LEZIONE 17

La dinamica cosmologica

Abbiamo visto come sia possibile, senza tanta matematica, trattare le conseguenze della variazione nel tempo del raggio dell'Universo, e in particolare prevedere il redshift cosmologico e ricavare la legge di Hubble. Questa era ciò che abbiamo chiamato cinematica cosmologica. Vogliamo ora affrontare la dinamica: qual è la legge di variazione di $R(t)$? Come trovare un'equazione del moto? Nelle condizioni particolarmente semplici del nostro modello, ciò è possibile (barando un po') anche senza scrivere le equazioni di Einstein. La ragione è che per regioni abbastanza piccole, e per materia in quiete o in moto lento, la teoria newtoniana costituisce un'approssimazione adeguata.

Immaginiamo perciò d'isolare nel nostro spazio una piccola sfera (s'intende piccola alla scala cosmologica) e di studiarne il moto. Abbiamo già visto che per il PC possiamo supporre costante la densità ϱ della materia; per di più possiamo anche supporre che tale materia sia in quiete, perché le osservazioni mostrano che le velocità relative delle galassie rispetto a quelle vicine sono sempre piccole rispetto a c. In queste ipotesi vale la fisica newtoniana, e una galassia al bordo della nostra sfera (fig. 17–1) si muove sotto la sola azione della forza di gravità prodotta dalla massa interna alla sfera (teorema di Gauss).

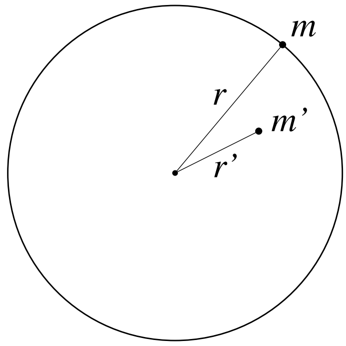

fig. 17–1

Se M è la massa totale nella sfera, e r il suo raggio, l'accelerazione della galassia al bordo si calcola da

$$m\,\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}. \tag{17–1}$$

La m si cancella, e risulta

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Ma la massa totale è

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\,r^3\varrho$$

quindi

$$\ddot{r} = -\tfrac{4}{3}\pi G\,r\,\varrho. \tag{17–2}$$

Bisogna però stare attenti, perché così abbiamo fatto le cose troppo semplici. Abbiamo supposto che la densità sia costante nella sfera: allora dobbiamo assicurarci che resti costante a tutti i tempi, altrimenti la formula che lega la massa alla densità non è più vera. Per sapere se la densità resta costante dobbiamo studiare il moto di un'altra masserella m', la cui distanza dal centro sia $r' < r$. Per fortuna va tutto bene, perché su m' agisce soltanto la forza della materia che sta all'interno del raggio r'; quindi l'accelerazione di m' è data ancora dalla (17–2), se al posto di r si mette r':

$$\ddot{r}' = -\tfrac{4}{3}\pi G\,r'\varrho.$$

Se allora scegliamo bene le condizioni iniziali, in modo che inizialmente la velocità di ciascuna masserella sia proporzionale a r, per ragioni di similitudine tutti i punti continueranno a muoversi istante per istante con velocità proporzionale a r: infatti anche l'accelerazione è proporzionale a r. Ne segue che l'intera sfera si espande o si contrae, ma sempre mantenendo inalterati i rapporti delle distanze tra i vari punti: quindi la densità resta uniforme.

Accanto alla (17–1) possiamo anche scrivere la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m\,\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} &= \text{cost.} \\ \dot{r}^2 - \frac{2GM}{r} &= \text{cost.} \\ \dot{r}^2 - \tfrac{8}{3}\pi G\,r^2\varrho &= \text{cost.} \end{aligned} \qquad (17\text{–}3)$$

Notate che anche se la forza è attrattiva, niente vieta che si abbia espansione: la velocità di espansione diminuirà, perché l'accelerazione è diretta verso il centro; ma l'espansione può continuare anche fino all'infinito: se questo accade o no, dipende solo dalle condizioni iniziali.

