LEZIONE 14

La cosiddetta “massa relativistica”: prima parte

Questa lezione sarà dedicata a combattere e a cercare di sfatare un vero feticcio: appunto la massa relativistica. Cosiddetta, perché secondo me non merita l'appellativo... Cominciamo.

Abbiamo già visto due punti che sembrano giustificare la massa relativistica $m' = m\gamma$: l'espressione dell'impulso e quella dell'energia, $p = m'v$, $E = m'c^2$. Quanto all'impulso, sembra un'innocua definizione: visto che vogliamo conservare il più possibile della meccanica newtoniana, perché non conservare anche $p = mv$? Basterà scrivere $p = m'v$, dove $m' = m\gamma$. L'espressione dell'impulso resta la stessa, solo che “la massa dipende dalla velocità.” Ma massa significa inerzia, e l'inerzia rimanda a $\vec{F} = m\vec{a}$. Si deve dunque scrivere $\vec{F} = m'\vec{a}$? *Niente affatto*!

Verifichiamo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = m\gamma\,\vec{a} + m\vec{v}\,\frac{d\gamma}{dt} = m\gamma\,\vec{a} + m\gamma^3\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\,\vec{v}. \qquad (14\text{–}1)$$

Infatti da $1/\gamma^2 = 1 - v^2/c^2$, derivando rispetto a t:

$$-\frac{2}{\gamma^3}\,\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{2\,\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

da cui

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}.$$

Proiettando la (14–1) nella direzione di $\vec{v}$ si trova

$$F_{\parallel} = m\gamma a_{\parallel} + m\gamma^3\,\frac{v^2}{c^2}\,a_{\parallel} = m\gamma^3 a_{\parallel}$$

mentre proiettando in direzione ortogonale a $\vec{v}$:

$$F_{\perp} = m\gamma a_{\perp}.$$

Dunque $\vec{F} = m\gamma^3\vec{a}$ se la forza è parallela a $\vec{v}$, mentre $\vec{F} = m\gamma\vec{a}$ se è perpendicolare. Per questa ragione c'è chi parla di *due* masse: la “massa trasversale” $m\gamma$, e la “massa longitudinale” $m\gamma^3$. Con quale vantaggio per la chiarezza e la semplicità, lascio a voi giudicare!

Molto più semplice dire che la seconda legge della dinamica è sempre $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, ma cambia l'espressione di $\vec{p}$ in funzione di $\vec{v}$.

La formula più citata e meno capita di tutta la fisica

Passiamo all'energia. La tentazione è forte: $E = mc^2$ è la formula più famosa, quella che tutti citano anche se non sanno che cosa significa! Argomenti contro:

– il rasoio di Occam: se la massa relativistica è un altro nome per l'energia (a parte il fattore c^2) è un doppione inutile
– nessun fisico usa *mai* la massa relativistica
– molto spesso i testi che ne fanno uso commettono gravi errori
– la massa relativistica fa perdere di vista la massa *invariante*.

Sul primo punto non mi sembra occorra aggiungere altro. Sul secondo, sarebbe interessante esaminare alcuni libri che seguono questa strada. Lasciando da parte quelli che contengono veri e propri errori, tipicamente la cosa funziona così. Dopo aver speso una paginetta o giù di lì per introdurre la massa relativistica, questi libri, come regola generale, *la dimenticano del tutto*, e vanno avanti senza usarla mai. O magari troverete qualche problema del genere: "un elettrone viene accelerato con un potenziale di 200 000 V: quanto vale la sua massa?" la cui soluzione consiste nello scrivere la formula giusta e fare il conto.

Questi libri tratteranno la dinamica relativistica, discuteranno le verifiche sperimentali, ecc.; parleranno sì ripetutamente di massa, ma sempre e soltanto come sinonimo di "massa di quiete." La ragione secondo me è ovvia: gli autori, in quanto fisici di mestiere, sono così abituati (come tutti i fisici) a pensare alla massa come massa invariante, che dopo aver pagato il loro debito al feticcio della massa relativistica non ci pensano più.

Così va quando va bene; poi ci sono i casi di grossolani errori, che discuterò più avanti. L'ultimo punto è che la massa relativistica mette in ombra la massa invariante, che è un concetto fondamentale della relatività, come quello di tempo proprio; al quale è del resto imparentato, come abbiamo visto.

