$  m e la deflessione angolare

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gx}{c^2} \simeq 10^{-14} \text{ rad.}$$

Il problema sarebbe ora di verificare sperimentalmente questo effetto, ma con i numeri trovati risulta impossibile: occorrerà quindi trovare il modo per amplificarlo.

*Problema 5.* (Propagazione nell'astronave):

Durante il tempo di transito  $t$  del segnale il ricevitore si muove di uno spazio  $s = \frac{1}{2} a t^2$ . Facciamo un'ipotesi semplificatrice:  $s$  è molto minore della lunghezza  $h$  dell'astronave. Allora si può porre  $t = h/c$ . L'ipotesi fatta richiede  $ah/c^2 \ll 1$ , condizione ben verificata coi nostri dati.

La velocità del ricevitore quando viene raggiunto dalla radiazione sarà  $v = ah/c$ , in allontanamento dalla sorgente, e si vede che  $v \ll c$ . Possiamo quindi trascurare, nel calcolo dell'effetto Doppler, i termini di secondo ordine in  $v/c$ , e per la variazione relativa di frequenza abbiamo:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{c} = -\frac{ah}{c^2} = -3 \cdot 10^{-15}.$$

Grazie al PE possiamo dire che lo stesso risultato si avrà in un esperimento fatto sulla Terra, mandando un'onda e.m. verso l'alto (esperimento di Pound–Rebka–Snider). Si ottiene così il redshift gravitazionale.