Le equazioni di evoluzione

Se ora prendiamo un sistema di coordinate come quello della fig. 16–3, con P al centro della sfera e Q sulla galassia al bordo, avremo ancora $r = R\,\vartheta$, e r varierà nel tempo perché cambia R (raggio di curvatura dell'Universo) mentre ϑ resta fisso. Allora la (17–2) ci dà subito

$$\ddot{R} = -\tfrac{4}{3}\pi G R\,\varrho. \qquad (17\text{–}4)$$

Questa è proprio l'equazione del moto per il raggio dell'Universo che stavamo cercando. È opportuno mettere di nuovo l'accento sul fatto che nei limiti del nostro modello il risultato che abbiamo ottenuto *è esatto*, ossia è lo stesso a cui saremmo arrivati partendo dalle equazioni di Einstein (che non sappiamo neppure come siano fatte). Un'altra forma dell'equazione la ricaviamo allo stesso modo dalla (17–3):

$$\dot{R}^2 - \tfrac{8}{3}\pi G R^2 \varrho = \text{cost.} \qquad (17\text{–}5)$$

Tuttavia ho avvertito prima che avrei barato, e ora debbo svelare il trucco. Il teorema di Gauss, nel modo come lo abbiamo usato noi, vale solo per una distribuzione di massa *circondata da spazio vuoto*: altrimenti niente ci autorizza a escludere un campo gravitazionale prodotto da masse esterne, del quale non possiamo dire nulla. Neppure un argomento di simmetria ci salva, dato che in un universo omogeneo tutti i punti sono centri di simmetria. Il fatto è che la teoria newtoniana della gravitazione (da cui discende il teorema di Gauss) presuppone uno spazio euclideo, mentre qui abbiamo uno spazio che può anche essere *non euclideo* (a curvatura costante): nel nostro ragionamento ci eravamo (volutamente) dimenticati di ciò. Pertanto è assai dubbio se essere felici del risultato, e di conseguenza si può discutere sull'opportunità di una sua utilizzazione didattica. Forse sarebbe meglio mettere le carte in tavola dall'inizio, ma non so quale possa essere l'effetto.

Un altro difetto della nostra dimostrazione è nascosto nella (17–5). Per come ci siamo arrivati, sembra che la costante a secondo membro possa essere qualsiasi; invece solo il segno è arbitrario, nel senso che dalle equazioni di Einstein si ottiene sì la (17–5), ma la costante può assumere solo i tre valori 0, $+c^2$, $-c^2$ che corrispondono ai tre tipi di curvatura che abbiamo già incontrato. Riscriveremo perciò la (17–5) per tener conto di ciò, anche se non possiamo darne una giustificazione:

$$\dot{R}^2 - \tfrac{8}{3}\pi G R^2 \varrho = -kc^2 \qquad (k = 0, +1, -1). \qquad (17\text{–}6)$$

Il problema della singolarità iniziale

Discutiamo ora l'equazione del moto (17–4). Prima di tutto si vede che $\ddot{R} < 0$: quindi il grafico di $R(t)$ è necessariamente concavo verso il basso, e perciò dovrà incontrare l'asse delle ascisse a un'epoca la cui distanza da oggi è minore di t_{H}. Se il nostro modello di spazio a curvatura costante è corretto, ci dev'essere stato nel passato un istante — non più lontano di t_{H} — a cui il raggio era nullo.

Naturalmente c'è un "se": *se questo modello è corretto.* A dire il vero, è stato dimostrato da Hawking e Penrose che in RG la singolarità ($R = 0$) esiste sotto ipotesi molto più generali di quelle poste alla base del nostro modello. Sfortunatamente però, tutta la teoria cade in difetto proprio quando ci si avvicina all'istante critico. Se $R \to 0$, ne segue $\varrho \to \infty$, e non abbiamo nessuna ragione di credere che le leggi fisiche valide nell'ambito della nostra esperienza possano essere estrapolate fino a valori infiniti della densità e di altre grandezze.