La cosiddetta "massa relativistica": seconda parte

Si potrebbe pensare che basti intendersi: chiamiamo "massa relativistica" quella cosa per cui occorre moltiplicare la velocità per ottenere la q. di moto, e che ovviamente dipende dalla velocità; poi chiamiamo "massa di riposo" quella con cui abbiamo ragionato noi, che non dipende dalla velocità. Si potrebbe fare, ma solo a condizione di non commettere errori nei ragionamenti successivi; però più avanti vedremo che il rischio di creare una certa confusione è piuttosto alto.

In effetti su questo argomento molti libri incorrono in veri errori logici: spesso non si sa più di quale massa si stia parlando, non si capisce se l'energia si conserva o no; e purtroppo anche in testi di livello universitario. Per alcuni esempi, vi rimando al mio "Dialogo sulla massa relativistica," pubblicato in *La Fisica nella Scuola*, **14** (1981), p. 25, e riprodotto nell'Appendice 1.

All'argomento del rasoio di Occam, la risposta più comune è che la massa relativistica ci permette di scrivere $E = m'c^2$, cioè di scoprire la "grande" relazione di Einstein. Ma a parte la critica a questo modo di "scoprire" la suddetta relazione, di cui ho parlato nella lezione precedente, è il modo peggiore di arrivarci, perché porta a mettersi nei guai, come vedremo più avanti.

Insisto che la massa invariante è molto più interessante, e oltre alle ragioni che ho già esposte ce n'è un'altra: quando diciamo, per esempio, che l'elettrone ha una massa di $9 \cdot 10^{-31}$ kg è chiaro che intendiamo la massa invariante. Nell'elenco delle proprietà fondamentali (carica, spin, ecc.) che caratterizzano una particella, un atomo, un nucleo, s'include la massa: ma ovviamente quella che è veramente caratteristica della particella, cioè la massa invariante.

La massa relativistica: un errore didattico

Da qualunque parte la si guardi (l'elenco non è ancora finito) non riesco a vedere nessun vantaggio nell'uso della massa relativistica. Ecco perché uno dei punti caratterizzanti di questa presentazione della relatività è l'ostracismo alla massa relativistica. Detta in breve, la mia posizione è la seguente: uno ha il diritto di fare le scelte che preferisce, di dare tutte le definizioni che vuole; da un punto di vista logico, di coerenza formale, sono tutte legittime. Ma dal punto di vista didattico le scelte non sono tutte equivalenti; un discorso può essere perfettamente a posto quanto a esattezza delle deduzioni, e allo stesso tempo essere criticabile dal punto di vista didattico.

In questo spirito io critico decisamente l'uso della massa relativistica come *errore didattico*; il che non vuol dire che chi ne parla dica sempre cose sbagliate, scriva formule che non tornano o faccia errori di ragionamento. Quando parlo di errore didattico intendo solo che a mio giudizio quel modo di presentare le cose produce risultati negativi.

E per finire, ecco l'opinione di Einstein:

> "Non è bene parlare della massa $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ di un corpo in moto, poiché non se ne può dare una definizione chiara. Se si vogliono descrivere le proprietà inerziali dei corpi in moto veloce, è meglio limitarsi alla 'massa di riposo' m e dare piuttosto le espressioni dell'impulso e dell'energia" (riprodotto da L.B. Okun in "The concept of Mass," *Physics Today*, **49** (1989), p. 31).

Un esempio: il decadimento del K^0

Vorrei ora discutere un esempio che è particolarmente adatto a chiarire i rapporti tra massa ed energia e a mostrare quali pasticci si possono fare se si usa la massa relativistica.

Qualche volta la fortuna aiuta, e non c'è bisogno d'inventare un esperimento ideale; tra gli oggetti che esistono in natura alcuni sembrano fatti apposta per illustrare punti interessanti: uno di questi è il mesone K^0. Si tratta di una delle prime "particelle strane" scoperte intorno al 1950: è una particella instabile, che può decadere in diversi modi; a noi interessa quello in due pioni, uno positivo e uno negativo, di uguale massa (uno l'antiparticella dell'altro):

$$\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-.$$

Il K^0 ha una vita media di circa $9 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$, ma di questo dato non faremo uso.