Occorre qui aggiungere un'osservazione: la RG non considera effetti quantistici. Così ad es. l'energia del campo gravitazionale nella teoria di Einstein non è quantizzata, come l'energia elettromagnetica. Il fatto è che ancor oggi nessuno sa fare la meccanica quantistica del campo gravitazionale (nel gergo dei fisici teorici si dice "quantizzare la gravità"); si sa solo per certo che a grandi densità devono intervenire effetti quantistici. Ciò per le stesse ragioni per cui, quando si considera la materia su scala atomica, non si può usare la meccanica classica. Se l'intero Universo è ridotto a una piccola sferetta, una teoria quantistica del campo gravitazionale è indispensabile. Questo è un altro motivo per cui non possiamo neppure asserire che l'estrapolazione sia sbagliata: semplicemente non si sa che cosa sia.

Possiamo solo dire, con un argomento dimensionale, per quale raggio gli effetti quantistici diventano importanti. Con le costanti fondamentali c, G e $\hbar$ si può costruire una sola lunghezza, detta *lunghezza di Planck*:

$$L_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{cm}.$$

Certamente la RG diventa inapplicabile a tempi in cui R è dell'ordine della lunghezza di Planck. Ecco tutto ciò che possiamo dire sulla famosa questione di un'origine dell'Universo, supposta coincidere con l'istante in cui $R = 0$. La RG porta a questa previsione, ma si tratta dell'estrapolazione di qualcosa che certamente *non è estrapolabile.*

Evoluzione della densità di materia

Per risolvere l'equazione del moto ci manca ancora di sapere come varia nel tempo la densità di materia. Per rispondere, ricordiamo che uno spazio tridimensionale a curvatura costante ha un volume finito: $V = 2\,\pi^2 R^3$. La cosa importante è che il volume è proporzionale al cubo del raggio; il coefficiente di proporzionalità interessa poco ai nostri scopi.

Dunque quando cambia il raggio cambia anche il volume. D'altra parte la materia presente nell'Universo è fatta di atomi; anzi il grosso della massa sta nei nuclei, che sono poi essenzialmente barioni (protoni e neutroni) e questi nel loro insieme non cambiano di numero. (Esiste l'ipotesi che i protoni — e di conseguenza i nuclei — possano non essere stabili; sembra tuttavia accertato che la vita media è almeno 10^{32} anni, e quindi nella durata dell'Universo sono sempre molto pochi quelli che decadono.) Ma se il numero di barioni si conserva, si può anche dire che la massa totale non cambia: quindi la densità deve andare come $1/R^3$.

Possiamo dunque sostituire ϱ con b/R^3 nella (17–3), ottenendo

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\frac{\pi b\,G}{R^2}$$

e questa è un'equazione differenziale che è facile integrare. Ma anche senza fare il calcolo esplicito è chiaro che la $R(t)$ è perfettamente determinata, se si conoscono le condizioni iniziali a un istante qualsiasi.

La radiazione elettromagnetica cosmica

Nel discorso c'è però un errore, perché nell'Universo non esistono solo barioni: quanto meno, c'è anche la radiazione e.m., che contribuisce anch'essa alla massa totale. In effetti stimando la quantità di energia presente oggi nell'Universo sotto forma di radiazione, si trova che è una piccola frazione, non più di un millesimo, dell'energia che si trova sotto forma di massa delle particelle (soprattutto barioni): sembra quindi di poterla trascurare. Se però oggi nel nostro Universo — che ha un volume finito — c'è della radiazione e.m., che succede quando il raggio dell'Universo cambia?

Per rispondere ragioniamo così. Prima di tutto, teniamo presente che la materia dell'Universo attualmente o è condensata in stelle — che però occupano pochissimo volume — oppure è sotto forma di atomi d'idrogeno liberi. A causa delle condizioni fisiche attuali, praticamente l'Universo è trasparente alla radiazione e.m. quasi dappertutto, ossia non c'è un'interazione apprezzabile tra la radiazione e il resto della materia. Questo vuol dire che ogni fotone viaggia indisturbato. Naturalmente ciò non è proprio vero: se io vedo la luce di una stella, è perché ci sono dei fotoni che arrivano ai miei occhi e vengono assorbiti; però quelli che vengono assorbiti sono una frazione esigua del totale. Dunque il numero di fotoni si conserva. Sia ora n il numero di fotoni per unità di volume: il numero totale sarà nV, e questo resta costante, per cui $n \propto R^{-3}$.