In sostanza, se un K^0 è inizialmente fermo, dopo un po' emette due pioni e scompare: questi sono i fatti. Ora si tratta di analizzarli sulla base di ciò che abbiamo detto. E insisto che l'analisi che farò è quella che fa qualunque fisico, perché *nessun fisico che si occupa di queste cose usa mai la massa relativistica.*

La massa (invariante) del K^0 è $498\,\mathrm{MeV}/c^2$, quella di ciascun pione è $140\,\mathrm{MeV}/c^2$. Quando il K^0 sparisce e nascono i due pioni, passiamo da un sistema consistente di una sola particella, con massa $498\,\mathrm{MeV}/c^2$, a due con massa $140\,\mathrm{MeV}/c^2$. Possiamo subito osservare che se le cose vanno così, i fatti sperimentali ci obbligano a dire che *ci sono fenomeni in cui la massa non si conserva.*

Attenzione, perché qui è estremamente facile capire una cosa per un'altra. Quando dico che la massa non si conserva, intendo che in un processo del genere la somma delle masse delle particelle iniziali e quella delle particelle finali possono essere diverse; così come quando all'opposto dico che la q. di moto si conserva, con ciò intendo che la somma delle q. di moto iniziali è uguale a quella delle q. di moto finali. Se facciamo il calcolo con le masse nel nostro esperimento, troviamo da una parte 498, dall'altra $2 \times 140 = 280$: c'è una bella differenza! Potremmo dire che c'è un "difetto di massa", anche se di solito quest'espressione si usa in tutt'altro contesto.

Che cosa vuol dire "conservazione della massa"?

Nella fisica prima di Einstein si parlava abitualmente di conservazione della massa; però bisogna stare attenti, perché l'espressione può avere diversi significati, che a prima vista sembrano lo stesso.

Qual è il senso in cui Lavoisier parlava di conservazione della massa? Prendiamo un certo composto, lo mescoliamo a un altro, facciamo avvenire una reazione in un ambiente chiuso, in modo che non sfugga niente; pesiamo il tutto prima, ripesiamo dopo ... e troviamo che la massa è rimasta invariata. Ebbene, questo modo di procedere è diverso da quello usato col K^0: infatti per vedere se la massa è rimasta la stessa, nessuno pesa direttamente gli atomi prima e dopo la reazione: non lo faceva Lavoisier, e non lo fa neppure un chimico dei nostri tempi.

Come sappiamo benissimo, anche se ciò fosse possibile, nelle reazioni chimiche si vedrebbe molto poco: ci vorrebbero sensibilità estreme per scoprire un difetto di massa (per avere una prima indicazione si dovrebbe arrivare a 10^{-10}, come vedremo in un esempio fra poco). Ma non è questo il punto: in realtà nessuno ha mai fatto un esperimento di chimica in quel modo, pesando tutte le singole masse prima e dopo. In fondo può sembrare che non ci sia bisogno di misurarle tutte: quando prendo il recipiente e lo peso, non sto forse sommando le masse di tutte le particelle che contiene? Il fatto è che *questo non è vero.*

Ricordiamo che la massa misura l'energia totale del sistema, sia esso un corpo macroscopico oppure una particella: la massa è l'energia totale divisa per c^2. Se prendiamo un recipiente contenente un gas, questo consiste di molecole dotate di agitazione termica. Misurando con la bilancia la massa complessiva, quella che realmente si misura è l'energia totale del gas; il quale è fermo, ma solo nel senso che è fermo il suo centro di massa, cioè che nel nostro rif. la sua q. di moto totale è zero. Però dentro il recipiente ci sono tante molecole che guizzano da tutte le parti, per cui l'energia di ciascuna di queste molecole non è uguale a mc^2: l'i-esima molecola avrà un'energia $E_i = mc^2\gamma_i$, e per ogni singola molecola $\gamma_i > 1$. L'energia totale del nostro sistema sarà $\sum mc^2\gamma_i$, che è maggiore di $\sum mc^2$. Ne segue che quando pesiamo il recipiente con dentro un gas, non misuriamo la somma delle masse delle molecole del gas: misuriamo l'energia totale, *che è maggiore della somma delle masse.*

Una possibile obiezione: che c'entra questo discorso sulle energie, con la massa che ricavo da una pesata? Bene: ricordate il PE forte? Se è vero che il gas caldo cade con la stessa accelerazione del gas freddo, vuol dire che l'energia addizionale contribuisce nella stessa misura tanto alla massa inerziale (di questo ci ha convinti Einstein) quanto a quella gravitazionale: dunque misurare la massa con una pesata, o mediante $F = ma$, ci darà in ogni caso lo stesso risultato.

Vediamo un altro esempio: "quando scaldo un pezzo di ferro, la sua massa aumenta". Che vuol dire? Al crescere della temperatura aumentano le velocità di vibrazione termica degli atomi, quindi aumentano i γ_i; l'energia totale aumenta non perché sono aumentate le masse delle singole particelle — se per massa intendiamo, come io voglio intendere, la massa invariante — ma perché sono aumentati i γ_i. Per di più, in questo caso entra in gioco anche l'energia potenziale, perché gli atomi del solido sono legati tra loro. Quando aumenta l'ampiezza delle oscillazioni, aumenta anche l'energia potenziale media. L'energia totale è la somma di tutte le energie; la massa invariante del sistema complessivo misura l'energia totale del sistema, qualunque sia la forma in cui quell'energia è presente: come energia cinetica delle molecole costituenti, come energia potenziale d'interazione, come radiazione elettromagnetica (che esiste sempre dentro il recipiente, anche se noi non la vediamo)...

Il bello della sintesi einsteiniana, dell'interpretazione relativistica della massa, è questo: *qualunque sia la forma sotto cui è presente l'energia, essa contribuisce a cambiare la massa del sistema.* Quindi se si scalda un pezzo di ferro oppure un gas, non c'è bisogno di sapere che forma abbia assunto l'energia al suo interno; basta sapere che l'energia è aumentata, per poter concludere che dev'essere aumentata anche la massa. Ma ciò non significa che siano aumentate le masse dei singoli atomi che costituiscono il gas. Esiste infatti un'altra proprietà fondamentale della massa: non è additiva. Intesa in questo modo, *la massa di un sistema non è la somma delle masse dei costituenti.*

La massa non è additiva

Infatti, se si tenta di salvare l'additività della massa, ci s'infila in un vero ginepraio di difficoltà. In primo luogo sorgono problemi con l'energia potenziale: a chi va attribuita? Sappiamo che non appartiene né a una particella né all'altra: ad es. l'energia potenziale del sistema Terra-Luna è della Terra o della Luna? Tuttavia nella massa complessiva del sistema conta anche l'energia potenziale. In questo caso sarà una quantità minuscola rispetto alle masse della Terra e della Luna, ma ciò non cambia la sostanza del problema.

Del resto se pensiamo invece a un nucleo il contributo dell'energia potenziale non è per niente trascurabile: la massa di un nucleo è sensibilmente minore dalla somma delle masse dei costituenti (questo è il vero "difetto di massa"). Prendiamo un nucleo di elio: è costituto da due protoni e due neutroni, e la somma delle masse sarebbe $2m_{\rm n} + 2m_{\rm p}$. Ma la massa della particella α è minore: la differenza è 28 MeV in unità di energia, pari a circa il 0.7%. Ciò vuol dire semplicemente che per prendere un nucleo di elio e farlo a pezzi, per separare i due protoni e i due neutroni, bisogna spendere energia; in altre parole, l'energia di un nucleo di elio fermo è minore della somma delle energie di due neutroni e di due protoni, anch'essi fermi, molto lontani tra loro.

Come mai succede questo? Nulla di strano: ci sono le forze nucleari, che sono attrattive (per capire questo non occorre la relatività). Se volete "smontare" il nucleo dovete fare lavoro, cedergli energia. Ma ciò che è vero per l'energia è vero anche per la massa: la massa del nucleo di elio sarà l'energia divisa per c^2, e quindi minore della somma delle masse di due protoni e due neutroni.