Chiamiamo ε l'energia di un fotone: naturalmente ci sono fotoni di tutte le possibili energie, ma possiamo pensare a un'energia media, ed è questa che indico con ε. Nell'evoluzione dell'Universo l'energia media dei fotoni non si conserva, perché l'energia dipende dalla frequenza, e la frequenza cambia — per effetto del redshift — inversamente alla lunghezza d'onda. Visto che la lunghezza d'onda è proporzionale al raggio dell'Universo, come dice la (16–1), la frequenza è inversamente proporzionale; dato che l'energia varia come la frequenza, si vede che $\varepsilon \propto 1/R$. Ne segue per la densità di energia $n\varepsilon$:

$$n\varepsilon \propto 1/R^4. \tag{17–7}$$

L'importanza di questo risultato sta nel fatto che se andiamo indietro nel tempo per la densità di massa dovuta alla materia barionica abbiamo $\varrho_\mathrm{b} \propto 1/R^3$, mentre per la densità di massa dovuta ai fotoni si trova $\varrho_\mathrm{f} \propto 1/R^4$: tutt'e due aumentano, però in una compare il raggio alla quarta potenza, nell'altra il raggio al cubo. Quindi anche se oggi ϱ_f è trascurabile rispetto a ϱ_b, andando abbastanza indietro (cioè per un R abbastanza piccolo) la situazione si capovolge: a un certo punto ϱ_f diventa più grande di ϱ_b.

Di qui si vede che non possiamo trascurare la radiazione e.m.: anch'essa contribuisce a incurvare l'Universo, perché anche l'energia totale della radiazione è massa. Dovremo dunque introdurle tutt'e due nell'equazione del moto, che così diventa più complicata. Non ce ne occuperemo in dettaglio, ma quello che abbiamo visto già ci dice che nel lontano passato gran parte dell'energia era e.m.: è questa la "palla di fuoco" (fireball) di Gamow.

La scoperta della radiazione di fondo

Per ragioni di equilibrio statistico, quella radiazione sarà una "radiazione nera," con una distribuzione spettrale data dalla legge di Planck. Quando l'Universo si espande la radiazione s'indebolisce, perché la sua densità d'energia va come $1/R^4$; però conserva il carattere di radiazione nera. Soltanto che, come diminuisce l'energia media dei fotoni, diminuirà la temperatura. In una radiazione nera l'energia media dei fotoni sarà dell'ordine di kT, dove k è la costante di Boltzmann e T la temperatura della radiazione. Dunque sarà $T \propto \varepsilon \propto 1/R$. Dobbiamo perciò aspettarci che oggi sia presente un fondo di radiazione e.m. di corpo nero, probabilmente a una temperatura abbastanza bassa.

Per stimare la temperatura bisogna andare indietro nel tempo, fino a un'epoca alla quale la radiazione interagisce ancora con la materia; vedere in quali condizioni (raggio, densità, temperatura) tale interazione cessa; e infine estrapolare da quell'epoca la temperatura con la legge $1/R$. Fatti i conti, viene fuori che oggi la temperatura dovrebbe essere di qualche kelvin.

Questa previsione fu fatta nel '48 da Alpher, Bethe e Gamow, ma allora nessuno avrebbe pensato a una verifica sperimentale. La scoperta della radiazione cosmica di fondo è dovuta a Penzias e Wilson (1965).

Come si presenta oggi la radiazione di fondo? Prendiamo $T \simeq 3\,\mathrm{K}$, perché così è stata trovata. Con $k \simeq 1.4 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, si ha $kT \simeq 4 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J}$: questa è l'energia media di un fotone. La frequenza si trova dividendo per la costante di Planck, e risulta dell'ordine di $10^{11}\,\mathrm{Hz}$, che significa $\lambda \simeq 3\,\mathrm{mm}$; si tratta quindi di microonde.