E se tentassimo di usare la cosiddetta massa relativistica, come dovremmo ragionare? Prima di tutto osserviamo che caso mai la massa relativistica dovrebbe crescere. I protoni e i neutroni dentro il nucleo di elio non stanno fermi; perciò le loro "masse relativistiche" saranno maggiori di quelle di quiete. In questo modo perciò verrebbe fuori un "eccesso di massa," anziché un difetto. Mi obietterete subito che i nucleoni hanno anche un'energia potenziale: il fatto che il nucleo è legato significa naturalmente che l'energia potenziale è negativa e in valore assoluto più grande dell'energia cinetica; sembra perciò che le cose possano tornare.

Ma se pretendiamo di far intervenire l'energia potenziale per cambiare le masse, nasce il problema che non si sa a chi attribuirla. Abbiamo quattro particelle che si attirano, e c'è un'energia di legame di 28 MeV: di chi è quest'energia? Non è di nessuna in particolare, è del sistema nel suo insieme. Quindi l'unica via d'uscita sensata è proprio di pensare solo alle masse di riposo, che hanno un significato preciso, invariante, indipendente dalle condizioni in cui le particelle si trovano; quando il sistema è legato la sua energia complessiva è minore di quella delle particelle separate, e quindi è minore anche la sua massa.

Nel caso di un gas va tutto al rovescio, perché il sistema non è legato, tanto è vero che se apro il recipiente le molecole scappano. In questo caso c'è energia cinetica, ma non c'è un'apprezzabile energia potenziale; quindi l'energia delle molecole è maggiore che se stessero ferme e perciò la massa complessiva del gas è maggiore della somma delle masse delle molecole.

In conclusione: la massa non è additiva, e inoltre non si conserva ... ma attenzione, è qui che si può scivolare: la massa non si conserva nel senso che *la somma delle masse non rimane sempre costante* durante un processo fisico. Ma ricordate che la somma delle masse non è la massa totale, perché quest'ultima misura l'energia complessiva, la quale ovviamente si conserva.

Esempio di una reazione chimica

Vediamo un altro esempio: dentro un recipiente isolato (e molto robusto!) ci sono idrogeno e ossigeno. A un certo momento inneschiamo la reazione chimica che forma acqua: se pesiamo il recipiente prima e dopo la reazione che cosa troveremo (ammesso di avere una bilancia che abbia la sensibilità necessaria)?

Se qualcuno, influenzato dai discorsi precedenti sull'energia di legame, ha pensato che la massa diminuisce, dovrebbe riflettere che il recipiente è chiuso, che niente può entrare o uscire, né energia né materia di nessun genere. D'altra parte la massa totale è l'energia totale divisa per c^2: allora è chiaro che *la massa totale non cambia*!

Se invece si lascia uscire calore, per riportare il sistema all'equilibrio termico con l'esterno, l'energia diminuisce e lo stesso accade alla massa. Per essere concreti, vediamo qualche numero: partiamo da 1 mole di O_2 e 2 moli di H_2 a condizioni normali: il volume occupato è 67.2 litri. L'entalpia di reazione (calore che occorre sottrarre perché la reazione avvenga in modo isobaro e isotermo) è 572 kJ. Alla fine avrò 36 grammi di acqua liquida, che occupano 36 cm^3 (sarà anche presente una piccola quantità di vapore).(1)

Se non sottraggo quei 572 kJ, e tengo costante il volume, l'acqua non diventa liquida, e il vapore va a oltre 7000 K, con pressione di 16 atm (ecco perché ci vuole un recipiente robusto!).(2) Il vapore di H_2O caldissimo ha la stessa energia della miscela iniziale: è aumentata l'energia cinetica delle molecole, ma l'energia potenziale interna *delle molecole* è diminuita (più negativa) il che vuol dire che la somma delle masse invarianti delle molecole è diminuita. La diminuzione relativa di massa si può stimare dall'entalpia di reazione:

$$\frac{572\,\mathrm{kJ}}{36\,\mathrm{g}\times c^2} = 1.8\cdot 10^{-10},$$

inapprezzabile con qualsiasi bilancia.

Se infine pensiamo alla somma delle masse delle particelle costituenti (elettroni e nuclei) certamente non è cambiata, in entrambi i casi: recipiente isolato o reazione isoterma.

Questo esempio mostra quanto sia facile imbrogliarsi; eppure le idee base sono semplici. La massa totale, intesa come energia, è costante se il sistema è isolato; ma se si lascia sfuggire dell'energia è chiaro che la massa decresce. Invece in una reazione chimica (in cui le particelle sono sempre le stesse, e ognuna mantiene immutata la sua massa) la somma delle masse invarianti delle singole particelle non cambia, anche se c'è stato un trasferimento di energia, anche se il gas si raffredda. Dato che non c'è una relazione immediata e diretta tra la somma delle masse e la massa totale (l'energia totale), la somma delle masse ha scarsa utilità pratica, e non conviene prestarci attenzione.

La massa relativistica nel decadimento del K^0

Nell'esempio del K^0, se si tira in ballo la massa relativistica le cose non fanno che diventare più confuse. Nel decadimento la somma delle masse (invarianti) diminuisce, mentre l'energia totale si conserva. L'energia iniziale era $m_K c^2$; quella finale sarà $2\,m_\pi c^2 \gamma$ (2 volte perché i due pioni hanno la stessa velocità). Abbiamo quindi:

$$m_K = 2\,m_\pi \gamma, \tag{14–2}$$

dove $\gamma > 1$, perché i pioni si muovono; anzi questa relazione ci permette di calcolare γ. Abbiamo così risolto un piccolo problema di quella che impropriamente si chiama "cinematica relativistica": trovato γ è facile calcolare la velocità dei pioni.

Se uso invece la massa relativistica, la massa di un pione sarà $m' = m_\pi \gamma$. Quindi la (14–2) diventa $m_K = 2m'$, cioè la somma delle masse è rimasta quella di prima.

Tutti coloro che parlano di massa relativistica dovrebbero almeno essere coerenti, e dire che la massa si conserva. Il che è ovvio, perché la massa relativistica è un altro

(1) Dato che stiamo tenendo costante il volume, il calore scambiato non sarà uguale alla variazione di entalpia, nella quale si tiene conto anche del lavoro a pressione costante. Però in questo caso il lavoro è inferiore a 7 kJ, ossia circa l'1% della variazione di entalpia, e possiamo trascurarlo.

(2) In realtà si tratta di un calcolo del tutto "teorico," per almeno due ragioni:

a) a quella temperatura l'acqua non resta legata, e si ridissocia in idrogeno e ossigeno;

b) è del tutto impossibile raggiungere la temperatura calcolata, perché basta un po' di calore ceduto al recipiente (che ha una capacità termica assai maggiore del gas) per raffreddare parecchio il gas stesso.

nome dell'energia (di riposo più cinetica). Decenza vuole perciò che non si dica contemporaneamente:

a) che la massa dipende dalla velocità;

b) che in un processo di questo genere c'è stata una "trasformazione di massa in energia."

La "trasformazione di massa in energia"

Ho già detto che a me non piace parlare di trasformazione di massa in energia, ma vediamo che cosa può voler dire. Nel nostro esempio c'è stata una diminuzione nella somma delle masse invarianti: perché? Inizialmente l'energia è $m_{\mathrm{K}}c^2$; alla fine possiamo scriverla nella forma $2\,m_\pi c^2 + 2\,T_\pi$. Confrontando, e dividendo per c^2, risulta

$$m_{\mathrm{K}} = 2\,m_\pi + 2\,T_\pi/c^2,$$

e questa possiamo leggerla nel senso che un po' della massa del K^0 è andata in energia cinetica dei pioni.

Fin qui non c'è niente di male; ma se si fa questo discorso, poi non si può parlare di massa relativistica: abbiamo già visto che la somma delle masse relativistiche si conserva. Se con dei ragazzi che certamente dovranno già fare un certo sforzo per capire, si fanno di queste confusioni, ognuno può immaginare che risultati si otterranno...

Chiediamoci inoltre: l'energia si conserva? Se sì, come può la massa "convertirsi" in energia? Vuol dire che l'energia aumenta? Per lo meno si dovrebbe dire che la massa si trasforma in energia cinetica, cioè che c'è stata una conversione tra energia sotto forma di "massa di riposo" ed energia cinetica. Ad ogni modo il mio punto di vista è che se tutte queste cose si evita di dirle è tanto di guadagnato, visto che non ce n'è nessun bisogno e il rischio di creare confusioni è molto alto. Le idee necessarie e sufficienti sull'argomento "massa ed energia" in relatività sono le seguenti:

1. l'energia si conserva
2. l'energia per un oggetto *in quiete* è sempre uguale a mc^2, e per un oggetto *in moto* a $mc^2\gamma$.