Questa scoperta è stato un grosso risultato a favore del modello, perché confermava una previsione di quasi vent'anni prima; eppure è avvenuta per caso. Gli scopritori erano tecnici dei Bell Laboratories, che stavano studiando sistemi di antenne a microonde per radiocomunicazioni. Uno dei requisiti di una tale antenna è che sia a basso rumore; occorre quindi provarla in condizioni in cui non riceva segnali o disturbi dalle sorgenti terrestri: la soluzione migliore è di puntarla verso il cielo. Penzias e Wilson trovarono più rumore di quello che si aspettavano; dopo i necessari controlli sul ricevitore, ne parlarono a degli astrofisici, e così venne fuori che il loro "rumore" era la radiazione già prevista tanti anni prima.

Nello *Astrophysical Journal* del '65 ci sono due lettere: quella di Penzias e Wilson, che è diventata famosa, è lunga poco più di una pagina, e porta il modesto titolo: "Misura di un eccesso di temperatura di antenna a 4080 MHz." L'altra, di Dicke e altri, è molto più lunga, e dà l'interpretazione cosmologica delle misure di Penzias e Wilson.

La scoperta della radiazione di fondo ha posto in una nuova luce il problema del "rif. privilegiato," e quindi del PR: infatti il rif. in cui quella radiazione appare isotropa è distinguibile dagli altri a causa di proprietà fisiche osservabili, e ciò sembra contraddire il PR. La premessa del ragionamento è indubbiamente giusta, ma non ha necessariamente le conseguenze che si potrebbe credere.

Spieghiamoci con un esempio banale. Nella meccanica newtoniana vale il PR: per esempio, l'urto frontale fra due auto che vanno a 50 km/h ha gli stessi effetti di quello tra un'auto che vada a 100 km/h e una ferma (non esattamente, a causa degli attriti sulla strada). Tuttavia, se io viaggio su di una strada dove si trovano incolonnati degli autocarri che vanno a 80 km/h, è soprattutto di quelli che mi debbo preoccupare, e ciò non contraddice il PR.

Analogamente, la presenza della radiazione di fondo ha certamente un effetto fisico (soprattutto ne ha avuto nella fase iniziale); ma ciò non toglie che si possa ancora parlare di rif. localmente inerziali, tra loro equivalenti perché in moto relativo uniforme.

Universo aperto o chiuso? Il futuro dell'Universo

Voglio mostrare ora come si possano trarre conclusioni almeno qualitative sui problemi posti nel titolo, semplicemente usando la (17–6), che conviene riscrivere dividendola per R^2:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \tfrac{8}{3}\pi G\varrho = -\frac{kc^2}{R^2}. \tag{17–8}$$

A primo membro si riconosce il quadrato di H (16–3), e quindi

$$\frac{kc^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho - H^2. \tag{17–9}$$

Dalla (17–9) si vede che se si conoscessero abbastanza bene i valori di H e di ϱ si potrebbe decidere il segno di k. Coi dati attuali, anche tenendo conto della materia oscura, risulta sempre $k = -1$ (spazio iperbolico). Esiste però un problema, del quale parlerò più avanti.

La (17–9) c'insegna anche un'altra cosa. Sappiamo che oggi, e a maggior ragione se R cresce, ϱ è dominata dalla materia barionica, e decresce come $1/R^3$. Perciò il primo termine a secondo membro finisce per diventare trascurabile rispetto all'altro, e questo basta per dire che se $R \to \infty$ è escluso che sia $k = 1$. Dunque se lo spazio è a curvatura positiva, R non può crescere indefinitamente: raggiunge un massimo (in cui $\dot{R} = 0$ e quindi $H = 0$) e poi torna a decrescere, ripercorrendo simmetricamente le fasi percorse durante l'espansione. Se invece $k \ge 0$ (curvatura nulla o positiva) R continua a crescere fino all'infinito. C'è dunque un legame tra il segno della curvatura e l'evoluzione futura dell'Universo.

Cose non dette e problemi aperti

Dai cenni storici che ho fatto qua e là sarà apparso chiaro che la cosmologia è una scienza giovane, e ancora in pieno sviluppo; non mancano perciò i problemi aperti, sia su argomenti che abbiamo trattato, sia su altri che non sono stati neppure sfiorati. Per fare un esempio: sebbene il PC come fatto sperimentale sia accettato concordemente, esso pone dei problemi teorici. È difficile capire come dall'esplosione iniziale si sia arrivati a una situazione così regolare. Si tratta della stessa questione cui ho fatto cenno nella lezione precedente e che ha motivato la proposta dei cosiddetti "modelli inflazionari."

Un argomento di cui non abbiamo potuto parlare sono le onde gravitazionali. La RG prevede queste onde, e fornisce espressioni quantitative per l'intensità dell'emissione e per gli effetti osservabili. La rivelazione diretta mediante "antenne gravitazionali" non è ancora avvenuta, e sistemi sempre più sensibili sono in costruzione. Però è già avvenuta una rivelazione indiretta, basata sul moto, studiato per oltre 20 anni, di un sistema binario di stelle di neutroni (premio Nobel a Hulse e Taylor nel 1993). Purtroppo il livello della nostra trattazione non mi consente di dire di più.

Dicevo sopra che i dati su ϱ e H sembrano indicare un Universo iperbolico ($k = -1$). Esistono però altri dati, basati sull'andamento del redshift con la distanza, che contraddicono questo risultato, e puntano verso un Universo "piatto" ($k = 0$). Per motivi che purtroppo non posso spiegare, anche questo è un problema: è difficile capire come mai la densità di materia sia oggi vicina a quella che genera uno spazio piatto, senza fare ipotesi inverosimili sul passato. Anche questa difficoltà ha portato a supporre che nei tempi remoti la materia dovesse avere proprietà peculiari (modelli inflazionari).

Osservazioni recenti sollevano un altro problema: le relazioni distanza-redshift paiono addirittura incompatibili con la più ovvia conseguenza della (17–4), ossia $\ddot{R} < 0$. Anche i mass-media hanno parlato di questa "accelerazione dell'espansione," che sembra richiedere una modifica delle equazioni di Einstein.

A dire il vero tale modifica è nota da tempo, ed è dovuta allo stesso Einstein, il quale quando ricavò la (17–4) vide subito che essa era incompatibile con un universo statico (R costante). A quel tempo l'espansione non era ancora stata scoperta, e sembrava naturale che l'Universo rimanesse sempre lo stesso (quindi statico). Per questo motivo Einstein corresse le sue equazioni, aggiungendo il famoso "termine cosmologico," sì da ottenere una (17–4) modificata, che ammettesse una soluzione statica. Poco dopo, quando Hubble annunciò la sua scoperta, Einstein rinnegò la correzione (che per ragioni estetiche non gli era mai piaciuta) definendola "la più grossa cantonata della mia vita."

È quindi curioso che i dati recenti sembrino richiedere di nuovo il termine cosmologico; ma è doveroso aggiungere subito che ogni decisione in merito è prematura. Meglio aspettare conferme e altri dati indipendenti; per ora il problema rimane aperto.

Problemi

1. Partendo dal valore attuale di H ($70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$) e dall'ipotesi $k = 0$, calcolare la densità di materia ϱ. Confrontare col dato osservato: $\sim 10^{-28}\,\mathrm{kg/m^3}$.

2. A puro titolo di esercizio, senza nessuna pretesa di connessione con la realtà, studiare l'evoluzione iniziale di un universo "dominato dalla materia," ossia con $\varrho \propto R^{-3}$. Mostrare che la scelta del parametro k è irrilevante.

3. Stesso calcolo, per un universo "dominato dalla radiazione": $\varrho \propto R^{-4}$.

4. Attualmente (2005) la (17–8) viene scritta col termine cosmologico, nella forma seguente:

$$\frac{\dot R^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho + \tfrac{1}{3}\,\Lambda \tag{17–10}$$

dove Λ è una costante positiva, che si assume pari a $2.1\,H^2 = 1.1 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{s^{-2}}$.

a) Discutere l'evoluzione futura dell'Universo, prendendo $k = 0$.

b) Trascurando per semplicità il primo termine a secondo membro nella (17–10), qual è la massima distanza attuale di oggetti dai quali sarà mai possibile ricevere luce?