Nell'esempio del K^0 questo basta

a) per spiegare perché m_{K} non è uguale a $2m_\pi$;

b) per calcolare γ se conosciamo m_π e m_{K}.

Ed è tutto.

Se invece, essendo affezionati alla massa relativistica e alla trasformazione di massa in energia, cominciamo a infilare nel discorso $E = mc^2$ usata in tutti i possibili modi, dove m è un po' la massa relativistica e un po' la massa di riposo, E è un po' l'energia totale e un po' quella di riposo ... allora abbiamo trovato il modo sicuro per non far capire più niente.

Problemi

1. Calcolare la velocità dei pioni emessi nel decadimento $\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-$ (K^0 fermo).

Nel rif. in cui il π^+ è fermo, quali sono le velocità di π^- e K^0? Come si scrive il bilancio dell'energia in questo rif.?

2. Abbiamo visto nel problema 1 della lezione precedente che il Sole emette radiazione e.m. al ritmo di $4 \cdot 10^{33}$ erg/s e che la sua variazione relativa di massa, in un miliardo di anni, è $7 \cdot 10^{-5}$.

Perché diminuisce la massa del Sole?

3. Un litro di acqua (liquida) ha massa circa 1 kg. Se evapora (a temperatura costante) la sua massa cambia? Quanto? Perché?

4. Il trizio (isotopo 3 dell'idrogeno) è radioattivo β: emette un elettrone e un antineutrino e si trasforma in ^{3}He. Per le masse degli atomi si trovano i seguenti dati:

$$\begin{array}{ll} ^3\mathrm{H} : & 2809.4327\,\mathrm{MeV} \\ ^3\mathrm{He} : & 2809.4141\,\mathrm{MeV}. \end{array}$$

Calcolare la massima energia cinetica degli elettroni emessi.

Risposte

Problema 1. (Decadimento del K^0):

Non c'è che da usare la (14–2): $\gamma = m_\mathrm{K}/2\,m_\pi$ da cui

$$v = c\,\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_\mathrm{K}^2}} = 0.83\,c.$$

Nel rif. del π^+, ovviamente il K^0 ha velocità v (in modulo). Quanto alla velocità del π^-, il modo più diretto per calcolarla sarebbe la legge di trasf. delle velocità, che noi però non abbiamo mai scritta. Possiamo comunque arrivarci per via indiretta, come segue.

Scriviamo le solite leggi di conservazione:

$$E_\mathrm{K} = E_+ + E_- \qquad \vec{p}_\mathrm{K} = \vec{p}_+ + \vec{p}_-$$

(il significato dei simboli è ovvio). Nel rif. del π^+ abbiamo

$$\vec{p}_+ = 0 \qquad E_+ = m_\pi c^2$$

mentre

$$v_- = c^2\,\frac{p_-}{E_-} = c^2\,\frac{p_\mathrm{K}}{E_\mathrm{K} - E_+} = \frac{E_\mathrm{K}\,v}{E_\mathrm{K} - m_\pi c^2} = \frac{m_\mathrm{K}\gamma\,v}{m_\mathrm{K}\gamma - m_\pi}.$$

Non resta che sostituire per v e per γ le espressioni già trovate, per ottenere

$$v_- = c\,\frac{m_\mathrm{K}\sqrt{m_\mathrm{K}^2 - 4\,m_\pi^2}}{m_\mathrm{K}^2 - 2\,m_\pi^2} = 0.98\,c.$$

Il bilancio dell'energia è stato già scritto: c'è solo da osservare che in questo rif. il π^- ha tutta l'energia cinetica, che proviene in parte da quella del K^0, in parte dai 218 MeV della differenza di massa tra il K^0 e i due pioni.

Problema 2. (Massa del Sole):

La risposta è quasi banale: la massa diminuisce perché dimiuisce l'energia (siamo nel rif. in cui il Sole è fermo, e resta fermo).

Chi sia affezionato alla massa relativistica, dirà invece: la massa diminuisce perché la radiazione emessa porta via massa. Infatti i fotoni hanno massa (relativistica) pari alla loro energia divisa per c^2.