Risposte

Problema 1. (Densità di materia):

Basta usare la (17–9), che per $k = 0$ fornisce

$$\varrho = \frac{3H^2}{8\pi G} \simeq 10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3}$$

ossia due ordini di grandezza sopra quella osservata. È questo uno degli aspetti del "problema della materia oscura."

Problema 2. (Evoluzione iniziale se domina la materia):

Possiamo partire dalla (17–8), che riscriviamo portando il termine con ϱ a secondo membro:

$$\frac{\dot R^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho - \frac{kc^2}{R^2}. \tag{17–11}$$

Se ϱ è dominata dalla materia (barionica) e quindi va come $1/R^3$, per piccoli R il primo termine a secondo membro prevale sul secondo, e questo dimostra che la scelta di k non ha importanza.

Trascurando dunque il termine in k, la (17–11) diventa

$$\dot R = \frac{p}{\sqrt{R}}$$

dove p è una costante. Questa si può integrare facilmente (per separazione di variabili) e porta a

$$R(t) = \left(\tfrac{2}{3}\,p\,t\right)^{2/3}$$

ossia il raggio dell'Universo cresce come la potenza $2/3$ di t.

Da qui si vede che per $t \to 0$ di nuovo $\dot R \to \infty$, come nel problema 16.4, dove si aveva $R \propto t^{1/2}$.

Problema 3. (Evoluzione iniziale se domina la radiazione):

Cambia molto poco rispetto al problema precedente: questa volta la (17–7) ci dice che ϱ va come $1/R^4$. A maggior ragione per piccoli R è trascurabiile il termine in k nella (17–10), e abbiamo

$$\dot{R} = \frac{p'}{R}.$$

Integrando:

$$R(t) = \sqrt{2\,p'\,t}$$

ossia proprio la forma che avevamo supposta nel problema 16.3, con $a = \sqrt{2\,p'}$.

Problema 4. (Termine cosmologico):

a) Se si pone $k = 0$ la (17–10) diventa

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho + \tfrac{1}{3}\Lambda.$$

Inoltre, se siamo interessati all'evoluzione futura, in cui R cresce, possiamo trascurare a secondo membro il primo termine, che va come $1/R^3$, rispetto al secondo, che è costante. Si ottiene allora

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}$$

$$R = R_0 \,\exp\!\left[\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}\,(t - t_0)\right].$$

L'espansione assume un andamento esponenziale, quindi sempre più accelerato.

b) Il procedimento è lo stesso del problema 16.3:

$$c\,dt = ds = R\,d\vartheta = R_0\,\exp\!\left[\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}\,(t - t_0)\right] d\vartheta.$$

Separando le variabili e integrando:

$$\frac{R_0}{c}\,\vartheta = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,\exp\!\left[-\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}\,(t - t_0)\right]. \qquad (17\text{–}12)$$

È opportuno discutere brevemente la determinazione della costante. Stiamo considerando una sorgente che emette luce all'istante $t = t_0$, e ϑ denota la separazione (espressa in coordinata comovente) tra la sorgente e il rivelatore, che riceve la luce al tempo t. È allora chiaro che ϑ deve annullarsi se $t = t_0$.

Per $t \to +\infty$, la (17–12) dà

$$\frac{R_0}{c}\,\vartheta_\infty = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,;$$

d'altra parte $R_0\,\vartheta_\infty$ è proprio la distanza l_e cercata:

$$l_\mathrm{e} = c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{H}\,\frac{1}{\sqrt{0.7}} = 5.0\,\mathrm{Gpc}.$$

Nota: Può sembrare incoerente usare la tecnica della coordinata comovente e del raggio che si espande, che abbiamo introdotta nella lezione precedente per uno spazio sferico, quando si assume $k = 0$, ossia spazio euclideo.

Possiamo però considerare lo spazio euclideo come limite di uno spazio sferico di raggio molto grande, il che del resto è in accordo col fatto che le misure non possono mai dare per certo $k = 0$. In altre parole, lo spazio è euclideo "entro gli errori sperimentali." Ma entro gli errori si può anche assumerlo sferico, il che vuol dire che il termine con k nella (17–8) non sarà rigorosamente nullo, ma solo trascurabile entro gli errori.