Anche dal punto di vista della costituzione interna del Sole, le due descrizioni sono diverse. Assumiamo per semplicità che dal Sole non esca nient'altro, tranne fotoni.

Dimentichiamo anche le reazioni nucleari, in modo che il numero di particelle (elettroni, protoni, nuclei) non cambi nel tempo. Allora il punto di vista che ho qui sostenuto dice che le masse di tutte queste particelle non cambiano, ma la massa del Sole *non è* la somma di queste masse; quella che cambia è l'energia (cinetica + potenziale).

Invece chi difende la massa relativistica dirà che la massa del Sole è la somma delle masse (relativistiche) delle particelle costituenti. Con questo avrà messo in conto le energie cinetiche, ma dovrà poi attribuire (misteriosamente, secondo me) una massa *negativa* alle energie potenziali, per far tornare i conti.

Problema 3. (Evaporazione dell'acqua):

Stiamo supponendo che l'acqua si trovi in un recipiente col solito pistone, in modo che la pressione resti costante mentre il volume aumenta man mano che l'acqua evapora. (Si ricordi che la costanza della pressione è condizione necessaria per avere evaporazione a temperatura costante.) Supponiamo per es. che la pressione esterna sia quella atmosferica standard; il che vuol dire che la temperatura è 100°C.

Il calore di evaporazione (che più correttamente andrebbe detto "entalpia di evaporazione") è il calore che si deve cedere per far evaporare l'unità di massa: per l'acqua a 100°C vale $2.26 \cdot 10^6$ J/kg. Però questo calore non va tutto ad aumentare l'energia interna dell'acqua: dato l'aumento di volume, c'è da tener conto del lavoro fatto contro la pressione esterna.

L'aumento di volume si calcola assumendo che il vapore sia approssimativamente un gas perfetto. Dato che 1 kg di acqua sono 44.6 mol, il volume occupato dal vapore è $1.24\,\mathrm{m}^3$, mentre il volume iniziale, che è un litro, è trascurabile. Il lavoro fatto è $1.25 \cdot 10^5$ J.

L'energia interna aumenta di $2.26 \cdot 10^6 - 1.25 \cdot 10^5 = 2.13 \cdot 10^6$ J; ne segue che l'incremento di massa vale $2.4 \cdot 10^{-11}$ kg.

Dato che la temperatura non è cambiata, possiamo assumere che non sia neppure cambiata l'energia cinetica delle molecole. Dunque l'aumento di massa è da attribuire alla differenza di energia potenziale: negativa nell'acqua liquida, praticamente nulla nel vapore.

Problema 4. (Decadimento β del trizio):

Come si dice nell'enunciato del problema, il decadimento avviene con la reazione

$$^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}.$$

All'inizio avremo un atomo neutro, ossia il nucleo ^{3}H e un elettrone legato (energia di legame 13.6 eV); alla fine l'elettrone emesso dal nucleo non resterà legato nell'atomo, che quindi si trasformerà in uno ione $^3\mathrm{He}^+$. Invece i dati sulle masse si riferiscono in entrambi i casi ad atomi neutri, e ci dicono che un atomo ^{3}H ha energia maggiore di ^{3}He, per 18.6 keV.

Tuttavia la differenza di energia tra un atomo neutro ^{3}He e l'insieme $^3\mathrm{He}^+ + \mathrm{e}^-$, con elettrone distante dallo ione e fermo, ossia l'energia di prima ionizzazione dell'atomo, è circa 25 eV, quindi piccolissima alla scala di energie che stiamo considerando, e possiamo trascurarla. Perciò il dato 18.6 keV rappresenta anche la differenza di energia tra ^{3}H e $^3\mathrm{He}^+ + \mathrm{e}^-$ (con elettrone fermo).

Il problema chiede la *massima* energia dell'elettrone; la ragione è che l'energia disponibile si ripartisce tra elettrone e antineutrino. L'elettrone avrà energia massima quando l'antineutrino ha energia nulla (a questa scala la massa dell'antineutrino, se non è nulla, è certamente trascurabile), perciò la risposta è 18.6 keV.

A rigore si dovrebbe anche tener conto del rinculo dello ione, ma dato il rapporto di masse, circa 1 a 7000, l'energia cinetica dello ione è per 4 ordini di grandezza inferiore a quella dell'elettrone.